Matematinės analizės egzaminas
2002.06.06
(2002.10.29)

1. a) Tolydžiai diferencijuojamai funkcijai f įrodykite formulę:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \int_0^1 \varphi_1(x) f'(x)dx,$$

čia $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$. (1)

b) Apibrėžkime funkciją

$\psi_1(x) = \varphi_1(x), 0 \le x \le 1,$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x-k), k < x \le k+1, k = 1,2,\ldots$.

Nubrėžkite funkcijos ψ_1 grafiką intervale $[0;4]$. (1)

c) Įrodykite, kad $\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} \psi_1(x) f'(x)dx$, $k \in \mathbb{N}$.(2)

d) Įrodykite, kad

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_0^n \psi_1(x) f'(x)dx . \quad (2)$$

e) Suraskite antrojo laipsnio polinomą $y = \varphi_2(x)$, tenkinantį sąlygas

$\varphi_2'(x) = \varphi_1(x), x \in \mathbb{R}$, ir $\int_0^1 \varphi_2(x)dx = 0$.

Nubrėžkite funkcijos $y = \varphi_2(x)$ grafiką intervale $[0;1]$. (3)

f) Apibrėžkime funkciją

$\psi_2(x) = \varphi_2(x), 0 \le x \le 1,$

$\psi_2(x) = \varphi_2(x-k), k < x \le k+1, k = 1,2,\ldots$.

Nubrėžkite funkcijos ψ_2 grafiką intervale $[0;4]$. (2)

g) Dukart tolydžiai diferencijuojamai funkcijai f įrodykite lygybę

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{12}(f'(n) - f'(0)) + \int_0^n \psi_2(x) f''(x)dx . \quad (4)$$

h) Įrodykite, kad $\int_k^{k+1} \psi_2(x)dx = 0, k = 0,1,2,\ldots$. (1)

i) Panaudokite formulę, išvestą dalyje (g) funkcijai $f(x) = x^2$, ir gaukite kvadratų sumos formulę $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (3)

2. Nagrinėkime funkciją $f(x) = x^2, 0 \le x \le 1$. Apibrėžkime seką laiptinių funkcijų

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2, \frac{k}{n} \le x < \frac{k+1}{n}, k = 0,1,2,\ldots,n-2, \quad \varphi_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \frac{n-1}{n} \le x \le 1 .$$

a) Nubrėžkite funkcijų f ir φ_4 grafikus viename brėžinyje. (2)

b) Apskaičiuokite atstumą tarp funkcijų $d(f,\varphi_4) = \sup_{0 \le x \le 1} \left| f(x) - \varphi_4(x) \right|$.

Pavaizduokite šį atstumą brėžinyje. (2)

c) Apskaičiuokite (įvertinkite) atstumą tarp funkcijų

$d(f,\varphi_n) = \sup_{0 \le x \le 1} \left| f(x) - \varphi_n(x) \right|$, $n \in \mathbb{N}$. (2)

d) Suformuluokite, ką reiškia, kad laiptinių funkcijų seka $\{\varphi_n\}$ tolygiai konverguoja į funkciją $f(x)=x^2$ inetrvale $[0;1]$. (1)

e) Naudodamiesi Kantoro teorema, įrodykite, kad laiptinių funkcijų seka $\{\varphi_n\}$, apibrėžta uždavinio pradžioje, tolygiai konverguoja į funkciją $f(x)=x^2$ intervale $[0;1]$. (2)

f) Įrodykite tą patį, ką ir dalyje (e), naudodami įvertį, gautą dalyje (c). (2)

g) Apskaičiuokite integralus $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ ir ribą $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)dx$. (3)

3. a) Ištirkite iškilumą, suraskite asimptotes ir nubrėžkite funkcijos $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ grafiką. (3)

b) Brėžinyje pavaizduokite figūrą, kurios plotą išreiškia integralas

$\int_0^A (\sqrt{1+x^2}-x)dx$, $A>0$. (1)

c) Suintegruokite skirtingais būdais integralą (pateikiamas atsakymas)

$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. (už skirtingą būdą po 3 t.)

(Ženklo pakeitimas Euler'io keitiniuose nebus laikomas kitu būdu. Neišsigąskite, jei gausite kitokią pirmykštės funkcijos išraišką. Jei integravote teisingai, tai ji ekvivalentiška nurodytai formai. Pabandykite tuo įsitikinti).

d) Ištirkite integralo $\int_0^\infty (\sqrt{1+x^2}-x)dx$ konvergavimą pagal apibrėžimą. (2)

e) Ištirkite integralo $\int_0^\infty (\sqrt{1+x^2}-x)dx$ konvergavimą naudodami palyginimo teoremą. (2)

4. a) Apibrėžkite tolygaus tolydumo sąvoką. Suformuluokite Kantoro teoremą. (1)

b) Pateikite pavyzdį tolydžios funkcijos (ne konstantos) intervale $[1;\infty)$, kad ji būtų tolygiai tolydi visame intervale. Pavyzdį pagrįskite. (2)

c) Pateikite pavyzdį tolydžios, bet netolygiai tolydžios funkcijos intervale $[0;1)$. Pagrįskite tai. (2)

d) Suformuluokite Kantoro teoremos įrodymo pagrindinius etapus. Jei žinote du skirtingus įrodymus, tai parašykite abiem atvejais. (po 4t)

Paruošė R.Kudžma