KONTROLINIS DARBAS – DALINIS EGZAMINAS
2001.11.17

1. Įrodykite: $\sum_{k=0}^{n} B_n^k = 2^n, \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \sum_{k=0}^{n} P_n^k = 2^n, \sum_{k=0}^{n} K_n^k = 2^n$, čia $B_n^k, C_n^k, P_n^k, K_n^k$, $n \in \mathbb{N}, k = 0,1,...,n$ - paskaitose apibrėšti skaičiai. (po 2 t)

2*). Jurgita kiekvieną šeštadienį kambarinę gėlę patręšia 10 g biotrąšų. Yra žinoma, kad trąšų kiekis vazone per savaitę sumažėja apie 25%.

a) Tarkime, kad Jurgitos prižiūrima gėlė anksčiau nebuvo tręšta biotrąšomis. Parašykite formulę, nusakančią trąšų kiekį kiekvienos savaitės pabaigoje prieš pat naują tręšimą. (1 t)
b) Biotrąšos veikia efektyviai tik tada, kai jų kiekis vazone iki kito tręšimo momento visą laiką yra didesnis nei 20 g. Apskaičiuokite, po kelių patręšimų tokiu būdu tręšiant gėlę trąšos ims veikti efektyviai visą laiką. (2 t)
c) Parašykite formulę, pagal kurią galima būtų apskaičiuoti trąšų kiekį vazone po kiekvieno patręšimo? (1 t)
d) Kai biotrąšų kiekis viršija 50 g, gėlė ima džiūti dėl per didelio trąšų kiekio. Įrodykite (dviem būdais), kad Jurgita gali ir toliau taip tręšti jos prižiūrimą gėlę (kad nenudžiūtų). (4 t)

3. a) Apskaičiuokite ribą sekos $x_n = \left(1 + \frac{i}{3n}\right)^n, 0 < i < 2, i$ –racionalusis skaičius. (3t)

b) Pateikite dvi skirtingas sekos $\{x_n\}$ ir jos ribos finansines interpretacijas. (5 t)

4. a) Įrodykite: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$ (2 t)

b) Ar teisinga: $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$?

Jei taip, tai įrodykite, jei ne - pateikite tai paneigiantį pavyzdį. (2 t)

c) Kokių reikia papildomų sąlygų, kad galiotų (b)? Įrodykite tai. (4 t)

5. Seka nusakoma tokiu dėsniu $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + x_n^2\right), x_0 \in \mathbb{R}.$

a) Nubraižykite "voratinklius", kai $|x_0| < 1$ ir $x_0 > 1$. (1 t)

b) Įrodykite:

(i) seka $\{x_n\}$ visada didėja, išskyrus atvejį $|x_0| = 1$, (1 t)

(ii) jei $|x_0| < 1$, tai seka aprėžta. (2 t)

c) Raskite sekos ribas, kai $|x_0| < 1$ ir $x_0 > 1$. (po 2 t)

6. Teiginys. Jei teisinga supremumo aksioma, tai teisinga ir susitraukiančiųjų intervalų lema.
Suformuluokite:
a) kas duota; (2 t)
b) ką reikia įrodyti; (1 t)
c) kas turėtų būti įrodyta (i) pirmoje dalyje; (ii) antroje; (iii) trečioje. (2 t;1 t; 2 t)

*) Tai truputį pakoreguotas 2001 m. Valstybinio matematikos brandos egzamino uždavinys.
Paruošė R.Kudžma