Vilniaus universitetas

Edmundas Gaigalas

A L G E B R O S

UŽDUOTYS IR REKOMENDACIJOS

Vilnius 1992

T U R I N Y S

STANDARTINIAI ŽYMENYS

N – natūraliųjų skaičių aibė,
Z – sveikųjų skaičių žiedas,
Q – racionaliųjų skaičių kūnas,
R^n – n-matė aritmetinė erdvė,
$K_{m\times n}$ – vienarūšių $m \times n$-matricų erdvė virš kūno K,
K^* – kūno K multiplikacinė grupė,
Z_n – n-osios eilės ciklinė grupė.

1. VEKTORINĖ ERDVĖ

Apibrėžimas. *Adicinė grupė V vadinama vektorine erdve virš kūno K, kai apibrėžta jos elementų daugybos iš kūno K elementų operacija, kuri turi tokias savybes:*

1) asociatyvumo –

$$a \cdot (b \cdot \alpha) = (a \cdot b) \cdot \alpha \qquad (\forall a, b \in K, \alpha \in V);$$

2) distributyvumo grupės V elementų sudėties atžvilgiu –

$$a \cdot (\alpha + \beta) = a \cdot \alpha + a \cdot \beta \qquad (\forall a \in K,\ \ \alpha, \beta \in V);$$

3) distributyvumo kūno K elementų sudėties atžvilgiu –

$$(a + b) \cdot \alpha = a \cdot \alpha + b \cdot \alpha \qquad (\forall a, b \in K,\ \ \alpha \in V);$$

4) kūno K vieneto e panaikinimo –

$$e \cdot \alpha = \alpha \qquad (\forall \alpha \in V).$$

Vektorinės erdvės V elementus vadiname *vektoriais* ir žymime graikiškomis raidėmis, o kūno K elementus – *skaliarais* ir žymime mažomis lotyniškomis raidėmis.

Vektorinės erdvės vektorių sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vadinama *tiesiškai priklausoma*, kai galima rasti tokius skaliarus $c_1, c_2, \ldots, c_m$, iš kurių bent vienas nelygus 0, kad būtų teisinga lygybė

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m = \theta$$

(θ – nulinis vektorius). Jei pastarąją lygybę tenkina tik skaliarai $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, tai vektorių sistema vadinama *tiesiškai nepriklausoma.*

1 teorema. *Jei vektorių sistemos posistemis yra tiesiškai priklausomas, tai ir ta sistema yra tiesiškai priklausoma.*

Išvada. *Jei vektorių sistema yra tiesiškai nepriklausoma, tai tiesiškai nepriklausomas ir bet kuris jos posistemis.*

Vektorinės erdvės vektorius α vadinamas tos erdvės *vektorių* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *tiesine kombinacija*, kai galima rasti skaliarus $a_1, a_2, \ldots, a_m$, su kuriais yra teisinga lygybė

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m.$$

2 teorema. *Vektorių sistema, sudaryta iš daugiau kaip vieno vektoriaus, yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai bent vieną jos vektorių galima užrašyti kitų tos sistemos vektorių tiesine kombinacija.*

Vektorių sistemos rangu vadinamas didžiausias jos tiesiškai nepriklausomų posistemių vektorių skaičius.

3 teorema. *Jei vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_m$ rangas lygus r, o jos posistemis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ yra tiesiškai nepriklausomas, tai kiekvieną sistemos vektorių galima užrašyti to posistemio vektorių tiesine kombinacija.*

4 teorema. *Prijungus prie vektorių sistemos jos vektorių tiesinę kombinaciją, gaunama to paties rango vektorių sistema.*

Vektorių sistemos *elementariaisiais pertvarkiais* vadinami šie pertvarkiai:
1) bet kurio sistemos vektoriaus pakeitimas to vektoriaus ir nelygaus nuliui skaliaro sandauga;
2) sistemos vektoriaus pakeitimas suma to vektoriaus ir kito sistemos vektoriaus, padauginto iš bet kurio skaliaro.

5 teorema. *Atlikus vektorių sistemos elementarųjį pertvarkį, gaunama to paties rango vektorių sistema.*

PAVYZDŽIAI

1. Apibrėšime aritmetinę vektorinę erdvę K^n. Nagrinėjame sutvarkytus n kūno K elementų rinkinius $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dviejų elementų sudėtį apibrėšime pakomponenčiui: jei $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tai tų elementų suma laikome elementą

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Apibrėžtos sudėties operacijos atžvilgiu sudarytoji aibė yra adicinė grupė. Iš tikrųjų:
1) operacija asociatyvi – jei $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, tai

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \big((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots, (a_n + b_n) + c_n\big) = \\ &= \big(a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots, a_n + (b_n + c_n)\big) = \alpha + (\beta + \gamma);\end{aligned}$$

2) egzistuoja nulinis elementas – $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$:

$$\alpha + \theta = (a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_n + 0) = \alpha;$$

3) kartu su kiekvienu elementu $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ aibei priklauso ir jam priešingas elementas $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$:

$$\alpha + (-\alpha) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, \ldots, a_n - a_n) = \theta;$$

4) operacija komutatyvi –

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n) = \beta + \alpha.\end{aligned}$$

Elemento daugybą iš skaliaro apibrėžiame taip pat pakomponenčiui –

$$a\alpha = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_n).$$

Daugybos operacija turi tokias savybes:
5) asociatyvumo –

$$a(b\alpha) = \big(a(ba_1), a(ba_2), \dots, a(ba_n)\big) = \\ = \big((ab)a_1, (ab)a_2, \dots, (ab)a_n\big) = (ab)\alpha;$$

6) distributyvumo vektorių sudėties atžvilgiu –

$$a(\alpha+\beta) = \big(a(a_1+b_1), a(a_2+b_2), \dots, a(a_n+b_n)\big) = \\ = (aa_1+ab_1, aa_2+ab_2, \dots, aa_n+ab_n) = a\alpha + a\beta;$$

7) distributyvumo skaliarų sudėties atžvilgiu –

$$(a+b)\alpha = \big((a+b)a_1, (a+b)a_2, \dots, (a+b)a_n\big) = \\ = (aa_1+ba_1, aa_1+aa_2, \dots, aa_n+ba_n) = a\alpha + b\alpha;$$

8) kūno K vieneto panaikinimo –

$$e\alpha = (ea_1, ea_2, \dots, ea_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha.$$

2. Apskaičiuosime aritmetinės vektorinės erdvės R^3 vektorių sistemos $\alpha_1 = (1,-1,2)$, $\alpha_2 = (2,-1,-1)$, $\alpha_3 = (0,1,-5)$ rangą, pasinaudoję tik jo apibrėžimu.

Sprendžiame lygtį

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \theta.$$

Įrašę vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta$ išraiškas ir atlikę veiksmus, gauname

$$(x_1+2x_2, -x_1-x_2+x_3, 2x_1-x_2-5x_3) = (0,0,0).$$

Ši lygtis yra ekvivalenti trijų tiesinių lygčių su trim nežinomaisiais sistemai

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \phantom{{}+x_3} = 0, \\ -x_1-x_2+x_3 = 0, \\ 2x_1-x_2-5x_3 = 0. \end{cases}$$

Pastaroji sistema turi bent vieną nenulinį sprendinį, pavyzdžiui, $(2,-1,1)$, todėl nagrinėjamoji vektorių sistema yra tiesiškai priklausoma ir jos rangas $r \leq 2$.

Nagrinėjame posistemius, sudarytus iš dviejų vektorių. Sprendžiame lygtį

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \theta.$$

Atlikę veiksmus, gauname ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+2x_2 = 0, \\ -x_1-x_2 = 0, \\ 2x_1-x_2 = 0. \end{cases}$$

Ši sistema turi tik nulinį sprendinį, todėl vektorių posistemis α_1, α_2 yra tiesiškai nepriklausomas ir sistemos rangas $r = 2$.

UŽDAVINIAI

1.1. Ar sudaro vektorinę erdvę:

1) n-osios eilės kvadratinės matricos su elementais iš kūno K matricų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

2) aibė kūno K elementų virš jo paties tame kūne apibrėžtų operacijų atžvilgiu;

3) aibė plėtinio $L \supset K$ elementų virš kūno K kūne L apibrėžtų operacijų atžvilgiu;

4) n-osios eilės simetrinės matricos virš kūno K matricų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

5) aibė visų n-ojo laipsnio polinomų virš kūno K polinomų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

6) aibė visų polinomų virš kūno K, kurių laipsniai ne didesni už natūralųjį skaičių n, polinomų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

7) aibė visų polinomų virš kūno K polinomų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

8) aibė visų tolydžiųjų kompleksinių reikšmių funkcijų virš kompleksinių skaičių kūno funkcijų sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu;

9) aibė visų plokštumos laisvųjų vektorių, kurių galai priklauso vienai tiesei, vektorių sudėties ir daugybos iš skaliaro atžvilgiu?

1.2. Ar galima apibrėžti vektorinės erdvės struktūrą:

1) realiųjų skaičių aibėje R;

2) teigiamų realiųjų skaičių aibėje R^+;

3) racionaliųjų skaičių aibėje Q;

4) natūraliųjų skaičių aibėje N;

5) aibėje $R[t]$ visų polinomų $f(t)$, tenkinančių sąlygą

$$f(3) = 2f(2);$$

6) Dekarto sandaugoje $Q \times Q$;

7) Dekarto sandaugoje $Z \times Z$?

1.3. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės K^3 bet kuri keturių vektorių sistema yra tiesiškai priklausoma.

1.4. Ar galima apibrėžti elementų tiesinės priklausomybės sąvoką Abelio grupėje?

1.5. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės R^4 vektorių sistema $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausoma ir apskaičiuokite šių vektorių tiesinę kombinaciją α:

1) $\alpha_1 = (2, 1, 0, 1), \quad \alpha_2 = (1, -2, 1, 3), \quad \alpha_3 = (3, 4, -1, 2), \quad \alpha = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3;$

2) $\alpha_1 = (4, -3, 2, 1), \quad \alpha_2 = (5, 1, -3, 2), \quad \alpha = -\alpha_1 + 5\alpha_2;$

3) $\alpha_1 = (1, -1, 1, 2), \quad \alpha_2 = (2, 1, -1, 1),$
$\alpha_3 = (4, -1, 2, 3), \quad \alpha_4 = (-3, 3, 2, 3), \quad \alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4;$

4) $\alpha_1 = (1, 2, 3, 1), \quad \alpha_2 = (-1, 2, 3, -1),$
$\alpha_3 = (2, 3, 1, -1), \quad \alpha_4 = (1, -1, 1, -3), \quad \alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$

1.6. Patikrinkite, ar aritmetinės erdvės R^n vektorių sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausoma:

1) $\alpha_1 = (3, 4, -2)$, $\alpha_2 = (2, -1, 3)$, $\alpha_3 = (7, 2, 4)$;

2) $\alpha_1 = (2, -1, 3)$, $\alpha_2 = (3, 2, -1)$, $\alpha_3 = (1, 2, 3)$;

3) $\alpha_1 = (1, 4, 2, -1)$, $\alpha_2 = (-2, -8, -4, 2)$;

4) $\alpha_1 = (2, 3, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 3, 0, 1)$.

1.7. Apskaičiuokite aritmetinės erdvės R^3 vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rangą, pasinaudoję tik jo apibrėžimu:

1) $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (-1, 1, -2)$;

2) $\alpha_1 = (1, -2, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)$, $\alpha_3 = (4, -3, 5)$;

3) $\alpha_1 = (1, -1, 3)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 2, -2)$;

4) $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (-2, -6, -2)$, $\alpha_3 = (3, 9, 3)$.

1.8. Apskaičiuokite polinomų, kurių laipsniai ne didesni už 5, erdvės $R_5[t]$ vektorių sistemos rangą, pasinaudoję tik jo apibrėžimu:

1) 2, $2 + t$, $3 + 2t + t^2$;

2) $1 + t + t^2$, $1 + t^2 + t^3$, $-1 + t + t^2 - 2t^3$;

3) $1 + t$, $2 + t - t^2$, $3 + 2t - t^3$, $1 - t^3$;

4) $1 + t + t^3$, $1 + t^2 - t^3$, $2 + t + t^2$, $1 + t^3$.

ATSAKYMAI

1.1. 1) Taip; 2) taip; 3) taip; 4) taip; 5) ne; 6) taip; 7) taip; 8) taip; 9) taip, jei tiesės yra koordinačių ašys; ne – kitais atvejais.

1.2. 1) Taip; 2) taip; 3) taip; 4) ne; 5) taip; 6) taip; 7) ne.

1.4. Taip.

1.5. 1) $\alpha = (13, 24, -7, 1)$; 2) $\alpha = (21, 8, -17, 9)$; 3) $\alpha = (-27, 12, 5, 3)$; 4) $\alpha = (-3, -5, 8, -2)$.

1.6. 1) Taip; 2) ne; 3) taip; 4) ne.

1.7. 1) $r = 3$; 2) $r = 2$; 3) $r = 2$; 4) $r = 1$.

1.8. 1) $r = 3$; 2) $r = 2$; 3) $r = 3$; 4) $r = 3$.