2.10. EGZAMINO (2002.01.08) UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

1. a) Kombinatorinis įrodymas. Paimkime penkias raides *A*,*B*,*C*,*D*,*E* ir nagrinėkime dviejų raidžių derinius. Kiekvienam tokiam deriniui galime priskirti likusias raides, t.y. trijų raidžių iš penkių derinį. Pavaizduokime tai grafiškai:

$$\begin{array}{cccccccccc} AB & AC & AD & AE & BC & BD & BE & CD & CE & DE \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ CBE & BDE & BCE & BCD & ADE & ACE & ACD & ABE & ABD & ABC \end{array}$$

Jei dviejų raidžių deriniai yra skirtingi, tai ir priskirtieji trijų raidžių deriniai taip pat skirtingi. Tai reiškia, kad priskyrimas yra *injektyvus* atvaizdis (arba *injekcija*). Kiekvienas trijų raidžių derinys buvo gautas iš atitinkamo dviejų raidžių derinio. Toks priskyrimas vadinamas *surjektyviu* atvaizdžiu (arba *surjekcija*). Jei atvaizdis iš vienos aibės į kitą yra injekcija ir surjekcija, tai tada jis vadinamas *bijekcija* (arba *bijektyviu* atvaizdžiu). Jei galima sukonstruoti bijekciją tarp dviejų baigtinių aibių, tai reiškia, kad jos turi vienodą elementų skaičių. Vadinasi, dviejų ir trijų iš penkių raidžių derinių yra tiek pat.

Bendrasis atvejis. Kiekvienam *k* iš *n* elementų deriniui priskirkime likusius *n*-*k* elementus, t.y. *n*-*k* elementų derinį (šitas sakinys ir yra pilnas uždavinio sprendimas!). Šis priskyrimas yra bijekcija (čia gurmanam). Vadinasi, *k* iš *n* elementų derinių ir *n*-*k* iš *n* elementų derinių yra tiek pat, t.y

$$C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0,1,2,...,n-1,n \ .$$

Atskirai galima aptarti atvejus $k = 0$ ir $k = n$. Deriniui, neturinčiam jokių elementų (tuščiajai aibei) priskiriame kas lieka – visus elementus, t.y. *n* elementų derinį. Ir atvirkščiai – deriniui, sudarytam iš visų *n* elementų priskiriam kas lieka, t.y. tuščią aibę (nieko neliko). Taigi kombinatoriškai įrodėme, kad $C_n^0 = C_n^n$. Mes nesinaudojome tuo, kad šie skaičiai lygūs vienetui (to ir nereikėjo).

b) Algebrinis įrodymas. Sakykime, $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} B_n^k x^k , \tag{10.1}$$

$$(1+x)^n = x^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n = x^n \sum_{i=0}^{n} B_n^i \left(\frac{1}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} B_n^i x^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} B_n^{n-k} x^k . \tag{10.2}$$

Priešpaskutinėje sumoje pakeitėme sumavimo kintamąjį *i*, pažymėdami $i = n-k$ (tada $n-i = k$). Káiriosios (10.1) ir (10.2) lygybių pusės yra lygios, todėl lygios ir dėšiniosios. Jei du polinomai yra lygūs su visomis kintamojo reikšmėmis, tai koeficientai prie atitinkamų *x* laipsnių turi būti lygūs (tai teiginys, kurį dar įrodysime, tačiau dabar reikia juo tikėti). Todėl

$$B_n^k = B_n^{n-k}, k = 0,1,...,n .$$

c) Indukcinis įrodymas.

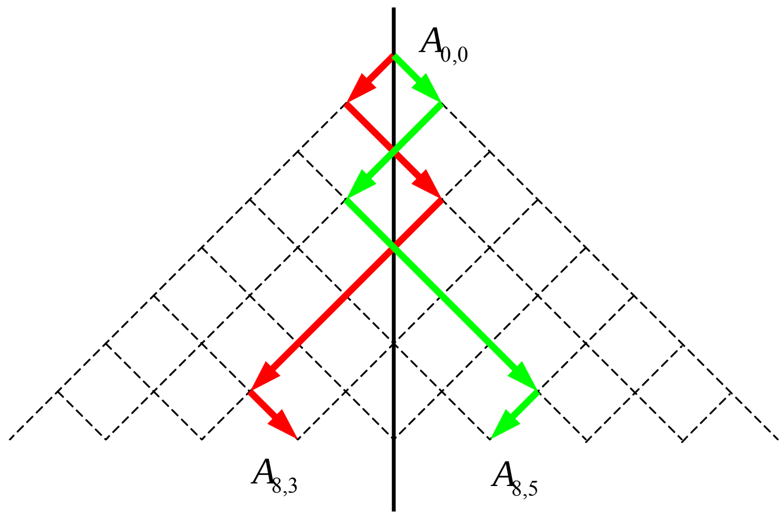
Bazė. $n = 1$. $P_1^0 = P_1^1$, nes pagal apibrėžimą $P_n^0 = P_n^n = 1, \forall n$.

Prielaida. $P_n^k = P_n^{n-k}$ kokiam nors $n, n > 1$, ir $\forall k, k = 0,1,...,n$.

Žingsnis. $P_{n+1}^0 = P_{n+1}^{n+1} = 1$. (apibrėžimas)

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{k} &= P_n^{k-1} + P_n^{k} && \text{(apibrėžimas, kai } k = 1,2,\dots,n\text{)} \\ &= P_n^{n-(k-1)} + P_n^{n-k} && \text{(prielaida)} \\ &= P_n^{(n-k)+1} + P_n^{n-k} && \text{(delikati indeksų aritmetika)} \\ &= P_{n+1}^{(n-k)+1} && \text{(apibrėžimas)} \\ &= P_{n+1}^{n+1-k}. && \text{(vėl indeksų arimetika)} \end{aligned}$$

d) Geometrinis įrodymas.



Taškai $A_{n,k}$ ir $A_{n,n-k}$ yra simetriški atžvilgiu tiesės, einančios per taškus $A_{0,0}$ ir $A_{2k,k}$. Kiekvienam keliui iš taško $A_{0,0}$ į $A_{n,k}$ (raudonam) galima sukonstruoti minėtos tiesės atžvilgiu simetrišką kelią (žalią). Simetriško kelio pabaiga bus taškas $A_{n,n-k}$. Siūlau įsitikinti, kad šis kelių iš taško $A_{0,0}$ į $A_{n,k}$ priskyrimas keliams iš $A_{0,0}$ į $A_{n,n-k}$ yra bijekcija. Vadinasi,

$$K_n^k = K_n^{n-k}, \forall n, \forall k = 0,1,\dots,n.$$

e) Aritmetinis įrodymas.

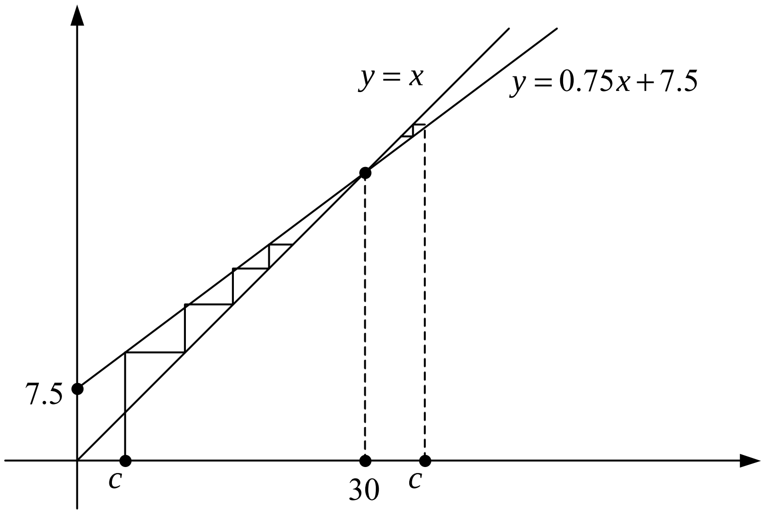
$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} && \text{(apibrėžimas)} \\ &= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1} && \text{(skaitiklį ir vardiklį dauginame iš } (n-k)!\text{)} \\ &= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{(n-k)!} && \text{(suprastiname iš } k!\text{)} \\ &= \binom{n}{n-k}. && \text{(apibrėžimas, } k+1 = n-(n-k)+1\text{)} \end{aligned}$$

Komentarai. Tai paragrafo 1.2 uždavinys 2. Jis galėjo ir turėjo būti sprendžiamas per pratybas, bet liko nesuprastas. Anketose dauguma iš jūsų skyrelį 1.2 laikė sunkiausiai suprantamu. Tikriausiai per anksti ir per didelė dozė buvo išgryninto mąstymo-įrodymo (kaip ir bet kokio kito gryno dalyko). Tačiau, tikrinant darbus, pasitaikydavo ir malonių akimirkų. Šiomis penkiomis miniatiūromis dar kartą bandžiau išaiškinti šio skyrelio filosofiją ir parodyti binominių koeficientų įvairiapusiškumą.

2. a)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (x_n + 10)\cdot 0.75 = 0.75x_n + 7.5, n = 0,1,...,\\ x_0 &= c. \end{aligned} \tag{10.3}$$

b) Nubrėžkime "voratinklį".



Tiesių $y = x$ ir $y = 0.75x + 7.5$ susikirtimo taško abscisė lygi $x = 30$. "Voratinklis" rodo, kad seka $\{x_n\}$ didėja, kai $0 < c < 30$, ir mažėja, kai $c > 30$.

Gauti analizinę sekos išraišką šį sykį sunkiau, negu lapkričio kontrolinio metu.

$$x_1 = \frac{3}{4}(x_0 + 10) = \frac{3}{4}(c + 10) = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}10,$$

$$x_2 = \frac{3}{4}(x_1 + 10) = \frac{3}{4}(\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}10 + 10) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 c + \left(\frac{3}{4}\right)^2 10 + \frac{3}{4}10,$$

...

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{3}{4}\right)^n c + \left(\frac{3}{4}\right)^n 10 + ... + \frac{3}{4}10 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n c + \frac{\frac{3}{4}10\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n c + 30\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \\ &= 30 + (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned} \tag{10.4}$$

Iš čia matyti, kad seka $\{x_n\}$ didėja, kai $0 < c < 30$, ir mažėja, kai $c > 30$. Šį įspūdį galima sustiprinti nagrinėjant skirtumus

$$x_{n+1} - x_n = (c - 30)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{30 - c}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c) Iš išraiškos (10.4) lengva apskaičiuoti ribą:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(30 + (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 30. \tag{10.5}$$

Ribą galima apskaičiuoti ir naudojantis rekurentine formule (10.3), prieš tai įsitikinus, kad seka aprėžta (monotoniškumas jau įrodytas). Jei pažymėsime $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tai

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= 0.75 \lim_{n\to\infty} x_n + 7.5,\\ a &= 0.75a + 7.5,\\ 0.25a &= 7.5,\\ a &= 30.\end{aligned}$$

d) Iš to, kad sekos riba yra 30, išplaukia, kad bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon > 0$, atsiras toks N, kad $n > N \Rightarrow 30 - \varepsilon < x_n < 30 + \varepsilon$. Paėmę $\varepsilon = 10$, gausime trokštamą rezultatą.

e)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 0.75 y_n + 10, n = 1, 2, ..., \\ y_1 &= c + 10. \end{aligned} \tag{10.6}$$

f) Įrodymas indukcija.

Bazė. $n = 1, y_1 = c + 10 < 40 + 10 = 50$.

Prielaida. Kažkokiam $n, n > 1, y_n < 50$.

Žingsnis. $y_{n+1} = 0.75 y_n + 10,$

$$< 0.75 \cdot 50 + 10 = 37.5 + 10 = 42.5 < 50.$$

Komentaras. Pagaliau atsirado žmogus, kuris padarė beveik viską, kas buvo prašyta!

3. Sprendimas, kokio aš norėjau.

$$\begin{aligned}
x_n(u) &= \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n && \text{(apibrėžimas)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^k && \text{(binomo formulė)}\\
&= 1 + n \cdot \frac{u}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{u}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{u}{n}\right)^n && \text{(tas pats binomas kitaip)}\\
&\geq 1 + u + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{u^2}{2} && \text{(sumažiname, kai } u \geq 0\text{)}\\
&= 1 + u + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{u^2}{2}. && \text{(suprastiname ir padaliname iš } n\text{)}
\end{aligned}$$

Pereiname prie ribos pastarojoje nelygybėje

$$\begin{aligned}
\exp(u) &= \lim_{n\to\infty} x_n(u) && \text{(eksponentės apibrėžimas)}\\
&\geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + u + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{u^2}{2}\right) && \text{(pereiname prie ribos nelygybėje)}\\
&= 1 + u + \frac{u^2}{2}. && \text{(surandame ribą)}
\end{aligned}$$

Buvo galima šį uždavinį spręsti ir kitaip – naudotis teiginiu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + ... + \frac{u^n}{n!}\right), \forall u, u \in \mathbb{R}. \tag{10.7}$$

Kai $n \geq 2$ ir $u \geq 0$, tai teisinga nelygybė

$$1+u+\frac{u^2}{2!}+...+\frac{u^n}{n!}\geq 1+u+\frac{u^2}{2!}. \qquad (10.8)$$

Pažymėkime kairiąją (10.8) nelygybės pusę $y_n(u)$ ir pereikime joje prie ribos, kai n neaprėžtai auga.

$$\exp(u)=\lim_{n\to\infty} y_n(u)\geq 1+u+\frac{u^2}{2}.$$

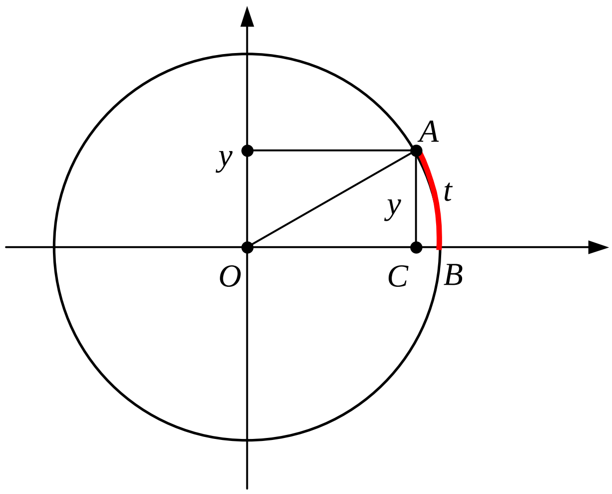
Komentaras. Antrasis sprendimo būdas man nelabai patiko, nes buvo naudojamasi visiškai netrivialiu teiginiu (lygybe 10.7), o ne tiesioginiu eksponentinės funkcijos apibrėžimu. Tačiau buvo sprendimų (ir ne vienas), kokių aš norėjau.

4. a) Funkcija $y=\sin t$ yra **tolydi** intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Bolcano-Koši teorema teigia, kad funkcija $y=\sin t$ įgyja bet kokią reikšmę iš intervalo $(-1;1)$. Reikšmes -1 ir 1 funkcija įgyja intervalo galuose.

b) Funkcija $y=\sin t$ yra **griežtai didėjanti** intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, nes $(\sin t)'=\cos t>0$, kai $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Todėl funkcija $y=\sin t$ kiekvieną reikšmę intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ įgyja tik vieną kartą.

c) Nubrėžiame vienetinį apskritimą.



Geometrinė sprendinio radimo procedūra:

- atidedame *y* reikšmę ordinačių ašyje;
- per tašką $(0;y)$ brėžiame tiesę, lygiagrečią abscisių ašiai iki susikirtimo su apskritimu (taške *A*);
- sujungiame tašką *A* su koordinačių pradžia; gauname kampą *AOB*, kurio dydis (matas) *t* yra lanko *AB* ilgis, o $\sin t=y$.

d) Iš (c) dalies matome, kad $\sin^{-1}(y)$ yra lanko *AB* ilgis *t* (lot. *arcus* – lankas). Todėl ir žymima $\sin^{-1}=\arcsin$.

e)

$$(\arcsin y)' = \arcsin'(y) = \left(\sin^{-1}\right)'(y)$$
$$= \frac{1}{\sin'(t)} = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (10.9)$$

Komentaras. Pirmoje lygybių (10.9) eilutėje yra trys skirtingi to paties dalyko žymėjimai.

- pirmasis $(\arcsin y)'$ - dažnai sutinkamas, nors nėra visiškai korektiškas;
- antrasis $\arcsin'(y)$ - absoliučiai korektiškas; jis žymi funkcijos $\arcsin$ išvestinę taške *y*;
- trečiasis $\left(\sin^{-1}\right)'(y)$ - taip pat korektiškas, nors nevisai įprastas; jis dažniausiai naudojamas išvestinės formulės išvedimo metu, kad būtų galima paraidžiui naudotis atvirkštinės funkcijos išvestinės teorema. Šis žymėjimas reikalauja tam tikros matematinės kultūros, kad nebūtų painiojami du labai skirtingi dalykai - atvirkštinė funkcija $\sin^{-1}(y)$ ir atvirkštinis skaičius $(\sin t)^{-1} = \dfrac{1}{\sin t}$ (egzamino metu tai įvykdavo gana dažnai). Argumentas (*t* ar *y*) turėtų padėti suprasti formulės prasmę. Beje, man nepatikdavo, kai paskutinėje dalyje atsirasdavo argumentas *x*. Brėžinys rodo, kad čia veikia trys argumentai *x*, *y* ir *t*, kurių kiekvienas turi savo geometrinę prasmę.

5. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = +\infty$.

b)

$\lim\limits_{y\uparrow b} g(y) = +\infty \Rightarrow$

$\forall E, E>0, \exists\delta, b>\delta>0,$ toks, kad $b-\delta < y < b \Rightarrow f(y) > E$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \Rightarrow$

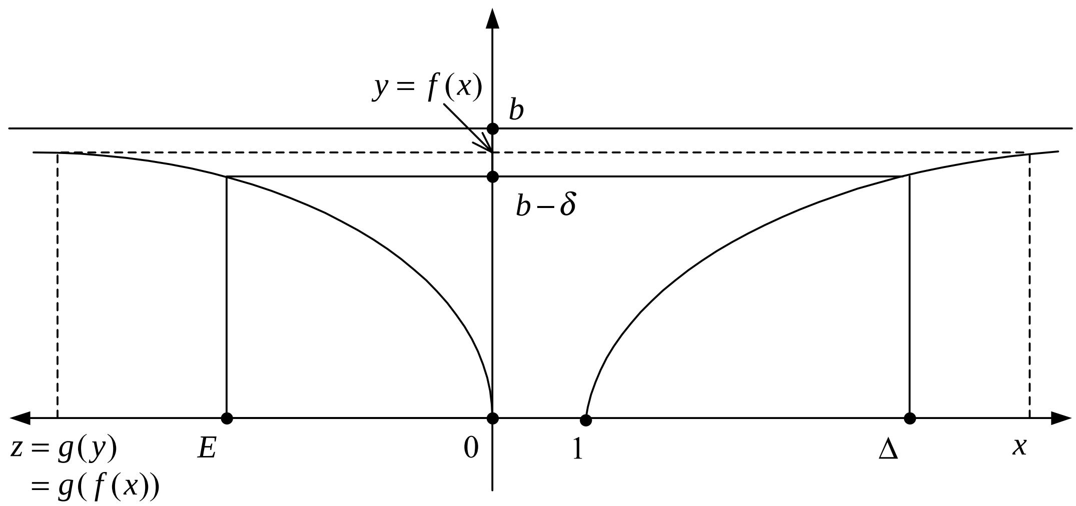
$\delta, \delta>0, \exists\Delta, \Delta>0,$ toks, kad $x>\Delta \Rightarrow b-\delta < f(x) < b+\delta$

$\Rightarrow$

$\forall E(E>0)\exists\Delta(\Delta>0)$ toks, kad $x>\Delta \Rightarrow g(f(x)) > E$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = +\infty$

c)



d)

$$y = f(x) = b\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

$$f(1) = 0, \lim_{x\to+\infty} b\left(1-\frac{1}{x}\right) = b,$$

Funkcija $y = f(x)$ didėjanti.

$$z = g(y) = \frac{y}{b-y},$$

$$g(0) = 0, \lim_{y\uparrow b} g(y) = +\infty.$$

Komentaras. Kas pastebi uždavinio sąlygoje netikslumą ir moka jį ištaisyti, gali pradėti antrąjį semestrą ne nuo nulio (tam jį ir palikau).

6. a) $D(f) = [0;+\infty)$.

b)

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1}\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-2}}{x-1} = +\infty,$$

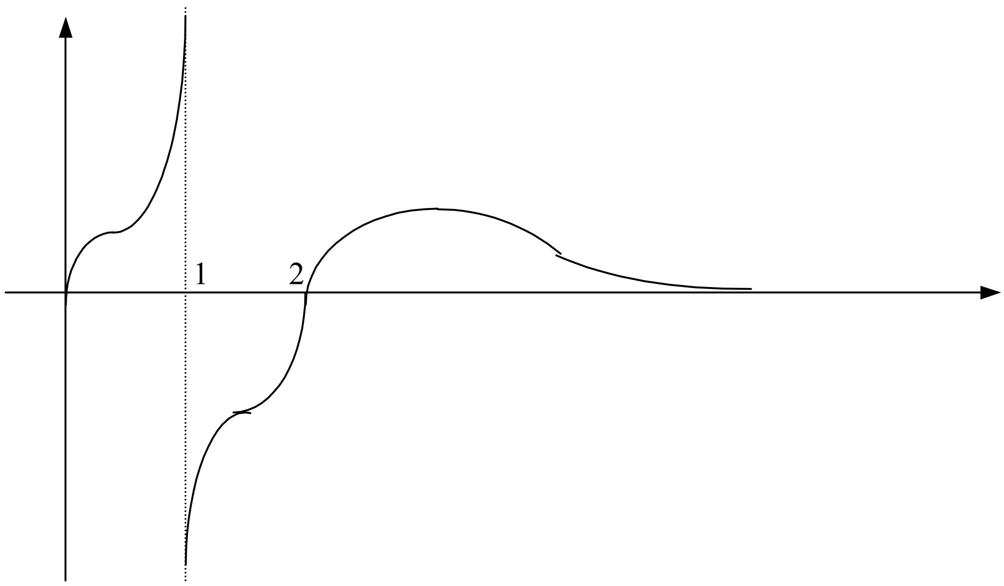
$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1}\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-2}}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Be to, $f(0) = 0, f(2) = 0.$



d) Iš apskaičiuotų funkcijos ribų ir funkcijos ženklo, kurį ji keičia taškuose $x=1, x=2$, galima spėti:

- Intervale $(0;1)$ funkcija turėtų didėti. Todėl čia $f'(x)>0$.
- $f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, kai $x>2$, funkcija yra teigiama,. Todėl funkcija kažkokiame taške, didesniame už 2, turėtų pasiekti maksimumą, kuriame išvestinė būtų lygi nuliui, iki to taško išvestinė teigiama, už jo – neigiama. Beje, patikrinkite, kad

$$f'(x)=\frac{(3-x)(x+2)}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-2)^2}(x-1)^2}. \tag{10.10}$$

e) Skirtumai:

- Apibrėžimo sritys, $D(g)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, $g(x)<0$, kai $x<0$.
- $g(x)>0$, kai $x>0$. Todėl ir riba $\lim\limits_{x\downarrow 1} g(x)=+\infty$.

Panašumai:

- $f(0)=g(0)=0,$
  $f(2)=g(2)=0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$
- Abi funkcijos intervale $[2;+\infty)$ įgyja maksimumą tame pačiame taške.
- $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\uparrow 1} g(x)=+\infty$. Funkcijų grafikai intervale $(0;1)$ panašūs.

Suskaičiuokite:

$$g'(x)=\frac{x^2(x-2)(3-x)(x+2)}{(x-1)^7}. \tag{10.11}$$

Abiejų funkcjų išvestinių palyginimas parodytų, kad grafikų liestinės, kai $x=0, x=2$ taip pat iš esmės skirtųsi.
Komentaras. Funkcijos grafikas yra sudurstytas iš gabalų. Todėl kai kurios dalys gali glodžiai nesusieiti.

7. a) Funkcijos $f(x)=x^3-c$ grafiko liestinės lygtis taške $(x_0; f(x_0))$

$$\begin{aligned} y &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \\ &= x_0^3-c+3x_0^2(x-x_0) \end{aligned}$$

Ieškome liestinės ir abscisės susikirtimo taško.

$$x_0^3-c+3x_0^2(x-x_0)=0,$$

$$3x_0^2x=2x_0^3+c,$$

$$x=\frac{1}{3}\left(2x_0+\frac{c}{x_0^2}\right).$$

Gautą reikšmę pažymime x_1. Ir t.t., jei turime reikšmę x_n, tai sekantį sekos narį apibrėžiame

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{c}{x_n^2}\right). \tag{10.12}$$

b) ir c)

$$g'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{c}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{2c}{x^3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{c}{x^3}\right)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 - c}{x^3}.$$

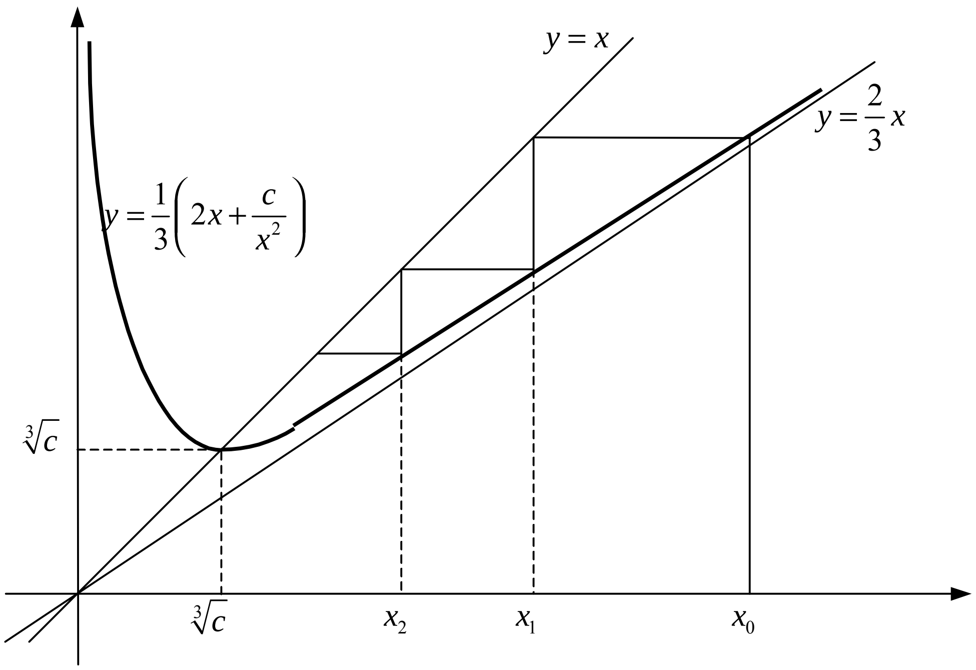
Išvestinė lygi nuliui taške $x = \sqrt[3]{c}$.

Jei $0 < x < \sqrt[3]{c}$, tai $g'(x) < 0$ ir funkcija mažėja,

jei $x > \sqrt[3]{c}$, tai $g'(x) > 0$ ir funkcija didėja.

Vadinasi, taškas $x = \sqrt[3]{c}$ yra lokalaus minimumo taškas ir

$$g\left(\sqrt[3]{c}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt[3]{c} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^2}}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c}\right) = \sqrt[3]{c}$$



d) Pats paprasčiausias įrodymas išplaukia iš dalies (b). Funkcijos g mažiausia reikšmė intervale $(0;+\infty)$ yra $\sqrt[3]{c}$. Pradinis sekos narys $x_0 > \sqrt[3]{c}$ (indukcijos bazė). Jei $x_n > \sqrt[3]{c}$ (indukcijos prielaida), tai ir $x_{n+1} = g(x_n) > \sqrt[3]{c}$ (indukcijos žingsnis).

Tai galima įrodyti ir nesinaudojant funkcijos g savybėmis. Tačiau reikėtų žinoti klasikinę geometrinio ir aritmetinio vidurkių nelygybę:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{10.13}$$

čia $a_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$. Lygybė būna tik tada, kai visi skaičiai yra lygūs. Yra labai daug būdų šią nelygybę įrodyti. Ateityje mes taip pat ją įrodysime. Šįkart pasinaudosime nelygybe (10.13), kai $n = 3$. Koks x_n teigiamas bebūtų, teisinga

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{c}{x_n^2}\right) \qquad \text{(apibrėžimas)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{c}{x_n^2}\right) \qquad \text{(reikia matyti aritmetinį vidurkį)}$$

$$\geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{c}{x_n^2}} \qquad \text{(aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybė)}$$

$$= \sqrt[3]{c} \qquad \text{(labai sudėtingi veiksmai su laipsniais)}$$

e) Lagranžo teorema tvirtina, kad

$$x_{k+1} - x_k = g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\theta)(x_k - x_{k-1}),$$

čia θ – kažkoks taškas tarp x_k ir x_{k-1}. Išvestinę jau esame suskaičiavę. Todėl

$$x_{k+1} - x_k = g'(\theta)(x_k - x_{k-1}) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{c}{\theta^3}\right)(x_k - x_{k-1}). \tag{10.14}$$

Įrodėme, kad $\forall k, x_k \geq \sqrt[3]{c}$. Todėl ir bet koks skaičius θ, esantis tarp gretimų sekos narių irgi tenkins nelygybę $\theta \geq \sqrt[3]{c}$ arba $\theta^3 \geq c$. Vadinasi, visada $0 < 1 - \frac{c}{\theta^3} < 1$. Iš to išplaukia

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= \frac{2}{3}\left|1 - \frac{c}{\theta^3}\right| \cdot |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot |x_k - x_{k-1}| \end{aligned} \tag{10.15}$$

Šį įvertį galime gauti ir be Lagranžo teoremos, atlikdami analogiškus veiksmus, kuriuos darėme kvadratinės šaknies algoritmo skyriuje.

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{c}{x_k^2}\right) - \frac{1}{3}\left(2x_{k-1} + \frac{c}{x_{k-1}^2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2x_k - 2x_{k-1} + \frac{c}{x_k^2} - \frac{c}{x_{k-1}^2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(x_k - x_{k-1} + \frac{c\left(x_{k-1}^2 - x_k^2\right)}{2x_k^2 x_{k-1}^2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\left(x_k - x_{k-1}\right) + \frac{c\left(x_k - x_{k-1}\right)\left(x_k + x_{k-1}\right)}{2x_k^2 x_{k-1}^2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\left(x_k - x_{k-1}\right)\left(1 - \frac{c\left(x_k + x_{k-1}\right)}{2x_k^2 x_{k-1}^2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\left(x_k - x_{k-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_k x_{k-1}^2} + \frac{c}{x_k^2 x_{k-1}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad

$$\sqrt[3]{c} < x_k \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{c}}{x_k} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{c^2}}{x_k^2} < 1$$

Todėl

$$\frac{c}{x_k x_{k-1}^2} = \frac{\sqrt[3]{c}}{x_k} \cdot \frac{\sqrt[3]{c^2}}{x_{k-1}^2} < 1 \cdot 1 = 1 .$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_k x_{k-1}^2} + \frac{c}{x_k^2 x_{k-1}} \right) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

(analogiškai įvertinamas ir antrasis dėmuo). Vadinasi,

$$0 < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_k x_{k-1}^2} + \frac{c}{x_k^2 x_{k-1}} \right) < 1$$

Tai reiškia, kad teisingas įvertis

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| \le \frac{2}{3} \cdot \left| x_k - x_{k-1} \right| .$$

f) Iš įverčio (10.15), gauto dalyje (e) išplaukia, kad seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą. Todėl seka konverguoja. Įrodykime tai.

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| \le \frac{2}{3} \cdot \left| x_k - x_{k-1} \right| \le \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left| x_{k-1} - x_{k-2} \right| \le \ldots \le \left(\frac{2}{3} \right)^k \left| x_1 - x_0 \right| . \qquad (10.16)$$

Tada

$$\begin{aligned}
\left| x_{n+p} - x_n \right| &= \left| \sum_{k=1}^{p} (x_{n+k} - x_{n+k-1}) \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{p} \left| x_{n+k} - x_{n+k-1} \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+k-1} \left| x_1 - x_0 \right| \\
&= \left(\frac{2}{3} \right)^n \left| x_1 - x_0 \right| \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{2}{3} \right)^n \left| x_1 - x_0 \right| \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^p}{1 - \frac{2}{3}} \\
&< \left(\frac{2}{3} \right)^n \left| x_1 - x_0 \right| \cdot 3
\end{aligned}$$

Paskutinysis įvertis neprikaluso nuo p ir gali būti kiek norint mažas. Todėl seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą.

g) Kadangi seka $\{x_n\}$ konverguoja (išplaukia iš Koši kriterijaus), tai pažymėkime ribą

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ir pereikime prie ribos pagrindinėje lygybėje (10.12)

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2 \lim_{n\to\infty} x_n + \frac{c}{\lim_{n\to\infty} x_n^2} \right),$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(2\alpha + \frac{c}{\alpha^2} \right),$$

$$\alpha = \sqrt[3]{c}.$$