5. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Tarkime,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

yra tiesinių lygčių sistema su koeficientais ir laisvaisiais nariais iš kūno K.

(1) sistema vadinama *suderintąja*, kai ji turi bent vieną sprendinį.

1 teorema (Kronekerio–Kapelio). (1) *sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai šios sistemos koeficientų matricos rangas lygus išplėstosios matricos rangui.*

(1) sistema vadinama *homogenine*, kai jos visi laisvieji nariai yra nuliai.

2 teorema. *Homogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė yra vektorinės erdvės* $K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n}$ *poerdvis.*

3 teorema. *Jei homogeninės tiesinių lygčių sistemos koeficientų matricos rangas lygus* r*, tai tos sistemos sprendinių poerdvio dimensija yra* $n - r$*.*

Jei homogeninės tiesinių lygčių sistemos koeficientų matricos rangas r mažesnis už kintamųjų skaičių n, tai bet kuri jos $n - r$ sprendinių tiesiškai nepriklausoma sistema vadinama fundamentaliąja sprendinių sistema.

4 teorema. *Homegeninės tiesinių lygčių sistemos bet kurį sprendinį galima užrašyti fundamentaliosios sistemos sprendinių tiesine kombinacija.*

PAVYZDŽIAI

1. Išspręsime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

Randame koeficientų matricos A ir išplėstosios matricos $\tilde{A}$ rangus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 12 & -9 & 3 \end{pmatrix} \downarrow^{-2} \downarrow^{-2} \downarrow^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \downarrow^{-2} \downarrow^{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 12 & -9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \downarrow^{-2} \downarrow^{-2} \downarrow^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \downarrow^{-2} \downarrow^{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todėl $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$. Vadinasi, sprendžiamoji lygčių sistema yra suderinta. Lygčių sistemos sprendimui pakanka pasirinkti dvi tiesiškai nepriklausomas lygtis, pavyzdžiui, pirmąją ir antrąją. Nežinomuosius x_3, x_4, x_5 laikome laisvaisiais kintamaisiais. Taigi nagrinėjamoji lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 - x_3 - x_4 - 2x_5. \end{cases}$$

Imkime $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$ $\quad (c_3, c_4, c_5 \in R)$. Tada

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$d_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 - 2c_3 + c_4 - c_5 & -1 \\ 4 - c_3 - c_4 - 2c_5 & -3 \end{vmatrix} = -2 + 5c_3 - 4c_4 + c_5,$$

$$d_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 - 2c_3 + c_4 - c_5 \\ 2 & 4 - c_3 - c_4 - 2c_5 \end{vmatrix} = 3c_3 - 3c_4.$$

Vadinasi, $x_1 = 2-5c_3+4c_4-c_5$, $x_2 = -3c_3+3c_4$, $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$ $(c_3, c_4, c_5 \in R)$ yra pradinės lygčių sistemos bendrasis sprendinys.

2. Rasime homogeninės tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 7x_1 + 13x_2 + 18x_3 - 31x_4 + 13x_5 = 0 \end{cases}$$

bendrąjį sprendinį ir fundamentaliąją sprendinių sistemą.

Bendrąjį sprendinį randame Gauso būdu:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 7 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 13 & 18 & -31 & 13 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & -10 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Užrašome bendrąjį sprendinį:

$$x_1 = -\frac{4}{3}c_3 + \frac{4}{3}c_4, \quad x_2 = -\frac{2}{3}c_3 + \frac{5}{3}c_4 - c_5,$$
$$x_3 = c_3, \quad x_4 = c_4, \quad x_5 = c_5 \quad (c_3, c_4, c_5 \in R).$$

Pradinės sistemos koeficientų matricos rangas lygus 2, todėl fundamentaliąją sprendinių sistemą sudarys 5-2=3 sprendiniai. Šią sistemą galime užrašyti šitaip:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-4	-2	3	0	0
4	5	0	3	0
0	-3	0	0	3

UŽDAVINIAI

5.1. Ištirkite, ar tiesinių lygčių sistema yra suderinta, ir raskite jos bendrąjį sprendinį pagal Kramerio formules:

1)
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=-1,\\ 3x_1-2x_2+x_3=0,\\ 4x_1+3x_2-5x_3=5; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3x_1-5x_2+x_3=3,\\ 10x_1+x_2+3x_3=5,\\ -4x_1-11x_2-x_3=1; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=2,\\ 4x_1+x_2+3x_3-2x_4=-3; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 2x_1-7x_2+3x_3+4x_4=6,\\ x_1-x_2-x_3-2x_4=-2,\\ -2x_1+12x_2-8x_3-12x_4=-16,\\ x_1+4x_2-6x_3-10x_4=-12; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 4x_1-4x_2-5x_3-2x_4+x_5=1,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2,\\ -x_1-3x_2-2x_3+2x_4-x_5=4,\\ 4x_1-5x_2-4x_3-x_4+2x_5=3; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4-x_5=6,\\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4-2x_5=2,\\ 4x_1-x_2-5x_3+x_4-4x_5=14,\\ 6x_1+3x_2-9x_3-3x_4-6x_5=4; \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3-3x_4=1,\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3-3x_4=8,\\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=4; \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3-3x_4-x_5=2,\\ 4x_1-2x_2-x_3+x_4+2x_5=4,\\ -x_1+2x_2-3x_3-3x_4-x_5=1,\\ -x_1+3x_2-5x_3-2x_4+x_5=4. \end{cases}$$

5.2. Raskite šių lygčių sistemų bendruosius sprendinius ir sudarykite jų fundamentaliąsias sprendinių sistemas:

1) $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=0, \\ -5x_1+7x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 4x_1+13x_2+6x_3-7x_4=0; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+7x_2-5x_3-4x_4=0, \\ x_1+3x_2-9x_3-10x_4=0; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-4x_4=0; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3-3x_4=0, \\ -7x_1-14x_2+17x_3-18x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-7x_3+4x_4=0; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 5x_1+6x_2+7x_3-3x_4=0, \\ 4x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-8x_3+10x_4=0, \\ -x_1-x_2-4x_3+4x_4=0; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+6x_2+14x_3-4x_4+8x_5=0, \\ -x_1-3x_2-8x_3+7x_4-11x_5=0, \\ x_1-4x_2-23x_3-6x_4-3x_5=0; \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3+2x_4-x_5=0, \\ -2x_1+5x_2+3x_3+x_4+4x_5=0, \\ -4x_1+9x_2+5x_3+7x_4+10x_5=0, \\ x_1-4x_2-3x_3+7x_4+x_5=0, \\ -3x_1-2x_2-5x_3+49x_4+25x_5=0; \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+3x_4-4x_5=0, \\ -3x_1+7x_2-x_3-5x_4+9x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+21x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-x_2+47x_3+5x_4-5x_5=0, \\ x_1-3x_2-5x_3-x_4-x_5=0; \end{cases}$$

9) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 13x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

ATSAKYMAI

5.1. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$;

2) $x_1 = -4 - 16c_2$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 15 + 53c_2$ $\quad (c_2 \in R)$;

3) $x_1 = -11 + 19c_4$, $x_2 = 2 - 5c_4$, $x_3 = 13 - 23c_4$, $x_4 = c_4$ $(c_4 \in R)$;

4) $x_1 = 2c_3 + \frac{18}{5}c_4 - 4$, $x_2 = c_3 + \frac{8}{5}c_4 - 2$, $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$ $(c_3, c_4 \in R)$;

5) nesuderinta;

6) nesuderinta;

7) $x_1 = \frac{1}{13}(-7c_4 + 44)$, $x_2 = \frac{1}{13}(-18c_4 + 37)$, $x_3 = \frac{1}{13}(-14c_4 - 3)$, $x_4 = c_4$ $\quad (c_4 \in R)$;

8) $x_1 = 15 - 22c_4 - 19c_5$, $x_2 = 23 - 35c_4 - 30c_5$, $x_3 = 10 - 17c_4 - 14c_5$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$ $\quad (c_4, c_5 \in R)$.

5.2. 1) $x_1 = c_1$, $x_2 = 14c_1 - 11c_4$, $x_3 = -31c_1 + 25c_4$, $x_4 = c_4$ $(c_1, c_4 \in R)$,

f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 14, x_3 = -31, x_4 = 0, \\ x_1 = 0, x_2 = -11, x_3 = 25, x_4 = 1; \end{cases}$

2) $x_1 = -24c_3 - 29c_4$, $x_2 = 11c_3 + 13c_4$, $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$ $(c_3, c_4 \in R)$,

f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1 = -24, x_2 = 11, x_3 = 1, x_4 = 0, \\ x_1 = -29, x_2 = 13, x_3 = 0, x_4 = 1; \end{cases}$

3) $x_1 = 11c_2$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -\frac{5}{2}c_2$, $x_4 = \frac{15}{2}c_2$ $(c_2 \in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $x_1 = 22, x_2 = 2, x_3 = -5, x_4 = 15$;

4) $x_1 = 15c_2 + 29c_4$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 7c_2 + 13c_4$, $x_4 = c_4$ $(c_2, c_4 \in R)$,

f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1 = 15, x_2 = 1, x_3 = 7, x_4 = 0, \\ x_1 = 29, x_2 = 0, x_3 = 13, x_4 = 1; \end{cases}$

5) $x_1=-86c_3,\ x_2=70c_3,\ x_3=c_3,\ x_4=-3c_3\quad (c_3\in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $x_1=-86, x_2=70, x_3=1, x_4=-3$;

6) $x_1=33c_4-42c_5,\ x_2=-22c_4+29c_5,\ x_3=5c_4-7c_5,\ x_4=c_4$,
$x_5=c_5\quad (c_4,c_5\in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1=\ \ 33, x_2=-22, x_3=\ \ 5, x_4=1, x_5=0,\\ x_1=-42, x_2=\ \ 29, x_3=-7, x_4=0, x_5=1;\end{cases}$

7) $x_1=-c_3+13c_4+7c_5,\ x_2=-c_3+5c_4+2c_5,\ x_3=c_3,\ x_4=c_4$,
$x_5=c_5\quad (c_3,c_4,c_5\in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1=-1, x_2=-1, x_3=1, x_4=0, x_5=0,\\ x_1=\ \ 13, x_2=\ \ 5, x_3=0, x_4=1, x_5=0,\\ x_1=\ \ 7, x_2=\ \ 2, x_3=0, x_4=0, x_5=1;\end{cases}$

8) $x_1=217c_4-199c_5,\ x_2=92c_4-85c_5,\ x_3=-12c_4+11c_5$,
$x_4=c_4,\ \ x_5=c_5\quad (c_4,c_5\in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1=\ \ 217, x_2=\ \ 92, x_3=-12, x_4=1, x_5=0,\\ x_1=-199, x_2=-85, x_3=\ \ 11, x_4=0, x_5=1;\end{cases}$

9) $x_1=\frac{1}{37}(27c_4-28c_5),\ x_2=\frac{1}{37}(19c_4+31c_5)$,
$x_3=\frac{1}{74}(-89c_4+32c_5),\quad x_4=c_4,\ \ x_5=c_5\quad (c_4,c_5\in R)$,
f. s. s. sudaro, pvz., $\begin{cases} x_1=\ \ 54, x_2=38, x_3=-89, x_4=74, x_5=\ \ 0,\\ x_1=-28, x_2=31, x_3=\ \ 16, x_4=\ \ 0, x_5=37;\end{cases}$

10) $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=0$, nėra f. s. s.