**MATEMATINĖS ANALIZĖS EGZAMINAS**
**2002.01.08**

1. Naudodamiesi tik apibrėžimais, bet nesinaudodami skaičių tarpusavio lygybe, įrodykite binominių koeficientų simetriškumo savybę $\forall n, k = 0,1,...,n$

$C_n^k = C_n^{n-k}, B_n^k = B_n^{n-k}, P_n^k = P_n^{n-k}, K_n^k = K_n^{n-k}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (po 2 t)

2. Jurgita kiekvieną šeštadienį kambarinę gėlę patręšia 10 g biotrąšų. Yra žinoma, kad trąšų kiekis vazone per savaitę sumažėja apie 25%.
   a) Tarkime, kad trąšų kiekis vazone prieš pat pirmą tręšimą buvo $c$ g, $0 < c < 40$. Parašykite formulę, nusakančią trąšų kiekį kiekvienos savaitės pabaigoje prieš pat naują tręšimą. (1 t)
   b) Ištirkite (geometriškai ir analiziškai) sekos, gautos dalyje (a) monotoniškumą ir aprėžtumą. (4 t)
   c) Apskaičiuokite sekos iš (a) ir (b) ribą. (1 t)
   d) Biotrąšos veikia efektyviai tik tada, kai jų kiekis vazone iki kito tręšimo momento visą laiką yra didesnis nei 20 g. Įrodykite, kad kada nors (nesvarbu po kelių tręšimų) tokiu būdu tręšiant gėlę trąšos ims veikti efektyviai visą laiką. (1 t)
   e) Parašykite formulę, pagal kurią galima būtų apskaičiuoti trąšų kiekį vazone po kiekvieno patręšimo? (1 t)
   f) Kai biotrąšų kiekis viršija 50 g, gėlė ima džiūti dėl per didelio trąšų kiekio. Įrodykite, kad Jurgita gali ir toliau taip tręšti jos prižiūrimą gėlę (kad nenudžiūtų). (1 t)

3. Naudodamiesi eksponentinės funkcijos apibrėžimu, įrodykite nelygybę

   $e^u \geq 1 + u + \frac{u^2}{2}, u \geq 0$. (5 t)

4. Sakykime, $-1 \leq y \leq 1$.
   a) Kodėl lygtis $y = \sin t$ turi sprendinį $t$, priklausantį intervalui $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$? (1 t)
   b) Kodėl tas sprendinys vienintelis? (1 t)
   c) Paaiškinkite $t$ ir $y$ geometrines prasmes, taip pat lygties sprendinio geometrinę suradimo procedūrą. (2 t)
   d) Kodėl atvirkštinė funkcija $t = \sin^{-1} y = \arcsin y$ vadinama arksinusu? (1 t)
   e) Apskaičiuokite atvirkštinės funkcijos $t = \arcsin y$ išvestinę. (2 t)

5. Duota didėjanti funkcija $y = f(x), x \in [1; +\infty)$, $f(1) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b, b > 0$, ir funkcija $z = g(y), y \in [0; b)$, $g(0) = 0, \lim\limits_{y \uparrow b} g(y) = +\infty$.
   a) Kam lygi riba $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x))$? (1 t)
   b) Įrodykite tai, naudodami nelygybių kalbą. (3 t)
   c) Pavaizduokite tai geometriškai viename brėžinyje. (2 t)
   d) Sugalvokite po vieną funkcijų $y = f(x), z = g(y)$, tenkinančių užduoties sąlygas, pavyzdį (užrašykite konkrečią analizinę išraišką). (4 t)

6. Duota funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x-2}}{x-1}$.
   a) Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį. (1 t)
   b) Kokias ribas reikėtų apskaičiuoti, norint nubrėžti funkcijos grafiką? Suraskite jas. (3 t)
   c) Nubrėžkite funkcijos grafiko eskizą, neskaičiuodami išvestinės. (2 t)
   d) Kokių funkcijos išvestinės (jos neskaičiuokite) savybių reikia tikėtis? (2 t)
   e) Kaip atrodytų funkcijos $g(x) = \left(f(x)\right)^6 = \dfrac{x^3(x-2)^2}{(x-1)^6}$ grafiko eskizas? Kokie pagrindiniai funkcijų $f$ ir $g$ grafikų skirtumai ir panašumai? (3 t)

7. Kubinės šaknies iš skaičiaus $c, c > 0$, algoritmas.
   a) Paimkite $x_0, x_0^3 > c$. Naudodami Niutono liestinų algoritmą lygčiai
   $$x^3 - c = 0$$
   spręsti, raskite seką
   $$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{c}{x_n^2}\right), n = 0, 1, \ldots .$$ (2 t)
   b) Apskaičiuokite funkcijos $g(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{c}{x^2}\right)$ išvestinę, suraskite funkcijos ekstremumus (kai $x > 0$) ir nubrėžkite grafiką. (3 t)
   c) Nubrėžkite sekos $\{x_n\}$ “voratinklį”. (1 t)
   d) Įrodykite, kad $\forall n, x_n \geq \sqrt[3]{c}$. (1 t)
   e) Naudodami Lagranžo teoremą gaukite įvertį
   $$|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{2}{3}|x_k - x_{k-1}|, \forall k, k = 1, 2, \ldots$$ (3 t)
   f) Kas išplaukia iš dalyje (e) gauto įverčio? Pagrįskite tai. (3 t)
   g) Suraskite sekos $\{x_n\}$ ribą. (1 t)

Paruošė R.Kudžma