4. POERDVIAI, POERDVIŲ SUMA BEI SANKIRTA

Vektorinės erdvės virš kūno K netuščias poaibis L vadinamas tos *erdvės poerdviu*, kai jis turi tokias savybes:

1) bet kokių dviejų poaibio L vektorių α ir β suma $\alpha + \beta$ priklauso tam poaibiui;
2) poaibio L bet kokio vektoriaus α ir kūno K bet kokio elemento c sandauga $c\alpha$ priklauso tam poaibiui.

Vektorinės erdvės virš kūno K vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *tiesiniu apvalku* $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ vadinama tiesinių kombinacijų $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m$ aibė, kai koeficientai $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nepriklausomai vienas nuo kito perbėga visus to kūno elementus.

1 teorema. *Jei vektorinės erdvės vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ rangas lygus r, tai tiesinis apvalkas $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ yra r-matis tos erdvės poerdvis.*

Vektorinės erdvės poerdvių $L_1, L_2, \ldots, L_m$ suma vadinama aibė $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ tos erdvės vektorių α, kuriuos galima užrašyti lygybe

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \qquad (\alpha_i \in L_i,\ i = \overline{1, m}\,).$$

Vektorinės erdvės poerdvių $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sankirta vadinamas jos poaibis $L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m$, sudarytas iš vektorių, priklausančių kiekvienam iš poerdvių L_i $(i = \overline{1, m}\,)$.

2 teorema. *Dviejų nenulinių vektorinės erdvės virš kūno K poerdvių sumos dimensija lygi tų poerdvių bazių sąjungos rangui.*

3 teorema. *Dviejų vektorinės erdvės virš kūno K poerdvių L_1 ir L_2 dimensijų suma lygi tų poerdvių sumos ir sankirtos dimensijų sumai*:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim\,(L_1 + L_2) + \dim\,(L_1 \cap L_2).$$

Vektorinės erdvės poerdvių $L_1, L_2, \ldots, L_m$ suma L vadinama *tiesiogine suma* ir žymima $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$, kai kiekvieną poerdvio L vektorių α galima vienareikšmiškai išreikšti poerdvių L_i vektorių suma:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \qquad (\alpha_i \in L_i,\ i = \overline{1, m}\,).$$

4 teorema. *Vektorinės erdvės poerdvių $L_1, L_2, \ldots, L_m$ suma L yra tiesioginė tada ir tik tada, kai bet kurio jos dėmens sankirta su kitų dėmenų suma lygi nuliniam poerdviui.*

Išvada. *Jei vektorinė erdvė yra dviejų nenulinių poerdvių tiesioginė suma, tai tų poerdvių bazių sąjunga yra tos erdvės bazė.*

PAVYZDŽIAI

1. Rasime aritmetinės erdvės R^4 vektorių $\alpha_1 = (1, -1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (2, 3, -1, -2)$, $\alpha_3 = (-4, -11, 7, 12)$ tiesinio apvalko bazę ir dimensiją.

Apskaičiuojame vektorių sistemos rangą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & -11 & 7 & 12 \end{pmatrix} \downarrow^{-2} \downarrow^{4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & -15 & 15 & 24 \end{pmatrix} \downarrow^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, o vieną iš bazių sudaro, pavyzdžiui, vektoriai α_1 ir α_2.

2. Rasime poerdvių $L_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ir $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sankirtos dimensiją ir bazę, kai $\alpha_1 = (1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 4, 1)$, $\alpha_3 = (-1, 7, -5)$; $\beta_1 = (1, 3, -2)$, $\beta_2 = (0, -2, -1)$, $\beta_3 = (2, 8, -3)$.

Apskaičiuojame rangus $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$: $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$. Iš dimensijų formulės gauname

$$\dim L_1 \cap L_2 = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Kadangi poerdvio L_1 bazę sudaro vektoriai α_1 ir α_2, o poerdvio L_2 bazę – β_1 ir β_2, sankirtos bazei rasti sudarome lygtį

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2.$$

Ši lygtis yra ekvivalenti homogeninių lygčių sistemai

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 3y_1 + 2y_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$$

Jos fundamentalioji sprendinių sistema yra, pavyzdžiui, $[1, -1, -1, 1]$. Vadinasi, vieną iš sankirtos bazių sudaro vektorius $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 = (-1, -5, 1)$.

UŽDAVINIAI

4.1. Ar sudaro vektorinės erdvės poerdvį:

1) visi aritmetinės erdvės R^n vektoriai, kurių koordinatės susietos lygybe

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0;$$

2) visi aritmetinės erdvės R^n vektoriai, kurių koordinatės susietos lygybe

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n = 1;$$

3) visi aritmetinės erdvės R^n vektoriai, kurių pirmosios koordinatės yra nenulinės ir sutampa;

4) ne aukštesnio kaip n-ojo laipsnio erdvės $R_n[t]$ polinomai $f(t)$, kuriems teisinga lygybė $f(1) = 0$;

5) visi polinomų erdvės $R_n[t]$ polinomai, kuriems teisinga lygybė $f(1) = 1$;

6) visi polinomų erdvės $R[t]$ polinomai, kuriems teisinga lygybė $f(at + b) = af(t) + b \quad (\forall a, b \in R)$?

4.2. Raskite vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tiesinio apvalko $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ bazę ir dimensiją, kai:

1) $\alpha_1 = (2, 1, 0, 3)$,
$\alpha_2 = (-1, 1, 1, -2)$,
$\alpha_3 = (-1, 4, 3, -3)$;

2) $\alpha_1 = (1, 4, -7, 3)$,
$\alpha_2 = (-3, 10, -9, -7)$,
$\alpha_3 = (2, -3, 1, 5)$,
$\alpha_4 = (0, 11, -15, 1)$;

3) $\alpha_1 = (5, 7, 3, 2)$,
$\alpha_2 = (-2, 4, -1, 3)$,
$\alpha_3 = (5, 2, 3, -4)$,
$\alpha_4 = (2, 1, 1, 3)$;

4) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)$,
$\alpha_2 = (-3, 3, -6, -3)$,
$\alpha_3 = (2, 1, 3, -2)$,
$\alpha_4 = (2, 4, 2, -6)$;

5) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)$,
$\alpha_2 = (1, 0, 7, -5)$,
$\alpha_3 = (2, 1, -1, 3)$,
$\alpha_4 = (6, 7, -3, 4)$,
$\alpha_5 = (1, 3, 2, -4)$;

6) $\alpha_1 = (2, 3, 5, 7)$,
$\alpha_2 = (1, 0, 13, 5)$,
$\alpha_3 = (2, 1, 19, 9)$,
$\alpha_4 = (-1, -2, 1, -3)$,
$\alpha_5 = (1, 1, 6, 4)$.

4.3. Raskite poerdvių $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ir $L_2 = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ sumos bei sankirtos dimensijas, kai:

1) $\alpha_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\quad \beta_1 = (2, 8, 2, 4)$,
$\alpha_2 = (2, 3, 1, 4)$, $\quad \beta_2 = (5, 5, 2, 10)$,
$\alpha_3 = (0, 5, 1, 0)$, $\quad \beta_3 = (3, -3, 0, 6)$;

2) $\alpha_1 = (3, 4, -1, 5)$, $\quad \beta_1 = (4, 6, -2, 4)$,
$\alpha_2 = (2, 1, 2, -1)$, $\quad \beta_2 = (4, -1, 8, -1)$,
$\alpha_3 = (-1, 1, -3, 0)$, $\quad \beta_3 = (-4, -13, 12, -9)$;

3) $\alpha_1 = (-1, 0, 1, 3)$, $\quad \beta_1 = (4, 3, -1, 2)$,
$\alpha_2 = (4, 1, 2, 3)$, $\quad \beta_2 = (2, -2, 3, -1)$,
$\alpha_3 = (-2, -3, 0, 5)$, $\quad \beta_3 = (1, -1, -1, -1)$;

4) $\alpha_1 = (5, 2, 3, -1)$, $\quad \beta_1 = (2, 3, 1, 7)$,
$\alpha_2 = (-1, -2, -3, 1)$, $\quad \beta_2 = (-4, 0, 2, 3)$;
$\alpha_3 = (2, 0, 5, 3)$,

5) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\quad \beta_1 = (3, 1, 2, 7)$,
$\alpha_2 = (2, 1, 1, 3)$, $\quad \beta_2 = (-1, 2, 1, 4)$;
$\alpha_3 = (-1, 2, 3, -4)$,
$\alpha_4 = (3, 1, 2, 5)$,

6) $\alpha_1 = (1, -2, 3, 4)$, $\quad\beta_1 = (0, -6, 5, 5)$,
$\alpha_2 = (2, 2, 1, 3)$, $\quad\beta_2 = (5, 10, 2, 7)$,
$\alpha_3 = (-1, 4, -1, -2)$, $\quad\beta_3 = (2, 4, 3, 5)$,
$\beta_4 = (-2, 2, 3, 1)$.

4.4. Raskite poerdvių $L_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ir $L_2 = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ sankirtos bazę, kai:

1) $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\quad\beta_1 = (2, -1, 1)$,
$\alpha_2 = (2, -1, 3)$, $\quad\beta_2 = (-3, 0, 4)$;
$\alpha_3 = (3, 4, 1)$,

2) $\alpha_1 = (-1, -2, 2)$, $\quad\beta_1 = (2, 1, 1)$,
$\alpha_2 = (3, 2, 1)$, $\quad\beta_2 = (0, 3, 2)$,
$\beta_3 = (-2, 1, 4)$;

3) $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\quad\beta_1 = (1, 5, -2)$,
$\alpha_2 = (3, 5, 3)$, $\quad\beta_2 = (-2, -3, 4)$;

4) $\alpha_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\quad\beta_1 = (1, -1, 2, 1)$,
$\alpha_2 = (-1, 2, -4, 2)$, $\quad\beta_2 = (2, 0, 1, -3)$;
$\alpha_3 = (2, 3, -1, 0)$, $\quad\beta_3 = (-1, 0, 2, -2)$;

5) $\alpha_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\quad\beta_1 = (2, 1, -1, 3)$,
$\alpha_2 = (-2, 3, 1, 4)$, $\quad\beta_2 = (4, 7, 1, 2)$,
$\alpha_3 = (-4, 1, 3, 0)$, $\quad\beta_3 = (-1, 2, 0, -4)$;

6) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 3)$, $\quad\beta_1 = (1, -2, 1, 3)$,
$\alpha_2 = (2, 3, 1, -3)$, $\quad\beta_2 = (3, 2, 4, -1)$.

ATSAKYMAI

4.1. 1) Taip; 2) ne; 3) ne;
4) taip; 5) ne; 6) taip.

4.2. 1) dim $L = 2$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_2;
2) dim $L = 2$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_2;
3) dim $L = 3$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_2, α_4;
4) dim $L = 2$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_3;
5) dim $L = 3$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_2, α_5;
6) dim $L = 2$, bazę sudaro, pvz., α_1, α_4.

4.3. 1) $\dim(L_1 + L_2) = 2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
2) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
3) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
4) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
5) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
6) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 3$.

4.4. 1) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, bazę sudaro, pvz.,
$\gamma_1 = -83\alpha_1 + 28\alpha_2 + 7\alpha_3 = 2\beta_2 = (-6, 0, 8)$,
$\gamma_2 = 11\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 = (2, -1, 1)$;

2) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, bazę sudaro, pvz.,
$\gamma_1 = 5\alpha_1 + 21\alpha_2 = 29\beta_1 + \beta_2 = (58, 32, 31)$,
$\gamma_2 = 7\alpha_1 + 25\alpha_2 = 35\beta_1 + \beta_3 = (68, 36, 39)$;

3) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, bazę sudaro, pvz.,
$\gamma = 21\alpha_1 - 7\alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_2 = (0, 7, 0)$;

4) $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, bazę sudaro, pvz.,
$\gamma_1 = -68\alpha_1 - 101\alpha_2 + 90\alpha_3 = 80\beta_2 + 15\beta_3 = (145, 0, 110, -270)$,
$\gamma_2 = 38\alpha_1 + 41\alpha_2 - 45\alpha_3 = 15\beta_1 - 35\beta_3 = (-55, -15, -5, 120)$;

5) $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, bazę sudaro, pvz.,
$\gamma = 108\alpha_1 - 11\alpha_2 = 106\beta_1 - 13\beta_2 + 30\beta_3 = (130, 75, -119, 172)$;

6) $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$.