4. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Nagrinėsime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Čia $x_1, x_2, ..., x_n$ – kintamieji, a_{ij} $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ – koeficientai, b_i $(i = \overline{1,m})$ – laisvieji nariai.

4.1. Apibrėžimai.

1. *Skaičių rinkinys* $(c_1, c_2, , ..., c_n)$*, kurį įrašius vietoj nežinomųjų* $x_1, x_2, ..., x_n$ *į sistemos lygtis, gaunamos teisingos lygybės, vadinamas tos lygčių sistemos sprendiniu.*

2. *Dvi tiesinių lygčių sistemos su tais pačiais kintamaisiais, turinčios vienodas sprendinių aibes, vadinamos ekvivalenčiomis sistemomis.*

3. *Tiesinių lygčių sistemos elementariaisiais pertvarkiais vadiname:*

1) *bet kurios sistemos lygties abiejų pusių daugybą iš nelygaus nuliui skaičiaus;*

2) *vienos sistemos lygties keitimą jos ir kitos lygties, padaugintos iš bet kokio skaičiaus, suma.*

4.2. Teiginys. *Iš tiesinių lygčių sistemos elementariuoju pertvarkiu gaunama jai ekvivalenti lygčių sistema.*

Įrodymas.

1) Padauginkime, pavyzdžiui, pirmosios sistemos lygties abi puses iš nenulinio skaičiaus c. Gausime sistemą

$$\begin{cases} ca_{11}x_1 + ca_{12}x_2 + \ldots + ca_{1n}x_n = cb_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Tarkime, $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra pradinės sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Padauginę pirmosios tapatybės abi puses iš skaičiaus c, gausime tapatybių sistemą

$$\begin{cases} ca_{11}c_1 + ca_{12}c_2 + \ldots + ca_{1n}c_n = cb_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Vadinasi, rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra ir pertvarkytos sistemos sprendinys.

Dabar tarkime, $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra pertvarkytos sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} ca_{11}c_1 + ca_{12}c_2 + \ldots + ca_{1n}c_n = cb_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Padalinę abi pirmosios tapatybės puses iš c, įsitikiname, kad rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra ir pradinės sistemos sprendinys. $\triangle$

2) Pakeiskime, pavyzdžiui, pirmąją lygtį tos lygties ir antrosios lygties, padaugintos iš skaičiaus suma:

$$\begin{cases} (a_{11} + ca_{21})x_1 + (a_{12} + ca_{22})x_2 + \ldots + (a_{1n} + ca_{2n})x_n = b_1 + cb_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Tarkime, rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra pradinės sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Padauginkime antrosios tapatybės abi puses iš skaičiaus c ir sudėkime su pirmosios tapatybės atitinkamomis pusėmis:

$$\begin{cases} (a_{11} + ca_{21})c_1 + (a_{12} + ca_{22})c_2 + \ldots + (a_{1n} + ca_{2n})c_n = b_1 + cb_2, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Matome, kad skaičių rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra ir pertvarkytos sistemos sprendinys.

Tarkime priešingai, skaičių rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra pertvarkytos sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} (a_{11} + ca_{21})c_1 + (a_{12} + ca_{22})c_2 + \ldots + (a_{1n} + ca_{2n})c_n = b_1 + cb_2, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Padauginę abi antrosios tapatybės puses iš $-c$ ir sudėję su pirmosios tapatybės atitinkamomis pusėmis, gausime tapatybių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Vadinasi, skaičių rinkinys $(c_1, c_2, ..., c_n)$ yra ir pradinės sistemos sprendinys. $\triangle$

4.3. Apibrėžimas. *Tiesinių lygčių sistema*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = c_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = c_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = c_m, \end{cases}$$

kurioje $b_{11} \cdot b_{22} \cdot ... \cdot b_{rr} \neq 0$, *kai* $r \geqslant 1$, *vadinama trapecine.*

Nesunku matyti, kad trapecinio pavidalo lygčių sistemą yra pakankamai lengva išspręsti – iš esmės galima rašyti sprendinių išraiškas. Ar kiekvieną tiesinių lygčių sistemą galima elementariaisiais pertvarkiais suvesti į trapecinę? Į šį klausimą pilnai atsako

4.4. Teorema (Gauso metodas). *Kiekviena tiesinių lygčių sistema yra ekvivalenti tam tikrai trapecinei sistemai.*

Įrodymas. Taikysime matematinės indukcijos metodą lygčių skaičiaus m atžvilgiu.

1. Kai $m \geqslant 1$, teiginys yra teisingas – sistema, sudaryta iš vienos lygties, yra trapecinė.

2. Tarkime, bet kurią $m - 1$ tiesinių lygčių sistemą elementariaisiais pertvarkiais galima pakeisti trapecine. Įrodysime teiginį m lygčių sistemai

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Jei visi koeficientai $a_{ij} = 0$, sistema būtų trapecinė. Tarkime, bent vienas jų, sakykime $a_{11} \neq 0$. Keičiame i-tąją lygtį $(i = \overline{2, m})$ tos lygties ir pirmosios lygties, padaugintos iš $-a_{i1} \cdot a_{11}^{-1}$, suma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

Čia

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \quad c_i = b_i - \frac{a_{i1}b_1}{a_{11}} \quad \left(i = \overline{2, m};\ j = \overline{2, n}\right).$$

Tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \ldots + b_{3n}x_n = c_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \ldots + b_{mn}x_n = c_n. \end{cases}$$

sudaro $m-1$ lygčių, taigi jai galime taikyti indukcinę prielaidą. Ji yra ekvivalenti trapecinei tiesinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \quad \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad c_{33}x_3 + \quad \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad 0 = d_m, \end{cases}$$

Čia $c_{22} \cdot c_{33} \cdot \ldots \cdot c_{rr} \neq 0$. Tada pradinė sistema yra ekvivalenti trapecinei sistemai pavidalo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \quad \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad 0 = d_m. \quad \triangle \end{cases}$$

Gauso, arba nežinomųjų eliminavimo būdas yra universalus būdas spręsti tiesines lygčių sistemas. Atskirais sistemų atvejais naudotini ir kiti sprendimo būdai. Panagrinėsime vieną jų.

4.5. Teorema. *Nagrinėkime tiesinių lygčių sistemą, kurios nežinomųjų skaičius sutampa su lygčių skaičiumi:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Be to, tarkime, kad determinantas, sudarytas iš koeficientų prie nežinomųjų, nelygus nuliui –

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada sistema turi vieną vienintelį sprendinį, randamą iš Kramerio formulių

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Čia D_i $(i = \overline{1,n})$ – determinantas, gautas iš determinanto D, pakeitus jame i-tąjį stulpelį laisvųjų narių stulpeliu.

Įrodymas. Padauginame i-osios ($i = \overline{1,n}$) lygties abi puses iš elemento a_{ij} ($j = \overline{1,n}$) algebrinio papildinio A_{ij} ir sudedame visų lygčių atitinkamas puses:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n = b_1, & \Big| \; A_{1j} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n = b_2, & \Big| \; A_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \Big| \; \ldots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n = b_i, & \Big| \; A_{ij} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \Big| \; \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n = b_n & \Big| \; A_{nj} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\big(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{i1}A_{ij} + \ldots + a_{n1}A_{nj}\big)x_1 + \\ &+ \big(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{i2}A_{ij} + \ldots + a_{n2}A_{nj}\big)x_2 + \ldots + \\ &+ \big(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj}\big)x_j + \ldots + \\ &+ \big(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{in}A_{ij} + \ldots + a_{nn}A_{nj}\big)x_n = \\ &= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_iA_{ij} + \ldots + b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

Pritaikę šios lygties koeficientams Laplaso teoremos išvadas, gauname lygtį

$$Dx_j = D_j \quad (j = \overline{1,n}).$$

Čia D_j – determinantas, gautas iš determinanto D, pakeitus jame j-tąjį stulpelį laisvųjų narių stulpeliu:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & .. & \ldots.. & .. & \ldots.. & .. & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Iš čia išplaukia sprendinio formulės:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}. \;\; \triangle$$

Paskaičiuosime neišsigimusiai matricai A atvirkštinę A^{-1} kitu būdu. Sprendžiame matricinę lygtį

$$AX = E.$$

Paprastumo dėlei laikykime, kad A yra trečios eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime X – nežinomųjų matricą:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Parašome matricinę lygtį išskleistu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sudauginę matricas ir sulyginę atitinkamus narius, gauname tris lygčių sistemas su trimis nežinomaisiais:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = 1, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 = 0, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 = 0, \\ a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3 = 1. \end{cases}$$

Šias sistemas sprendžiame Gauso būdu. Kadangi koeficientai prie nežinomųjų kiekvienoje iš sistemų yra vienodi, simboliškai šias sistemas galim užrašyti tokiu pavidalu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Čia dešinėje vertikalaus brūkšnio pusėje surašyti atitinkamų sistemų laisvieji nariai.

Elementariaisiais pertvarkiais kairiąją pusę pertvarkome taip, kad jos pagrindinėje įstrižainėje būtų vienetai, o visur kitur – nuliai. Sakykime, po tokių pertvarkių gavome išraišką

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right).$$

Tuomet nesunku matyti, kad atvirkštinė matrica A^{-1} turės pavidalą –

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

4.6. Pavyzdžiai.

1. Gauso būdu išspręsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Užrašę šią sistemą matriciniu pavidalu, ekvivalenčiaisiais pertvarkiais suvedame ją į trapecinį pavidalą:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Pasirenkame laisvai $x_5 = c_5 \in R$, $x_4 = c_4 \in R$. Tada

$$x_3 = \frac{1}{8}\big(4c_4 - 5c_5\big),$$

$$x_2 = \frac{1}{8}\big(-4c_4 + 5c_5\big),$$

$$x_1 = \frac{1}{8}\big(-4c_4 + 7c_5\big). \quad \triangle$$

2. Šiame paragrafe išnagrinėtu būdu paskaičiuosime matricos A atvirkštinę matricą:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matricos A determinantas $|A| = 3 \neq 0$, todėl atvirkštinė matrica egzistuoja. Sudarome sistemą

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Šiai sistemai spręsti taikome Gauso būdą:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2 \quad -1 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 6 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ + \quad 6 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} :3 \\ :(-1) \\ :(-1) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Vadinasi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{2}{3} & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

3. Išspręsime lygčių sistemą, taikydami Kramerio formules:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Pirmiausia paskaičiuojame sistemos determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -2 \quad -3 \quad -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -8 & 1 \\ -4 & -10 & 8 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -8 \quad -5 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 36 & 54 & 0 \\ 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 36 & 54 \\ 18 & 36 \end{vmatrix} = 18^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 324 \neq 0.$$

Vadinasi, sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galime paskaičiuoti, taikydami Kramerio formules:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},\ x_4 = \frac{D_4}{D}.$$

Paskaičiuojame determinantus D_1, D_2, D_3, D_4:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ {\scriptstyle -2\ \ 3\ \ 2} \end{array} = \begin{vmatrix} -10 & -4 & -7 & 0 \\ -16 & -10 & 4 & 0 \\ 20 & 8 & -5 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -10 & -4 & -7 \\ -16 & -10 & 4 \\ 20 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 & -7 \\ -4 & -5 & 2 \\ 10 & 8 & -5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -1} \\ \\ \end{array} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -4 & -5 & 2 \\ 10 & 8 & -5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} {\scriptstyle -4\ \ 10} \\ \\ \\ \end{array} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -9 & -18 \\ 0 & 18 & 45 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ 18 & 45 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot 9 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 324.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ {\scriptstyle -2\ \ 3\ \ 2} \end{array} = \begin{vmatrix} 4 & -10 & 7 & 0 \\ 8 & -16 & 4 & 0 \\ -1 & 20 & -5 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 4 & -10 & 7 \\ 8 & -16 & 4 \\ -1 & 20 & -5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle 8\ \ 4} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 70 & -13 \\ 0 & 144 & -36 \\ -1 & 20 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 70 & -13 \\ 144 & -36 \end{vmatrix} = 648.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -8 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ {\scriptstyle -2\ \ 3\ \ 2} \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -10 & 0 \\ 8 & -10 & -16 & 0 \\ -1 & 8 & 20 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 5 & -4 & -10 \\ 8 & -10 & -16 \\ -1 & 8 & 20 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle 8\ \ 5} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 36 & 90 \\ 0 & 54 & 144 \\ -1 & 8 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 36 & 90 \\ 54 & 144 \end{vmatrix} = -324.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} \overset{-2}{\downarrow} \overset{-3}{\downarrow} \overset{-2}{\downarrow} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -8 & -4 \\ -4 & -10 & -14 \\ -7 & -4 & -20 \end{vmatrix} {\uparrow}_{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 10 \\ -4 & -10 & -14 \\ -7 & -4 & -20 \end{vmatrix} \overset{-4}{\downarrow} \overset{-7}{\downarrow} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 10 \\ 0 & -18 & -54 \\ 0 & -18 & -90 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -18 & -54 \\ -18 & -90 \end{vmatrix} = -648.$$

Užrašome sistemos sprendinį:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2. \quad \triangle$$