Kontrolinis darbas
2002.04.06

1. Kreivė C nusakyta parametrinėmis lygtimis
   $x=\dfrac{t^3+1}{t}, y=\dfrac{t^3-1}{t}, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   a) Nubrėžkite funkcijų x ir y grafikų eskizus atitinkamai $(t;x)$ ir $(t;y)$ plokštumose.
   b) Nubrėžkite kreivės C eskizą $(x;y)$ plokštumoje.
   c) Suraskite kreivės C asimptotes.
   d) Apskaičiuokite funkcijos (neišreikštinės) išvestines $y'_x(t)$ ir $y''_{xx}(t)$.
   e) Ištirkite kreivės C iškilumą.
   f) Patikslinkite kreivės C eskizą. (visos dalys po 2 t.)
2. Duota koverguojanti seka $\{a_n\}$. Pažymėkime $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Įrodykite, kad seka
   $b_n=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$ taip pat konverguoja ir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$ (4 t.)
   Patarimas. Siūlau naudoti Štolco teoremą.
3. Raskite eilutės
   $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+...$ (4 t.)
   (du nariai teigiami, du neigiami iš eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$) sumą.
4. Teorema. Jei teisinga Liopitalio taisyklė, tai teisinga ir Štolco teorama.
   Duota :
   a) Štolco teoremos sąlygos: seka $\{x_n\}$, griežtai didėjanti seka $\{y_n\}$,
      $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$.
   b) Teisinga Liopitalio taisyklė.

   Įrodymas. Sukonstruokime funkcijas:
   $f(x)=x_n+(x_{n+1}-x_n)(x-n)$, kai $x\in[n;n+1]$,
   $g(x)=y_n+(y_{n+1}-y_n)(x-n)$, kai $x\in[n;n+1]$, $n=1,2,...$.
   Funkcija g yra griežtai didėjanti ir $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
   $f'(x)=x_{n+1}-x_n, g'(x)=y_{n+1}-y_n$, kai $x\in(n;n+1)$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$.
   Iš Liopitalio taisyklės išplaukia, kad $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. Iš pagrindinės ribų teoremos išplaukia, kad $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=A$. Bet $f(n)=x_n$ ir $g(n)=y_n$. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A.$ Taigi įrodėme Štolco teoremą.
   Užduotis. Raskite įrodyme klaidą. (4 t.)

5. a) Primenu operatoriaus Δ ir jo laipsnių apibrėžimus

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x).$$

Funkcijai $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ apskaičiuokite $\Delta^n f(x), \Delta^n f(0)$ ir parašykite Niutono eilutę. (4 t.)

b) Raskite laipsninės eilutės (pagal *t*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!} t^{n+1} \qquad (1)$$

konvergavimo spindulį. Pažymėkime (1) eilutės sumą $s(t)$. (2 t.)

c) Paimkime ankstesnėje eilutėje $t = 1$. Ką galite pasakyti apie eilutės

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!} \qquad (2)$$

narių ženklus? Kokioms x reikšmėms eilutė (2) konverguoja reliatyviai ir absoliučiai? (4 t.)

d) Eilutė (1) labai panaši į binominę eilutę, tačiau nėra tokia. Kaip (1) eilutę reikėtų pertvarkyti, kad gautume binominę ir galėtume surasti sumą $s(t)$? (3 t.)

e) Sakykime, x yra fiksuotas ir $0 < x < 1$. Įrodykite, kad eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-n+1)}{n!} t^n = 1 - \frac{x+1}{1}t + \frac{(x+1)x}{2!}t^2 - \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}t^3 + \ldots$$

konverguoja tolygiai (pagal *t*) intervale $[0;1]$. (4 t.)

f) Žinome, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-n+1)}{n!} t^n = (1-t)^{x+1},$$

kai $-1 < t < 1$. Pasinaudoję dalies (e) rezultatu įrodykite, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-n+1)}{n!} = (1-1)^{x+1} = 0$$

ir apskaičiuokite $s(1)$. (3 t.)

6. Suformuluokite Leibnico teoremą (apie alternuojančias eilutes). Dviem sakiniais paaiškinkite įrodymo idėją. (4 t.)

Paruošė R.Kudžma