9. Vektorių skaliarinė sandauga

9.1. Apibrėžimas. *Vektorių α ir β skaliarine sandauga vadiname skaičių, žymimą $\alpha \cdot \beta$, lygų tų vektorių ilgių bei kampo tarp jų kosinuso sandaugai –*

$$\alpha \cdot \beta = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos \varphi.$$

Kadangi $||\alpha|| \cos \varphi = \text{proj}_\beta(\alpha)$, o $||\beta|| \cos \varphi = \text{proj}_\alpha(\beta)$, tai skaliarinę sandaugą galima apibrėžti ir taip:

$$\alpha \cdot \beta = ||\alpha|| \text{proj}_\alpha(\beta) = ||\beta|| \text{proj}_\beta(\alpha).$$

9.2. Nenulinių vektorių statmenumo kriterijus. *Du nenuliniai vektoriai yra statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, du nenuliniai vektoriai α ir β yra statmeni. Tuomet kampo tarp jų kosinusas lygus nuliui:$\cos \varphi = 0$. Vadinasi,

$$\alpha \cdot \beta = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos \varphi = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot 0 = 0 \quad \triangle$$

Pakankamumas. Tarkime, $\alpha \cdot \beta = 0$. Vadinasi,

$$||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos \varphi = 0.$$

Kadangi vektoriai α ir β nenuliniai, iš čia išplaukia lygybė

$$\cos \varphi = 0.$$

Vadinasi, vektoriai α ir β yra statmeni. $\triangle$

9.3. Skaliarinės sandaugos savybės.

1) *Skaliarinė sandauga – komutatyvi*:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

2) *Vektorių suma ir skaliarinė sandauga – distributyvi*:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

3) *Daugyba vektoriaus iš skaičiaus ir skaliarinė sandauga – asociatyvi*:

$$(a \cdot \alpha) \cdot \beta = a \cdot (\alpha \cdot \beta).$$

Įrodymas. 1) Įrodymas išplaukia iš skaičių daugybos komutatyvumo:

$$\alpha \cdot \beta = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot \cos \varphi = ||\beta|| \cdot ||\alpha|| \cdot \cos \alpha = \beta \cdot \alpha. \quad \triangle$$

2) Įrodymas išplaukia iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo per projekcijas ir projekcijų savybių:

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = ||\gamma||\cdot \mathrm{proj}_\gamma(\alpha+\beta) = ||\gamma||\big(\mathrm{proj}_\gamma(\alpha)+\mathrm{proj}_\gamma(\beta)\big) =$$
$$||\gamma||\mathrm{proj}_\gamma(\alpha)+||\gamma||\mathrm{proj}_\gamma(\beta) = \gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\beta. \quad \triangle$$

3) Įrodymui taip pat taikome projekcijų savybes:

$$(a\alpha)\cdot\beta = ||\beta||\cdot \mathrm{proj}_\beta(a\alpha) = ||\beta||\cdot a\cdot \mathrm{proj}_\beta(\alpha) = a(\alpha\cdot\beta). \quad \triangle$$

9.4 teiginys. Skaliarinės sandaugos vektorinė išraiška. *Dviejų vektorių skaliarinė sandauga yra lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai.*

Įrodymas. Tarkime, $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)$. Skaičiuojame šių vektorių skaliarinę sandaugą, taikydami jų savybes:

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta =&(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) =\\ =&a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\cdot\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j}+\\ &+a_2b_3\vec{j}\cdot\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\cdot\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\cdot\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k} = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2. \quad \triangle\end{aligned}$$

9.5. Teiginys. Vektoriaus ilgio koordinatinė išraiška. *Vektoriaus ilgis yra lygus koordinatinei šakniai iš jo koordinačių kvadratų sumos.*

Įrodymas. Tarkime, $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$. Tuomet

$$\alpha\cdot\alpha = ||\alpha||\cdot||\alpha||\cdot\cos 0 = ||\alpha||^2.$$

Iš čia

$$||\alpha|| = \sqrt{\alpha\cdot\alpha},$$

arba koordinatinėje išraiškoje:

$$||\alpha|| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \quad \triangle$$

9.6. Teiginys. Kampo tarp vektorių kosinuso koordinatinė išraiška. *Kampo tarp vektorių kosinusas yra lygus tų vektorių skaliarinei sandaugai, padalintai iš jų ilgių sandaugos.*

Įrodymas. Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo turime lygybę

$$\cos\varphi = \frac{\alpha\cdot\beta}{||\alpha||\cdot||\beta||}.$$

Pritaikę skaliarinei sandaugai bei ilgiams koordinatines išraiškas, gauname lygybę

$$\cos\varphi\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \quad \triangle$$

9.7. Pavyzdžiai.

1. Trys vektoriai α, β, γ tenkina sąlygą $\alpha+\beta+\gamma=O$, be to, $||\alpha||=3$, $||\beta||=1$, $||\gamma||=4$. Paskaičiuoti $\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha$.

Sprendimas. Parašome tapatybę:

$$\begin{aligned}0=&O\cdot O=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)=||\alpha||^2+||\beta||^2+||\gamma||^2+\\&+2(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha).\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=-\frac{1}{2}\big(||\alpha||^2+||\beta||^2+||\gamma||^2\big)=-\frac{1}{2}(3^2+1^2+4^2)=-13.\ \triangle$$

2. Duoti vektorių α ir β ilgiai – $||\alpha||=3$, $||\beta||=5$. Su kuria x reikšme vektoriai $\alpha+x\beta$ ir $\alpha-x\beta$ yra statmeni?

Sprendimas. Vektoriai statmeni, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Vadinasi,

$$0=(\alpha+x\beta)\cdot(\alpha-x\beta)=||\alpha||^2-x^2\cdot||\beta||^2.$$

Gauname lygtį

$$9-25x^2=0.$$

Taigi,

$$x=\pm\frac{3}{5}.\ \triangle$$

3. Rasti vektorių β, kolinearų vektoriui $\alpha=(2,1,-1)$ ir tenkinantį sąlygą $\beta\cdot\alpha=3$.

Sprendimas. Tarkime, $\beta=(x,y,z)$. Iš kolinearumo sąlygos gauname lygtis

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Be to, iš antrosios sąlygos –

$$2x+y-z=3.$$

Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{1},\\ \frac{x}{2}=\frac{z}{-1},\\ 2x+y-z=3.\end{cases}$$

Turime

$$y=\frac{x}{2},\quad z=-\frac{x}{2}.$$

Vadinasi,

$$2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=3.$$

Taigi, $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$. $\triangle$

4. Duoti du taškai $A(-5, 7, -6)$ ir $B(7, -9, 9)$. Paskaičiuoti vektoriaus $\alpha = (1, -3, 1)$ projekciją ašyje $\overrightarrow{AB}$.

Sprendimas. Pritaikę vieną iš skaliarinės sandaugos apibrėžimų, turime lygybę

$$||\overrightarrow{AB}||\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}(\alpha) = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Paskaičiuojame $\overrightarrow{AB}$ koordinates bei $\overrightarrow{AB}$ ilgį:

$$\overrightarrow{AB} = \big(7 - (-5), -9 - 7, 9 - (-6)\big) = (12, -16, 15),$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + 15^2} = 25.$$

Vadinasi,

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}(\alpha) = \frac{1}{25}(1 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 15) = 3. \quad \triangle$$