3. MATRICOS

3.1. Apibrėžimas. *Tipo $m \times n$ stačiakampe matrica vadinama lenktiniais skliaustais suskliausta stačiakampė skaičių lentelė*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kai $m = n$, matrica vadinama n-tosios eilės kvadratine matrica.

3.2. Apibrėžimas. 1. *Matricos, turinčios tiek pat eilučių ir po tiek pat stulpelių, vadinamas vienarūšėmis.*

2. *Dvi vienarūšės matricos laikomos lygiomis, kai tų matricų atitinkamieji elementai yra lygūs.*

P.S. Dažnai naudojamas sutrumpintas matricos užrašas:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n},$$

arba

$$A = \left(a_{ij}\right),$$

kai eilučių ir stulpelių skaičiai yra iš anksto fiksuoti.

Vienarūšes matricas galima sudėti:

3.3. Apibrėžimas. *Matricų*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ir

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

suma vadinama matrica

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\big($Arba sutrumpintai:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})\big).$$

3.4. Teiginys. *Vienarūšių matricų aibė $R_{m\times n}$ sudėties atžvilgiu sudaro adicinę grupę.*

Įrodymas.

1) Sudėtis – komutatyvi:

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=(b_{ij}+(a_{ij})=B+A. \quad \triangle$$

2) Sudėtis – asociatyvi:

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=\big((a_{ij})+(b_{ij})\big)+(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})=\\&=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=a_{ij}+\big((b_{ij})+(c_{ij})\big)=A+B+C. \quad \triangle\end{aligned}$$

3) Aibei $R_{m\times n}$ priklauso nulinė matrica

$$O=(0),$$

tenkinanti savybę

$$A+O=(a_{ij})+(0)=(a_{ij}+0)=(a_{ij})=A. \quad \triangle$$

4) Su kiekviena matrica A aibei $R_{m\times n}$ priklauso priešinga matrica $-A=(-a_{ij})$:

$$A+(-A)=(a_{ij})+(-a_{ij})=(a_{ij}-a_{ij})=(0)=O. \quad \triangle$$

3.5. Apibrėžimas. *Skaičiaus c ir matricos $A=(a_{ij})$ sandauga vadiname matricą*

$$cA=(ca_{ij}).$$

3.6. Daugybos iš skaičiaus savybės.

1) *daugyba iš skaičiaus – asociatyvi*:

$$\begin{aligned}b\cdot(cA)&=b\big(c(a_{ij})\big)=b(ca_{ij})=(bca_{ij})=\\&=\big((bc)a_{ij}\big)=(bc)(a_{ij})=(bc)A. \quad \triangle\end{aligned}$$

2) *daugyba iš skaičiaus ir matricų sudėtis – distributyvi*:

$$\begin{aligned}c(A+B)&=c\big((a_{ij})+(b_{ij})\big)=c(a_{ij}+b_{ij})+\\&=\big(c(a_{ij}+b_{ij})\big)=(ca_{ij}+cb_{ij})=(ca_{ij})+(cb_{ij})=\\&=c(a_{ij})+c(b_{ij})=cA+cB. \quad \triangle\end{aligned}$$

3) daugyba iš skaičiaus ir skaičių sudėtis – distributyvi:

$$\begin{aligned}(b+c)A&=(b+c)(a_{ij})=\big((b+c)a_{ij}\big)=(ba_{ij}+ca_{ij})=\\&=(ba_{ij})+(ca_{ij})=b(a_{ij})+c(a_{ij})=bA+cA. \quad \triangle\end{aligned}$$

3.7. Apibrėžimas. *Matricų*

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad ir \quad B = (b_{ij})_{n\times k}$$

sandauga vadinama matrica

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{lk} \\ \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{lk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{ml}b_{lk} \end{pmatrix},$$

arba sutrumpintai:

$$A\cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right).$$

Su kiekviena kvadratine n-tosios eilės matrica galime susieti iš tos matricos elementų sudarytą determinantą.

3.8 Teorema. *Dviejų vienodos eilės matricų sandaugos determinantas lygus tų matricų determinantų sandaugai.*

Įrodymas. Imkime dvi n-tosios eilės kvadratines matricas $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$. Teoremai įrodyti pasinaudosime tarpininku – $2n$-tosios eilės determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Paskaičiuosime šį determinantą dviem skirtingais būdais. Išskleidę jį pirmųjų n eilučių minorais, taikydami Laplaso teoremą, gauname lygybę

$$D = |A|\cdot(-1)^{1+2+\dots+n+1+2+\dots+n}\cdot|B| =$$
$$= |A|\cdot|B|\cdot(-1)^{n(n+1)} = |A|\cdot|B|.$$

Pertvarkysime determinantą D tokiu būdu – prie i-osios eilutės ($i = \overline{1,n}$) paeiliui pridedame $(n+j)$-eilutę, padaugintą iš a_{ij} ($j = \overline{1,n}$). Gausime tokią determinanto D išraišką:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{ln} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{ln} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pastarąjį determinantą skleidžiame pirmųjų n eilučių minorais:

$$D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{1l}b_{ln} \\ \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{2l}b_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{l2} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{nl}b_{ln} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+\dots+2n} =$$

$$= |AB|(-1)^n(-1)^{n(2n+1)} = |AB|(-1)^{2n(n+1)} = |AB|. \quad \triangle$$

3.9. Apibrėžimai. 1. *Kvadratinė n-tosios eilės matrica vadinama neišsigimusiąja, kai jos determinantas nelygus nuliui, ir išsigimusiąja kitu atveju.*

2. *Matrica*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

vadinama vienetine.

P.S. Sutrumpinta forma vienetinę matricą galima užrašyti taip:

$$E = (\delta_{ij}).$$

Čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j; \\ 0, & \text{kai } i \neq j. \end{cases}$$

3. *Matricai A atvirkštine matrica, žymima A^{-1}, vadinama matrica, tenkinanti lygybę*

$$AA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

3.10. Naudingas teiginėlis. *Išsigimusioji matrica neturi atvirkštinės.*

Įrodymas. Tarkime, A yra išsigimusioji matrica, turinti atvirkštinę. Tuomet

$$AA^{-1} = E.$$

Vienetinės matricos E determinantas

$$|E| = 1.$$

Iš kitos pusės,

$$|E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1} = 0|A^{-1}| = 0.$$

Gavome prieštarą prielaidai, kad matrica turi atvirkštinę. $\triangle$

3.11. Dar naudingesnė teorema. *Neišsigimusioji matrica turi atvirkštinę.*

Įrodymas. Šios teoremos naudingumą paryškina faktas, kad mes ne tik įrodysime atvirkštinės matricos egzistavimą, bet ir parašysime jos konkrečią išraišką. Tarkime, $A = (a_{ij})$ yra neišsigimusioji matrica, $|A|$ – jos determinantas. Įrodysime, kad matrica

$$\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

yra duotai matricai A atvirkštinė. Čia narys A_{ij} yra matricos nario a_{ij} algebrinis papildinys. Įrodymui pakanka sudauginti šią matricą su duotąja ir pritaikyti Laplaso teoremos išvadas. Iš tikrųjų:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \times$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + \ldots + a_{1n}A_{2n} & \ldots & a_{11}A_{n1} + \ldots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + \ldots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + \ldots + a_{2n}A_{2n} & \ldots & a_{21}A_{n1} + \ldots + a_{2n}A_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1}A_{11} + \ldots + a_{nn}A_{1n} & a_{n21}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{2n} & \ldots & a_{n1}A_{n1} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \triangle$$

3.12. Teiginys. *Neišsigimusios n-tosios eilės kvadratinės matricos matricų sandaugos atžvilgiu sudaro multiplikacinę grupę.*

Įrodymas. Iš matricų sandaugos determinanto teoremos išplaukia, kad neišsigimusiųjų matricų sandauga yra taip pat neišsigimusioji matrica. Vadinasi, neišsigimusiųjų matricų aibėje $G = GL(n, R)$ apibrėžta algebrinė operacija – įprasta matricų sandauga.

1) Sandauga asociatyvi:

Tarkime,

$$A = (a_{ij}),\ \ B = (b_{ij}),\ \ C = (c_{ij}) \quad -$$

trys matricos. Turime lygybes:

$$(AB)C = \big((a_{ij})(b_{ij})\big)(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)$$

ir

$$A(BC) = (a_{ij})\big((b_{ij})(a_{ij})\big) = (a_{ij})\left(\sum_{l=1}^{n} b_{il}c_{lj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right).$$

Iš dešiniųjų pusių lygybės išplaukia sandaugos asociatyvumo savybė:

$$(AB)C = A(BC). \ \ \triangle$$

2) egzistuoja vienetinis elementas (vienetinė matrica E):

$$EA = AE = A. \ \ \triangle$$

3) kiekvienai matricai $A \in G$ egzistuoja atvirkštinė – A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E. \ \ \triangle$$

3.13. Pavyzdys. Paskaičiuosime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę. Šios matricos determinantas $|A| = 3 \neq 0$, todėl atvirkštinė A^{-1} egzistuoja. Iš teoremos 3.11 turime

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Skaičiuojame papildinius:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Vadinasi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{2}{3} & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$