Matematinės analizės egzaminas
2003.01.06

1. Duotas plokštumos $\mathbb{R}^2$ poaibis $A = \{(x;0), x \in [0,1]\}$.
   a) Naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu sekų kalba, įrodykite, kad A yra kompaktiška aibė. (2)
   b) Įrodykite teiginį: Jei G yra atviras $\mathbb{R}^2$ poaibis, tai $G_x = G \cap \mathbb{R}_x, \mathbb{R}_x = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ yra atviras tiesės $\mathbb{R}_x$ poaibis. Pavaizduokite tai geometriškai. (2)
   c) Naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu atvirųjų denginių kalba, įrodykite, kad A yra kompaktiška aibė. (3)
   d) Įrodykite, kad A yra uždara aibė (naudodamiesi uždarosios aibės apibrėžimu). (2)

2. Duota dviejų kintamųjų funkcija $f(x,y) = xy - x^2$.
   a) Nubrėžkite funkcijos portretą. (4)
   b) Sakykime, $\gamma(t) = (h(t), k(t))$ yra separatrisės, einančios per tašką $(0,0)$ ($h(0) = 0, k(0) = 0$), parametrizacija. Išveskite separatrisės liestinių krypčių vektorių lygtį. Parašykite separatrisės paprasčiausias parametrines išraiškas. (3)
   c) Apskaičiuokite antrąsias išvestines:
      i) naudodamiesi neišreikštinės funkcijos teorema; (1)
      ii) išsireiškę funkcijas $y = y(x, C)$. (1)
   d) Ištirkite lygio linijų iškilumą. Ar iš abiejų išvestinės išraiškų išplaukia tas pats rezultatas? Kuri antros išvestinės forma yra patogesnė? (3)

3. Duota diferencialinių lygčių sistema
$$\begin{cases} x'(t) = x, x(0) = x_0, \\ y'(t) = 2x - y, y(0) = y_0. \end{cases}$$
   a) Išspręskite šią sistemą naudodami Laplaso transformaciją. Sprendinį patikrinkite. (4)
   b) Apskaičiuokite $f(t) = x(t)y(t) - x^2(t)$. (1)
   c) Susiekite dalyje (b) gautą rezultatą su (2) užduotyje nupieštu funkcijos portretu. (1)
   d) Raskite ribą $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. (1)
   e) Funkcijos portrete pažymėkite rodykles, rodančias diferencialinės lygčių sistemos trajektorijų $(x(t), y(t))$ kitimo kryptis. (1)

4. Apskaičiuokite integralą $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin \alpha t)^2}{t^2} dt$, $\alpha > 0$.
   a) Apibrėžkime integralą $I(\alpha, s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(\sin \alpha t)^2}{t^2} dt$, $s > 0$. Pagrįskite operaciją $\lim\limits_{s \downarrow 0} I(\alpha, s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{s \downarrow 0} e^{-st} \frac{(\sin \alpha t)^2}{t^2} dt = I(\alpha)$. (2)

b) Apskaičiuokite $\dfrac{\partial I(\alpha,s)}{\partial\alpha}$. Pagrįskite operaciją

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I(\alpha,s)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt\,. \qquad (3)$$

c) Jei $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$, tai kokios funkcijos Laplaso transformacija yra funkcija $G(s)=\int_s^{+\infty}F(\sigma)d\sigma$? (Naudokitės Fubini teorema.) (3)

d) Naudodami (c) dalies rezultatą apskaičiuokite funkcijos $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\dfrac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}$ Laplaso transformaciją. (2)

e) Apskaičiuokite $I(\alpha,s)$ (reiškinio su arktangentu neintegruokite!). (2)

f) Įrodykite, kad $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt=\dfrac{\pi\alpha}{2}$ (perėjimą prie ribos integrale su arktangentu pagrįskite). (2)

5. Raskite tūrį figūros, apribotos paviršiais $z=x^2+y^2, z^2=x^2+y^2$. Įvardinkite paviršius. Jei neišeis nubrėžti trimačio brėžinio, tai būtinai nubrėžkite dvimates projekcijas. (4)

6. Įrodykite, kad beta funkcija $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x>0, y>0$ yra logaritmiškai iškila x-so funkcija. (6)

7. Duota funkcija $f(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)=(0,0),\\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0).\end{cases}$

a) Apskaičiuokite $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (2)

b) Ar funkcija diferencijuojama taške $(0,0)$? Jei taip, tai suraskite $f'(0,0)$, jei ne – tai įrodykite, kad funkcija nediferencijuojama šiame taške. (3)

Paruošė R.Kudžma