## 8. TIESINĖS TRANSFORMACIJOS

Vektorinės erdvės $V$ virš kūno $K$ transformacija $f$ vadinama *tiesine*, kai su kiekviena tos erdvės vektorių pora $\alpha, \beta$ ir su kiekviena skaliarų pora $a, b$ yra teisinga lygybė

$$f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta).$$

Pasirinkę erdvės $V$ bazę $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, išreiškiame vektorius $f(\alpha_i)$ bazės vektorių tiesine kombinacija:

$$f(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \quad (i = \overline{1, n}\,).$$

Iš tų išraiškų koeficientų sudaryta matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinama tiesinės transformacijos $f$ *matrica bazėje* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

**1 teorema.** *Tarp vektorinės erdvės $V$ virš kūno $K$ tiesinių transformacijų aibės ir matricų aibės $K_{n\times n}$ galima apibrėžti bijekciją.*

Kvadratinė kūno $K$ elementų matrica $A$ vadinama panašia į kvadratinę to paties kūno elementų matricą $B$, kai galima rasti kūno $K$ elementų matricą $T$, tenkinančią lygybę $B = TAT^{-1}$. Matrica $T$ vadinama *matricų $A$ ir $B$ panašumo matrica.*

**2 teorema.** *Tiesinės transformacijos $f$ matricos dviejose bazėse yra panašios.*

*Tiesinės transformacijos $f$ rangu* $r(f)$ vadinamas jos matricos rangas.

Vektorinės erdvės $V$ tiesinių transformacijų $f$ ir $g$ *suma* vadinama tos erdvės transformacija $f + g$, apibrėžta lygybe

$$(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \quad (\forall \alpha \in V).$$

**3 teorema.** 1) *Tiesinių transformacijų suma yra tiesinė transformacija*;
2) *tiesinių transformacijų sumos matrica bet kokioje bazėje lygi tų transformacijų matricų toje pačioje bazėje sumai.*

Vektorinės erdvės $V$ tiesinių transformacijų $f$ ir $g$ *sandauga* vadinama tos erdvės transformacija $fg$, apibrėžta lygybe

$$(fg)(\alpha) = f(g(\alpha)) \quad (\forall \alpha \in V).$$

**4 teorema.** 1) *Tiesinių transformacijų sandauga yra tiesinė transformacija*;

2) *tiesinių transformacijų sandaugos matrica bet kokioje bazėje lygi tų transformacijų matricų toje pačioje bazėje sandaugai.*

Vektorinės erdvės $V$ virš kūno $K$ tiesinės transformacijos $f$ ir skaliaro $a$ sandauga vadinama tos erdvės transformacija $af$, apibrėžta lygybe

$$(af)(\alpha) = af(\alpha) \quad (\forall \alpha \in V).$$

**5 teorema.** 1) *Tiesinės transformacijos ir skaliaro sandauga yra tiesinė transformacija*;

2) *tiesinės transformacijos $f$ ir skaliaro $a$ sandaugos matrica bet kokioje bazėje lygi tos transformacijos matricos toje pačioje bazėje ir skaliaro $a$ sandaugai.*

Vektorinės erdvės $V$ tiesinės transformacijos $f$ *vaizdu* vadinamas tos erdvės poaibis $\mathrm{Im} f$, kurį sudaro visų erdvės vektorių vaizdai.

**6 teorema.** *Tiesinės transformacijos $f$ vaizdas yra vektorinės erdvės poerdvis. Poerdvio* $\mathrm{Im} f$ *dimensija lygi transformacijos $f$ rangui.*

Vektorinės erdvės $V$ tiesinės transformacijos $f$ *branduoliu* vadinama aibė $\mathrm{Ker} f$ tos erdvės vektorių, atvaizduojamų transformacija $f$ į nulinį vektorių.

**7 teorema.** *Tiesinės transformacijos branduolys yra vektorinės erdvės poerdvis.*

Tiesinės transformacijos $f$ branduolio dimensija vadinama tos *transformacijos defektu* ir žymima $\mathrm{def} f$.

**8 teorema.** *Tiesinės transformacijos rango ir defekto suma lygi vektorinės erdvės dimensijai.*

Vektorinės erdvės poerdvis $L$ vadinamas $f$-invariantiniu (invariantiniu) tos erdvės tiesinės transformacijos $f$ atžvilgiu, kai kiekvieno jo vektoriaus $\alpha$ vaizdas $f(\alpha)$ priklauso poerdviui $L$.

**9 teorema.** *Vektorinės erdvės tiesinės transformacijos $f$ branduolys ir vaizdas yra $f$-invariantiniai poerdviai.*

*Langeliais trikampe matrica* vadinama $n$-osios eilės kvadratinė matrica $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$; čia $A$ yra $k$-osios eilės $(1 \le k \le n-1)$, $B$ – $(n-k)$-osios eilės kvadratinės matricos, $O$-nulinė $k \times (n-k)$ matrica, $C$ – bet kokia $(n-k) \times k$ matrica.

Langeliais trikampė matrica, kai matrica $C$ yra nulinė, vadinama *langeliais diagonaline matrica.*

**10 teorema.** *Jei vektorinė erdvė $V$ lygi dviejų tiesioginių poerdvių $L_1$ ir $L_2$, invariantinių tos erdvės tiesinės transformacijos $f$ atžvilgiu, tiesioginei sumai, tai tos transformacijos matricai galima suteikti langeliais diagonalinę formą.*

## PAVYZDŽIAI

1. Tiesinės transformacijos $f$ matrica bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rasime tos transformacijos matricą bazėje $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = -2\alpha_1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3$. Sudarę bazės keitimo matricą

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

randame jai atvirkštinę matricą

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 7 \\ -8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Po to skaičiuojame transformacijos $f$ matricą $B$ bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -2 & 7 \\ -8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 41 & -3 & 15 \\ -48 & 3 & -18 \\ -125 & 9 & -46 \end{pmatrix}.$$

2. Aritmetinės erdvės $R^3$ tiesinės transformacijos $f$ matrica bazėje $\alpha_1 = (1, 1, -1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)$, $\alpha_3 = (-2, 3, -4)$ yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

o tiesinės transformacijos $g$ matrica bazėje $\beta_1 = (11, -2, 16)$, $\beta_2 = (-18, 2, -25)$, $\beta_3 = (28, -5, 42)$ yra

$$B = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 4 \\ 20 & 15 & 5 \\ -47 & -23 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rasime transformacijų sumos $f + g$ matricą bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Pirmiausia apskaičiuojame transformacijos $f$ matricą bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Tuo tikslu randame bazės $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ keitimo baze $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ matricą $T$. Pažymėję

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix},$$

iš bazės keitimo matricos apibrėžimo gauname

$$\begin{aligned}\beta_1 &= t_{11}\alpha_1 + t_{12}\alpha_2 + t_{13}\alpha_3,\\ \beta_2 &= t_{21}\alpha_1 + t_{22}\alpha_2 + t_{23}\alpha_3,\\ \beta_3 &= t_{31}\alpha_1 + t_{32}\alpha_2 + t_{33}\alpha_3.\end{aligned}$$

Įrašę vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ir $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ išraiškas ir atlikę veiksmus, gauname tris tiesinių lygčių sistemas

$$\begin{cases} t_{11} + 2t_{12} - 2t_{13} = 11,\\ t_{11} + t_{12} + 3t_{13} = -2,\\ -t_{11} + 3t_{12} - 4t_{13} = 16; \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{21} + 2t_{22} - 2t_{23} = -18,\\ t_{21} + t_{22} + 3t_{23} = 2,\\ -t_{21} + 3t_{22} - 4t_{23} = -25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{31} + 2t_{32} - 2t_{33} = 28,\\ t_{31} + t_{32} + 3t_{33} = -5,\\ -t_{31} + 3t_{32} - 4t_{33} = 42. \end{cases}$$

Išsprendę šias sistemas, užrašome keitimo matricą

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ -2 & -5 & 3\\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Randame šiai matricai atvirkštinę

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -4 & -1 & 1\\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabar jau galime sudaryti transformacijos $f$ matricą $B_1$ bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ -2 & -5 & 3\\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -4 & -1 & 1\\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 10 & 0\\ -16 & -12 & -2\\ 54 & 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Todėl transformacijos $f + g$ matrica bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yra

$$B_1 + B = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 0\\ -16 & -12 & -2\\ 54 & 29 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -6 & 4\\ 20 & 15 & 5\\ -47 & -23 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4\\ 4 & 3 & 3\\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Rasime aritmetinės erdvės $R^3$ tiesinės transformacijos $f(\alpha) = (a_1 + a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2 + a_3, -2a_1 - 3a_2 - 5a_3)$, $\big(\alpha = (a_1, a_2, a_3)\big)$, vaizdo ir branduolio bazes.

Pažymėję $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$, sudarome $\mathrm{Im} f = L\big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\big)$. Vadinasi, tiesinio apvalko $L\big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\big)$ bazė yra ir vaizdo bazė. Apskaičiavę $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$, gauname $\mathrm{Im} f = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; čia $\alpha_1 = (1, 2, -2)$, $\alpha_2 = (1, -1 - 3)$, $\alpha_3 = (2, 1, -5)$. Pastarosios sistemos rangas lygus 2, ir bazę sudaro, pavyzdžiui, vektoriai $\alpha_1$ ir $\alpha_2$. Branduolio dimensija lygi 1, taigi pakanka rasti bent vieną nenulinį branduolio vektorių. Tuo tikslu sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0, \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 0, \\ -2a_1 - 3a_2 - 5a_3 = 0. \end{cases}$$

Šios lygčių sistemos fundamentalioji sprendinių sistema ir sudaro branduolio bazę. Viena iš bazių yra, pavyzdžiui, vektorius $\beta = (-1, -1, 1)$.

## UŽDAVINIAI

8.1. Kurios iš nurodytųjų aritmetinės erdvės $R^3$ transformacijų yra tiesinės:

1) $f(\alpha) = 2\alpha \quad (\forall \alpha \in R^3)$;
2) $f(\alpha) = \alpha + (1, 1, 1)$;
3) $f(\alpha) = <\alpha, \alpha>$;
4) $f(\alpha) = (a_1, a_2, a_3 + 2) \quad \big(\alpha = (a_1, a_2, a_3)\big)$;
5) $f(\alpha) = (a_1^2, a_2, a_3)$;
6) $f(\alpha) = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1)$;
7) $f(\alpha) = (3a_1 - a_2 - 2a_3, 2a_1 + a_2 + a_3, a_1 + 2a_2 - a_3)$.

8.2. Kurios iš nurodytųjų ne aukštesnio kaip $n$-ojo laipsnio polinomų erdvės $R_n[t]$ transformacijų yra tiesinės:

1) $f\big(\varphi(t)\big) = \varphi(t - 1) \quad \big(\forall \varphi(t) \in R_n[t]\big)$;
2) $f\big(\varphi(t)\big) = \varphi(t^3)$;
3) $f\big(\varphi(t)\big) = \varphi'(t)$;
4) $f\big(\varphi(t)\big) = \varphi(t + 2) - \varphi(t + 1)$;
5) $f\big(\varphi(t)\big) = t^2\varphi(t)$.

8.3. Raskite tiesinę transformaciją $f$, kuria aritmetinės erdvės $R^3$ bazės vektoriai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ keičiami vektorių sistema $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

1) $\alpha_1 = (1, 2, -1)$, $\quad \beta_1 = (-3, 3, 4)$,
$\alpha_2 = (2, 1, -1)$, $\quad \beta_2 = (-8, -4, 10)$,
$\alpha_3 = (-1, 1, 2)$, $\quad \beta_3 = (5, 7, -2)$;

2) $\alpha_1 = (3, -5, 1)$, $\quad \beta_1 = (7, -4, -11)$,
$\alpha_2 = (2, 3, 4)$, $\quad \beta_2 = (13, -6, 1)$,
$\alpha_3 = (-1, -3, 3)$, $\quad \beta_3 = (13, 5, 1)$.

8.4. Aritmetinės erdvės $R^3$ tiesinės transformacijos $f$ matrica bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yra $A$. Raskite tos transformacijos matricą $B$ bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3, \\ \beta_2 &= -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3, \\ \beta_3 &= -3\alpha_1 + 6\alpha_2 - 5\alpha_3; \end{aligned}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 3\alpha_1 - 21\alpha_2 + 7\alpha_3, \\ \beta_2 &= 2\alpha_1 - 13\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_3 &= 2\alpha_1 - 14\alpha_2 + 5\alpha_3; \end{aligned}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (2, 1, -3), & \beta_1 &= (2, -5, -9), \\ \alpha_2 &= (1, -4, 1), & \beta_2 &= (9, -15, 16), \\ \alpha_3 &= (4, -1, 5), & \beta_3 &= (0, 3, 17); \end{aligned}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (2, 4, -1), & \beta_1 &= (-4, 0, -4), \\ \alpha_2 &= (-7, 1, 3), & \beta_2 &= (11, 12, -15), \\ \alpha_3 &= (1, -1, 5), & \beta_3 &= (-6, 1, -8). \end{aligned}$$

8.5. Įrodykite, kad matricų $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(\forall a, b, c, d \in Q)$ daugyba iš kairės iš matricos $A$ yra vektorinės erdvės $Q_{2\times 2}$ virš kūno $Q$ tiesinė transformacija ir raskite tos transformacijos matricą bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

8.6. Aritmetinės $R^3$ erdvės tiesinės transformacijos $f$ matrica bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yra $A$, o transformacijos $g$ matrica bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yra $B$. Raskite transformacijos $gf$ bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = (3, -1, 2), \\ \alpha_2 = (1, 2, 2), \\ \alpha_3 = (-2, 3, 4), \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \beta_1 = (11, -6, -6), \\ \beta_2 = (17, -8, -6), \\ \beta_3 = (9, -3, -2); \end{array}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, -1, 2), \\ \alpha_2 = (2, -1, 3), \\ \alpha_3 = (3, 3, 1), \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \beta_1 = (11, -3, 15), \\ \beta_2 = (11, 2, 11), \\ \beta_3 = (15, 4, 14); \end{array}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, -1, 2), \\ \alpha_2 = (2, 1, -1), \\ \alpha_3 = (2, 2, 3), \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \beta_1 = (9, 2, 11), \\ \beta_2 = (-1, 0, -6), \\ \beta_3 = (3, 1, 5); \end{array}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = (2, 1, -3), \\ \alpha_2 = (-4, 2, 1), \\ \alpha_3 = (1, 0, 3), \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \beta_1 = (5, -1, -7), \\ \beta_2 = (-5, 2, -2), \\ \beta_3 = (11, -2, -11). \end{array}$$

8.7. Aritmetinės erdvės $R^n$ tiesinės transformacijos $f$ matrica bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yra $A$, o transformacijos $g$ matrica bazėje $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yra $B$. Raskite transformacijos $f + g$ matricą bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 62 & -20 & -60 \\ 189 & -45 & -180 \\ 16 & -5 & -14 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (9, -2, 7), \\ \alpha_2 &= (5, 10, 11), \\ \alpha_3 &= (8, -5, 4), \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= (1, -1, 3), \\ \beta_2 &= (2, 1, 2), \\ \beta_3 &= (-1, -3, -3); \end{aligned}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 20 & -50 \\ -5 & -5 & 5 \\ 40 & 20 & -50 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (4, -3, 3), \\ \alpha_2 &= (1, 1, 6), \\ \alpha_3 &= (4, -2, 5), \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= (2, 1, 3), \\ \beta_2 &= (1, -1, 2), \\ \beta_3 &= (0, 1, 2); \end{aligned}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} -41 & 17 & -33 \\ -14 & -13 & -17 \\ 30 & -13 & 38 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (28, 3, -10), \\ \alpha_2 &= (8, 5, -12), \\ \alpha_3 &= (-21, -1, 5), \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= (2, 1, -4), \\ \beta_2 &= (-1, 2, -3), \\ \beta_3 &= (5, 1, -1); \end{aligned}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 1 & 17 \\ 210 & 40 & -150 \\ 30 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= (-11, 1, 10), \\ \alpha_2 &= (-1, 2, 3), \\ \alpha_3 &= (-18, 2, 17), \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= (1, -1, 0), \\ \beta_2 &= (-2, 1, 2), \\ \beta_3 &= (4, 0, -3). \end{aligned}$$

8.8. Apskaičiuokite aritmetinės erdvės $R^n$ tiesinės transformacijos $f$, apibrėžtos matrica $A$, rangą ir defektą, kai:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8.9. Raskite aritmetinės erdvės $R^n$ tiesinės transformacijos $f$ vaizdo ir branduolio bazes, kai:

1) $f(\alpha) = (2a_1 - a_2 - a_3,\ a_1 + a_2 + a_3,\ 4a_1 + a_2 + a_3)\ \big(\alpha = (a_1, a_2, a_3)\big)$;

2) $f(\alpha) = (a_1 - a_2 + a_3,\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3,\ -2a_1 + 2a_2 - 2a_3)$;

3) $f(\alpha) = (a_1 - a_2 - a_3 - a_4,\ 3a_1 - 2a_2 + 3a_4,\ a_2 + a_3 - 3a_4,$
$a_1 + a_2 - 2a_3 + 2a_4)\ \ \big(\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)\big)$;

4) $f(\alpha) = (a_1 + a_2 - a_3 - 2a_4,\ 2a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ 5a_1 - a_2 + 3a_3,$
$-4a_1 + 5a_2 - 8a_3 - 7a_4)$.

## ATSAKYMAI

8.1. 1) Tiesinė; 2) ne; 3) neapibrėžta transformacija;
4) ne; 5) ne; 6) tiesinė; 7) tiesinė.

8.2. 1) Tiesinė; 2) ne; 3) tiesinė; 4) tiesinė; 5) ne.

8.3.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

8.4.

1) $B = \begin{pmatrix} -150 & -70 & 120 \\ -119 & -52 & 93 \\ -259 & -119 & 206 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} -162 & 30 & 215 \\ -9 & 5 & 9 \\ -127 & 23 & 169 \end{pmatrix}$;

3) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 144 & -27 & 104 \\ 33 & -7 & 31 \end{pmatrix}$; 4) $B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & -52 \\ -88 & 3 & 51 \\ 142 & 7 & -84 \end{pmatrix}$.

8.5.

$$1)\ B=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&0&1\\-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix};\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\-7&10&-14&7\\2&0&-3&0\\17&-17&17&-12\end{pmatrix};$$

$$3)\ B=\begin{pmatrix}4&0&-1&-1\\2&2&-1&1\\3&1&1&-2\\1&-1&0&3\end{pmatrix};\quad 4)\ B=\begin{pmatrix}4&0&-2&-2\\0&2&0&-2\\4&-2&0&-2\\0&2&0&2\end{pmatrix}.$$

8.6.

$$1)\ \begin{pmatrix}-43&0&61\\-77&-12&115\\-49&-13&76\end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix}-9&24&-9\\-2&22&-4\\-1&27&-4\end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix}3&2&4\\4&10&2\\1&2&8\end{pmatrix};\qquad 4)\ \begin{pmatrix}-5&5&-5\\-36&31&-41\\5&-3&7\end{pmatrix}.$$

8.7.

$$1)\ \begin{pmatrix}-3&3&3\\-8&6&6\\3&5&0\end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix}-4&-2&13\\4&1&-6\\-4&3&1\end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix}-9&2&4\\4&-5&6\\3&1&7\end{pmatrix};\qquad 4)\ \begin{pmatrix}4&5&4\\-9&7&-13\\8&2&4\end{pmatrix}.$$

8.8. 1) $r=1,\ \mathrm{def}=1$; 2) $r=3,\ \mathrm{def}=0$;
3) $r=2,\ \mathrm{def}=2$; 4) $r=3,\ \mathrm{def}=1$.

8.9. 1) Pvz., $\mathrm{Im}\, f=\{(2,1,4),(-1,1,1)\}$, $\mathrm{Ker}\ =\{(0,1,-1)\}$;
2) pvz., $\mathrm{Im}\, f=\{(1,2,-2)\}$, $\mathrm{Ker}\ =\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$;
3) $\mathrm{Im}\, f=R^4$, $\mathrm{Ker}\, f=\{\theta\}$, vaizdo bazė – bet kuri $R^4$ bazė;
4) pvz., $\mathrm{Im}\, f=\{(1,2,5,-4),(1,-1,-1,5)\}$,
$\mathrm{Ker}\, f=\{(-1,4,3,0),(1,5,0,3)\}$.