Kontrolinio darbo užduočių sprendimai
2002.04.06

1. Kreivė C nusakyta parametrinėmis lygtimis

   $$x = \frac{t^3+1}{t}, y = \frac{t^3-1}{t}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   a) Nubrėžkite funkcijų x ir y grafikų eskizus atitinkamai $(t; x)$ ir $(t; y)$ plokštumose.
   b) Nubrėžkite kreivės C eskizą $(x; y)$ plokštumoje.
   c) Suraskite kreivės C asimptotes.
   d) Apskaičiuokite funkcijos (neišreikštinės) išvestines $y'_x(t)$ ir $y''_{xx}(t)$.
   e) Ištirkite kreivės C iškilumą.
   f) Patikslinkite kreivės C eskizą. (visos dalys po 2 t.)

Sprendimas. a)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(t^2 + \frac{1}{t}\right) = +\infty, \lim_{t\uparrow 0} x(t) = -\infty, \lim_{t\downarrow 0} x(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(t^2 - \frac{1}{t}\right) = +\infty, \lim_{t\uparrow 0} y(t) = +\infty, \lim_{t\downarrow 0} y(t) = -+\infty.$$

c)

$$k_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3-1}{t^3+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^3}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{t\to\infty}(y(t)-x(t)) = \lim_{t\to\infty}\left(t^2 - \frac{1}{t} - t^2 - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{t}\right) = 0.$$

Asimptotė $y = x$.

$$k_2 = \lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3-1}{t^3+1} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{t\to 0}(y(t)+x(t)) = \lim_{t\to 0}\left(t^2 - \frac{1}{t} + t^2 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0} 2t^2 = 0.$$

Asimptotė $y = -x$.

d)

$$y'_t = \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)' = 2t + \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3+1}{t^2},$$

$$x'_t = \left(t^2 + \frac{1}{t}\right)' = 2t - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3-1}{t^2},$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t^3+1}{2t^3-1},$$

$$y''_{xx}(t) = \left(\frac{2t^3+1}{2t^3-1}\right)' \cdot t'_x = \frac{6t^2(2t^3-1) - 6t^2(2t^3+1)}{(2t^3-1)^2} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

$$= \frac{-12t^2}{(2t^3-1)^2} \cdot \frac{t^2}{(2t^3-1)} = \frac{-12t^4}{(2t^3-1)^3}.$$

e) Kreivė C iškila, kai $t \in (-\infty; 0)$, $t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ ir įgaubta, kai $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$.

2. Duota koverguojanti seka $\{a_n\}$. Pažymėkime $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Įrodykite, kad seka $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ taip pat konverguoja ir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. (4 t.)

Patarimas. Siūlau naudoti Štolco teoremą.

Sprendimas.

Pažymėkime

$x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ir $y_n = n$.

Seka $\{y_n\}$ didėjanti ir $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Patenkintos Štolco teoremos sąlygos. Todėl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = a.$$

3. Raskite eilutės

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ...$$ (4 t.)

(du nariai teigiami, du neigiami iš eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$) sumą.

Sprendimas. Nagrinėkime eilutės dalinių sumų posekius

$$\begin{aligned}
s_{4n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \ln 4n + \gamma + o(1) - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \ln 4 + \ln n + \gamma + o(1) - (\ln 2n + \gamma + o(1)) \\
&= \ln 4 + \ln n + \gamma + o(1) - \ln 2 - \ln n - \gamma - o(1) \\
&= \ln \frac{4}{2} + o(1) = \ln 2 + o(1) \to \ln 2, n \to \infty
\end{aligned}$$

$$s_{4n+1} = s_{4n} + \frac{1}{4n+1} \to \ln 2,$$

$$s_{4n+2} = s_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \to \ln 2,$$

$$s_{4n+3} = s_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n-2} \to \ln 2, n \to \infty.$$

Iš to, kad šie keturi posekiai (jie išsemia visą seką) turi tą pačią ribą, išplaukia, kad ir $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ln 2$.

4. Teorema. Jei teisinga Liopitalio taisyklė, tai teisinga ir Štolco teorama.
   Duota :
   a) Štolco teoremos sąlygos: seka $\{x_n\}$, griežtai didėjanti seka $\{y_n\}$,

   $$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A.$$

   b) Teisinga Liopitalio taisyklė.

   Įrodymas. Sukonstruokime funkcijas:

   $f(x) = x_n + (x_{n+1}-x_n)(x-n)$, kai $x\in[n;n+1]$,

   $g(x) = y_n + (y_{n+1}-y_n)(x-n)$, kai $x\in[n;n+1]$, $n = 1,2,...$.

   Funkcija g yra griežtai didėjanti ir $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   $f'(x) = x_{n+1}-x_n, g'(x) = y_{n+1}-y_n$, kai $x\in(n;n+1)$.

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A.$$

   Iš Liopitalio taisyklės išplaukia, kad $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Iš pagrindinės ribų teoremos išplaukia, kad $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)} = A$. Bet $f(n) = x_n$ ir $g(n) = y_n$. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = A.$ Taigi įrodėme Štolco teoremą.

   Užduotis. Raskite įrodyme klaidą. (4 t.)

Sprendimas. Prisiminkime Liopitalio teoremos formuluotę:

Teorema. Jei diferencijuojamos intervale $(1;+\infty)$ funkcijos *f* ir *g* tenkina sąlygas:

1) egzistuoja baigtinė arba begalinė riba $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A,$
2) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty,$
3) $g'(x) > 0, x\in(1;+\infty),$

tai $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A.$.

Pateiktame įrodyme klaida yra ta, kad sukonstruotos funkcijos *f* ir *g* nėra diferencijuojamos taškuose $n, n\in\mathbb{N}$.

5. a) Primenu operatoriaus Δ ir jo laipsnių apibrėžimus

   $$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x).$$

   Funkcijai $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ apskaičiuokite $\Delta^n f(x), \Delta^n f(0)$ ir parašykite Niutono eilutę. (4 t.)

   Sprendimas.

$$\Delta f(x)=\frac{1}{x+1+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x-2}{(x+2)(x+1)}=\frac{-1}{(x+2)(x+1)},$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x)&=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)\\&=\frac{-1}{(x+3)(x+2)}-\frac{-1}{(x+2)(x+1)}\\&=\frac{-1(x+1)+x+3}{(x+3)(x+2)(x+1)}\\&=\frac{2}{(x+3)(x+2)(x+1)}.\end{aligned}$$

Indukcinė prielaida

$$\Delta^n f(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)}.$$

Indukcijos žingsnis

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f(x)&=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+n+2)}-\frac{(-1)^n n!}{(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+n+2)}\\&=\frac{(-1)^n n!(x+1-x-n-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+n+2)}\\&=\frac{(-1)^n n!(-1)(n+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+n+2)}\\&=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+n+2)};\end{aligned}$$

$$\Delta^n f(0)=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Funkcijos $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ Niutono eilutė atrodys taip:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}&\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n f(0)}{n!}x^{\underline{n}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)}x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1).\end{aligned}$$

b) Raskite laipsninės eilutės (pagal t)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!}t^{n+1} \qquad (1)$$

konvergavimo spindulį. Pažymėkime (1) eilutės sumą $s(t)$. (2 t.)

Sprendimas. Laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ konvergavimo spindulį galima rasti, naudojantis formulėmis

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ arba } R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)|}{(n+1)!}}{\dfrac{|x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)(x-n)|}{(n+2)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{|x-n|}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n-x} = 1.$$

Priešpaskutiniame naryje modulio ženklą praleidome, laikydami, kad $n > x$.
Kai $|t| < 1$, eilutė (1) konverguoja ir nusako tam tikrą funkciją

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!} t^{n+1}, -1 < t < 1. \quad (2)$$

c) Paimkime ankstesnėje eilutėje $t = 1$. Ką galite pasakyti apie eilutės

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!} \quad (3)$$

narių ženklus? Kokioms x reikšmėms eilutė (3) konverguoja reliatyviai ir absoliučiai? (4 t.)

Sprendimas. Išrašykime pirmuosius eilutės narius

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x(x-1)}{3!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!} + \ldots$$

Nagrinėkime atvejį, kai $x < 0$. Matome, kad visi dėmenys eilutėje yra teigiami:

$-x > 0,$

$x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x(x-1) > 0,$

...

$(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1) = (-x)(1-x)\cdot\ldots\cdot(n-1-x) > 0$

Jei $0 < x < 1$, tai pirmasis eilutės narys (lygus 1) – teigiamas, o visi kiti neigiami.
Jei $1 < x < 2$, tai eilutės narių ženklai būtų tokie
\+ - + + + + … + …
Jei $k < x < k+1$, tai iki k-tojo nario ženklai keistųsi, o po to būtų pastovūs. Vadinasi, jei eilutė konverguoja, tai ji konverguoja ir absoliučiai. Eilučių konvergavimi tirti galima taikyti požymius eilutėms su pastovaus ženklo nariais. Dalambero požymis nieko gero neduos, nes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(x-n)}{n+2} \lim_{n\to\infty} \frac{n-x}{n+2} = 1.$$

Taikykime Raabe požymį:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+2}{n-x} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{x}{n}} \qquad \left(\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \ldots = 1 + h + o(h), h \to 0\right)$$

$$= \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= 1+\frac{2}{n}+\frac{x}{n}+\frac{2x}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1+\frac{2+x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$$

Kai $2+x>1$ arba $x>-1$, tai eilutė konverguoja.

d) Eilutė (1) labai panaši į binominę eilutę, tačiau nėra tokia. Kaip (1) eilutę reikėtų pertvarkyti, kad gautume binominę ir galėtume surasti sumą $s(t)$? (3 t.)

Sprendimas. Padauginkime (2) eilutę iš $x+1$ ir ją pertvarkykime:

$$(x+1)s(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!}t^{n+1}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{(n+1)!}t^{n+1}$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-k+1)}{k!}t^{k}$$
$$= 1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{x+1}{k}t^k$$
$$= 1-(1-t)^{x+1}, -1<t<1.$$

$$s(t) = \frac{1}{x+1}-\frac{(1-t)^{x+1}}{x+1}, -1<t<1. \qquad (4)$$

e) Sakykime, x yra fiksuotas ir $0<x<1$. Įrodykite, kad eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x+1}{n}t^n = 1-\frac{x+1}{1}t+\frac{(x+1)x}{2!}t^2-\frac{(x+1)x(x-1)}{3!}t^3+\ldots \qquad (5)$$

konverguoja tolygiai (pagal t) intervale $[0;1]$. (4 t.)

Sprendimas. Pirmiausia pastebėkime, kad (5) eilutėje visi nariai yra teigiami, išskyrus antrąjį. Akivaizdu, kad

$$\left|(-1)^n\binom{x+1}{n}t^n\right| \le (-1)^n\binom{x+1}{n}, 0\le t\le 1, n\ge 2.$$

Belieka įrodyti, kad eilutė

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\binom{x+1}{n} \qquad (6)$$

konverguoja. Tada remdamiesi Vejerštarso teorema, gausime, kad (5) eilutė konverguoja tolygiai intervale $[0;1]$. Eilutės (6) konvergavimui įrodyti naudosime Raabe požymį. Tirsime gretimų (6) eilutės narių santykį

$$\frac{(-1)^n\binom{x+1}{n}}{(-1)^{n+1}\binom{x+1}{n+1}}=\frac{1}{-\frac{x+1-n}{n+1}}$$

$$=\frac{n+1}{n-x-1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{x+1}{n}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{x+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=1+\frac{x+2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty.$$

Kaip ir dalyje (c) gauname, kad eilutė (6) konverguoja, jei $x+2>1$ arba $x>-1$. Pats Raabe požymio įrodymas yra gana sudėtingas. Jo taikymas taip pat nėra visiškai paprastas. Todėl (6) eilutės konvergavimą įrodysime kitaip. Kadangi $0<x<1$, tai

$$\frac{(x+1)x}{2!}<\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}<2\cdot\frac{1}{1\cdot 2},$$

$$\frac{(x+1)x(1-x)}{3!}<\frac{2\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}<2\cdot\frac{1}{2\cdot 3},$$

$$\frac{(x+1)x(1-x)(2-x)}{4!}<\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<2\cdot\frac{1}{3\cdot 4},$$

$$\ldots$$

$$\frac{(x+1)x(1-x)\cdot\ldots\cdot(n-2-x)}{n!}<\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<2\cdot\frac{1}{(n-1)n}$$

Žinome, kad eilutė $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)n}$ konverguoja. Todėl iš eilučių palyginimo teoremos išplaukia, kad eilutė (6) taip pat konverguoja.

f) Žinome, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-n+1)}{n!}t^n=(1-t)^{x+1},$$

kai $-1<t<1$. Pasinaudoję dalies (e) rezultatu įrodykite, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)x\cdot\ldots\cdot(x+1-n+1)}{n!}=(1-1)^{x+1}=0$$

ir apskaičiuokite $s(1)$. (3 t.)

Sprendimas. Pažymėkime (5) eilutės sumą

$$\sigma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x+1}{n}t^n.$$

Dalyje (e) įrodėme, kad ši eilutė konverguoja tolygiai intervale $[0;1]$. Vadinasi, funkcija σ yra tolydi šiame intervale. Bet $\sigma(t)=(1-t)^{x+1}, 0\le t<1$, todėl

$$\sigma(1) = \lim_{t \uparrow 1} \sigma(t) = \lim_{t \uparrow 1} (1-t)^{x+1} = 0. \quad (7)$$

Eilutės (2) ir (5) skiriasi daugikliu ir vienu dėmenim. Todėl jos abi konverguoja tolygiai intervale $[0;1]$, o funkcijos $s(t), \sigma(t)$ yra tolydžios tame intervale ir

$$s(1) = \lim_{t \uparrow 1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{(1-t)^{x+1}}{x+1} \right) = \frac{1}{x+1}.$$

Taigi įrodėme, kad funkcijos $f(x) = \frac{1}{x+1}$ Niutono eilutė (3) konverguoja ir jos suma yra $\frac{1}{x+1}$.

6. Suformuluokite Leibnico teoremą (apie alternuojančias eilutes). Dviem sakiniais paaiškinkite įrodymo idėją. (4 t.)

Sprendimas. Teorema. Jei seka $\{a_n\}$ yra teigiama, mažėjanti ir $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguoja.

Pirmiausia įrodoma, kad eilutės dalinių sumų posekiai $\{s_{2n}\}$ ir $\{s_{2n+1}\}$ yra monotoniški ir aprėžti; vadinasi, jie konverguoja.

Tada iš sąryšio $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ ir sąlygos $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ išplaukia, kad $\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n}$; o tai yra bendra sekos $\{s_n\}$ riba, kuri yra ir eilutės suma.