12. KONTROLINIO DARBO UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

1. Šitas uždavinys galėjo ir turėjo būti spręstas per pratybas.

a) $\sum_{k=0}^{n} B_n^k = 2^n$. Pagal apibrėžimą skaičiai $B_n^k, n \in \mathbb{N}, k = 0,1,...,n$ yra koeficientai prie x^k binomo dėstinyje

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} B_n^k x^k . \tag{1}$$

Įstatę šioje lygybėje $x = 1$, gauname

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Beje, tai buvo pasakyta per paskaitą ir yra parašyta internetiniame konspekte.

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, čia C_n^k - skaičius derinių iš *n* elementų po *k*. Įrodysime indukcijos metodu.

Indukcijos bazė. Kai $n = 1$, tai $C_1^0 = C_1^1 = 1$ ir $\sum_{k=0}^{1} C_1^k = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$.

Indukcijos prielaida. Sakykime, teisinga lygybė

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \text{ kokiam nors } n.$$

Indukcijos žingsnis. Nagrinėkime skirtingus elementus $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$. Visus galimus derinius iš šių elementų suskirstykime į dvi grupes:

- derinius, kurie neturi elemento a_{n+1};
- derinius, kurie turi elementą a_{n+1}.

Pirmąją grupę sudaro visi deriniai iš elementų $a_1, a_2, ..., a_n$. Jų yra $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Antrąją grupę derinių galima įsivaizduoti taip: paimame bet kokį derinį iš pirmosios grupės, pridedame prie jo elementą a_{n+1}, gauname derinį iš antrosios grupės. Ir atvirkščiai – paimame bet kokį derinį iš antrosios grupės; jis turi elementą a_{n+1}; atimame jį; gauname derinį iš pirmosios grupės, nes jis jau sudarytas tik iš pirmųjų $a_1, a_2, ..., a_n$ elementų. Akivaizdu, kad skirtingiems deriniams iš vienos grupės atitiks skirtingi deriniai iš kitos grupės. Vadinasi, pirmojoje ir antrojoje grupėse yra po vienodą derinių skaičių. Taigi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \{kombinatoriniai \cdot samprotavimai\} \\ &= 2^n + 2^n \{indukcijos \cdot prielaida\} \\ &= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \{aritmetika\}\end{aligned}$$

c) $\sum_{k=0}^{n} P_n^k = 2^n$, čia P_n^k - Paskalio trikampio skaičiai, apibrėžti taip

$$P_n^0 = P_n^n = 1, \forall n, P_{n+1}^k = P_n^k + P_n^{k-1}, k = 1,2,...,n.$$

Įrodymas indukcijos metodu.

Indukcijos bazė: $n = 1$. $P_1^0 = P_1^1 = 1$. $\sum_{k=0}^{1} P_1^k = P_1^0 + P_1^1 = 1 + 1 = 2$.

Indukcijos prielaida: teisinga $\sum_{k=0}^{n} P_n^k = 2^n$ kokiam nors *n*.

Indukcijos žingsnis:

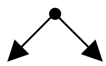
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} P_{n+1}^k &= P_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^{n} P_{n+1}^k + P_{n+1}^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(P_n^k + P_n^{k-1} \right) + 1 \\
&= P_n^0 + \sum_{k=1}^{n} P_n^k + \sum_{k=1}^{n} P_n^{k-1} + P_n^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_n^k + \sum_{k=1}^{n+1} P_n^{k-1} \\
&= 2^n + 2^n = 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

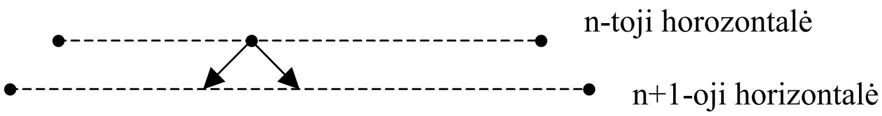
d) $\sum_{k=0}^{n} K_n^k = 2^n$, čia K_n^k - skaičius visų skirtingų kelių iš taško $A_{0,0}$ į tašką $A_{n,k}$.

Indukcijos bazė: $n = 1$. $K_1^0 = K_1^1 = 1$. $\sum_{k=0}^{1} K_1^k = K_1^0 + K_1^1 = 1 + 1 = 2$.

Indukcijos prielaida: teisinga $\sum_{k=0}^{n} K_n^k = 2^n$ kokiam nors *n*.

Indukcijos žingsnis:





Pasiekę bet kokį tašką $A_{n,k}$ *n*-tojoje horizontalėje, galime dviem ir tik dviem kelio atkarpomis patekti į *n*+1–ąją horizontalę. Vadinasi, skaičius visų kelių iš taško $A_{0,0}$ į *n*+1–ąją horizontalę , t.y . $\sum_{k=0}^{n+1} K_{n+1}^k$, yra dvigubai didesnis, negu skaičius kelių iš taško $A_{0,0}$ į *n*-tąją horizontalę. Taigi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} K_{n+1}^k &= 2\sum_{k=0}^{n} K_n^k \{geometriniai \cdot samprotavimai\} \\
&= 2 \cdot 2^n \{indukcijos \cdot prielaida\} \\
&= 2^{n+1} \{aritmetika\}
\end{aligned}$$
.

Pastaba. Galėjome indukcijos bazę laikyti ir $n = 0$. Bet tada kai kurių skaičių apibrėžimai yra truputį dirbtiniai ir, galbūt, nelabai įtikinantys.

2. a) Pažymėkime trąšų kiekį prieš pat naująjį tręšimą $a_n, n = 0,1,...$. Patiksliname: $a_0 = 0$. Tai reiškia, kad prieš pirmąjį tręšimą biotrąšų vazone nebuvo. Po pirmojo

tręšimo praėjus savaitei, biotrąšų bus likę $a_1 = 10 - 10 \cdot 0,25 = 10 \cdot \frac{3}{4} = (a_0 + 10) \cdot \frac{3}{4}$,

praėjus dviem savaitėm - $a_2 = (a_1 + 10) \cdot \frac{3}{4}$, ir t.t.

$$a_{n+1} = (a_n + 10) \cdot \frac{3}{4}, \ n = 0,1,2,... \tag{2}$$

b) Galima suskaičiuoti

$a_1 = 7,5$,

$a_2 = 17,5 \cdot 0,75 = 13,125$,

$a_3 = 23,125 \cdot 0,75 = 17,34375$,

$a_4 = 27,34375 \cdot 0,75 = 20,5078125$.

Uždaviniui pabaigti taikysime indukcijos metodą.

Indukcijos bazė: $n = 4, a_4 > 20$.

Indukcijos prielaida: sakykime, $a_n > 20$ kokiam nors *n*.

Indukcijos žingsnis:

$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + 10 > \frac{3}{4} 20 + 10 = 15 + 10 > 20$.

Vadinasi, po ketvirto tręšimo vazone visą laiką bus daugiau nei 20 g biotrąšų.

c) Pažymėkime biotrąšų kiekį tuojau pat po *n*-tojo patręšimo b_n. Tada

$$b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + 10, n = 1,2,..., b_1 = 10. \tag{3}$$

d) Pirmasis įrodymas indukcija.

Bazė: $b_1 = 10 < 50$.

Prielaida: $b_n < 50$ kokiam nors *n*.

Žingsnis: $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n + 10 < \frac{3}{4} 50 + 10 = 37,5 + 10 < 50$.

Hipotezė negali atsirasti tuščioje vietoje. Mes mokėmės "voratinklių" metodą, kuris padeda nagrinėti sekas, nusakytas rekurentiškai, t.y. formulėmis (2) ir (3).

Antrasis būdas remiasi tuo, jog mes žinome, kad seka, nusakyta (3) formule, yra geometrinės progresijos narių suma, t.y.

$$b_n = 10 + 10 \cdot \frac{3}{4} + ... + 10 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{10\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{10\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{\frac{1}{4}} = 40\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < 40 < 50$$

3. a) Seka

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{3n}\right)^n = \left(1 + \frac{i/3}{n}\right)^n \tag{4}$$

- didėjanti ir aprėžta iš viršaus (įrodyta per paskaitas). Todėl egzistuoja riba

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{3n}\right)^n.$$

Parašome lygybę

$$\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n=\left(1+\frac{i}{3n}\right)^{3n}. \qquad (5)$$

Šios lygybės dešiniojoje pusėje yra sekos $y_n=\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ posekis $\{y_{3n}\}$. Jo riba tokia pati kaip ir sekos $\{y_n\}$ riba, kurią žinome. Pereiname prie ribos lygybėje (5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{3n}\right)^{3n},$$

$$a\cdot a\cdot a=e^i,$$

$$a=e^{\frac{i}{3}}.$$

b) Iš sekos dviejų išraiškų (4) formulėje, galima pasakyti:

(i) $x_n=\left(1+\frac{i/3}{n}\right)^n$ gali būti kaupimo funkcijos reikšmė laiko momentu $t=1$, kai palūkanos perskaičiuojamos n kartų per periodą, o palūkanų norma yra $\frac{i}{3}$;

(ii) $x_n=\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n$ gali būti kaupimo funkcijos reikšmė laiko momentu $t=\frac{1}{3}$, kai palūkanos perskaičiuojamos $3n$ kartų per periodą, o palūkanų norma yra i.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i/3}{n}\right)^n=e^{\frac{i}{3}}$ gali būti kaupimo funkcijos reikšmė laiko momentu $t=1$, kai palūkanos perskaičiuojamos nuolat, nominali palūkanų norma yra $\frac{i}{3}$.

(ii) Remdamiesi (b,ii) interpretacija, galime pažymėti $x_n=\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n=A_{3n}\left(\frac{1}{3},i\right)$. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{3n}\right)^n=e^{\frac{i}{3}}$ yra tik sekos $\left\{A_m\left(\frac{1}{3},i\right)\right\}$ posekio $\left\{A_{3n}\left(\frac{1}{3},i\right)\right\}$ riba. Jei įrodymėme, kad kiti du posekiai atitinkantys natūraliųjų skaičių sekas $m=2n+1, m=2n+2$ konverguotų į tą pačią ribą, tai $e^{\frac{i}{3}}$ būtų kaupimo funkcijos reikšmė laiko momentu $t=\frac{1}{3}$, kai palūkanos perskaičiujamos nuolat, o nominali palūkanų norma yra i.

4. a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty\\
&\Rightarrow \forall E, E>0, \exists N, n>N \Rightarrow x_n>E>0\\
&\Rightarrow 0<\frac{1}{x_n}<\frac{1}{E} \qquad (6)\\
&\Rightarrow -\frac{1}{E}<\frac{1}{x_n}<\frac{1}{E}\\
&\Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right|<\frac{1}{E}
\end{aligned}$$

Jei turime bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0$, tai galime apibrėžti $E = \frac{1}{\varepsilon}$. Paėmę šitokį E formulėse (6), gautume, kad

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{E} = \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$

b) Neteisinga. Pakanka paimti seką $y_n = -\frac{1}{n}$. Tada $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$

c) Kad galiotų (b) pakanka papildomos sąlygos $y_n > 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty \Leftarrow \{\forall E, E > 0, \exists N, n > N \Rightarrow \frac{1}{y_n} > E\}$$
$$\Leftarrow \{\forall E, E > 0, \exists N, n > N \Rightarrow 0 < y_n < \frac{1}{E}\}$$
$$\Leftarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0, y_n > 0.$$

5. a) Prieš paišant “voratinklį”, būtų neblogai išsiaiškinti, kokiuose taškuose kertasi funkcijų $y = x, y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$ grafikai. Tam reikia išspręsti lygtį

$$\frac{1}{2}(1+x^2) = x,$$
$$\frac{1}{2}(1+x^2) - x = 0,$$
$$\frac{1+x^2-2x}{2} = 0,$$
$$\frac{(1-x)^2}{2} = 0,$$
$$x_{1,2} = 1.$$

Vadinasi, parabolė $y = \frac{1}{2}(1+x^2)$ liečia tiesę $y = x$ taške $x = 1, y = 1$.

b) (i) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(1+x_n^2) - x_n = \frac{1+x_n^2-2x_n}{2} = \frac{1}{2}(1-x_n)^2 \geq 0$. (7)

Seka didėjanti. Jei $|x_0| = 1$, tai $x_1 = \frac{1}{2}(1+x_0^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1, x_n = 1, \forall n, n \geq 1$.

(ii) Įrodymas indukcija. Bazė: $|x_0| < 1$. Duota sąlygoje. Tada

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+x_0^2) < \frac{1}{2}(1+1) = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}(1+x_0^2) > 0.$$

Prielaida: $0 < x_n < 1$ kokiam nors $n, n \geq 1$.

Žingsnis: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(1+x_n^2) < \frac{1}{2}(1+1) = 1,$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(1+x_n^2) > 0.$$

c) (ii) $|x_0|<1$. Seka didėjanti (visada) ir aprėžta (b,ii); egzistuoja riba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Pereiname prie ribos lygybėje

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+x_n^2\right). \tag{8}$$

Gauname lygtį

$$\begin{aligned} &a = \frac{1}{2}(1+a^2), \\ &\frac{(1-a)^2}{2} = 0, \\ &a = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

(ii) $x_0 > 1$. Sakykime seka $\{x_n\}$ yra aprėžta iš viršaus. Tada egzistuoja riba (seka visada didėjanti – (b,i)) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Perėję prie ribos (8) lygybėje ir išsprendę (9) lygtį, gauname $a=1$. Tai prieštarauja tam, kad $x_0 > 1$ ir seka didėjanti. Vadinasi, seka neaprėžta iš viršaus ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Pasinaudoję (7) lygybe ir sekos monotoniškumu, galime gauti ir sekos įvertį

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(1-x_n\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1-x_0\right)^2 = c > 0, \forall n. \tag{10}$$

Tada

$$\begin{aligned} x_n &= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \ldots - x_1 + x_1 - x_0 + x_0 \\ &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots - x_1 + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &> \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n} + x_0 \\ &= nc + x_0 \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad $\lim\limits_{n\to\infty}(nc + x_0) = +\infty$. Tada ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (vieno policininko principas).

6. a) Duota:
- teisinga Supremumo aksioma " Netuščias aprėžtas iš viršaus realiųjų skaičių poaibis turi tikslųjį viršutinį rėžį";
- susitraukiančiųjų intervalų seka,t.y.

$$I_n = [a_n; b_n], I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n, \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0. \tag{11}$$

b) Reikia įrodyti: egzistuoja vienintelis $c, c \in \mathbb{R}, c \in I_n, \forall n.$
c) (i) Reikėtų sukonstruoti dvi aibes

$$A = \{a_n, n \in \mathbb{R}\}, B = \{b_n, n \in \mathbb{R}\}.$$

Abi aibės aprėžtos: $a_0 \leq a_n \leq b_m \leq b_0, \forall n, \forall m$.
(ii) Reikėtų pasinaudoti supremumo aksioma:

$$\exists \sup A = a, \exists \inf B = b.$$

Akivaizdu, kad $a_n \leq a \leq b \leq b_n, \forall n$.
(iii) Reikėtų įrodyti, kad $a = b$. Tai ir būtų ieškomas realusis skaičius. Galima tai ir įrodyti. Sakykime, $a \neq b$. Pasirinkime bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Tada $a - \varepsilon$ nebebus aibės *A* viršutiniu rėžiu, o $b + \varepsilon$ - aibės *B* apatiniu rėžiu. Todėl egzistuos tokie

$$\begin{aligned} &a_p, a - \varepsilon < a_p \leq a, \\ &b_m, b \leq b_m < b + \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Dėl to, kad abi sekos monotoniškos ($\{a_n\}$ - didėjanti, o $\{b_n\}$ - mažėjanti), tai galios nelygybės

$$\begin{aligned} &a-\varepsilon < a_p \le a_n \le a, \\ &b \le b_n \le b_m < b+\varepsilon, \end{aligned} \tag{13}$$

kai $n \ge \max\{p, m\}$, o taip pat ir nelygybė

$$b_n - a_n \ge b - a. \tag{14}$$

Bet iš (11) sąlygos išplaukia, kad

$$\exists N, n > N \Rightarrow b_n - a_n < b - a, (\varepsilon = b - a). \tag{15}$$

Kai $n > \max\{m, p, N\}$, turėtų galioti abi priešingos nelygybės (14,15). Taip būti negali. Vadinasi, $a = b$. Tai ir yra ieškomasis skaičius. Vienatį galima įrodyti kaip lemoje (6.2).