2. DETERMINANTAI

Susiesime determinanto sąvokos įvedimą su konkretaus uždavinio sprendimu. Išspręskime dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{array}\right. \left|\begin{array}{r} a_{22}\\ (-a_{12})\end{array}\right|\begin{array}{r}(-a_{21})\\ a_{11}\end{array}$$

Čia a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – koeficientai prie nežinomųjų (be to, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$), o b_1, b_2 – laisvieji nariai. Nuosekliai panaikinkime kiekvienoje lygtyje po nežinomąjį. Tuo tikslu pirmiausia padauginame pirmosios lygties abi puses iš a_{22}, antrosios – iš $-a_{12}$ ir sudedame. Gauname lygtį

$$x_1\big(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\big)=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

Atitinkamai padauginę pirmosios lygties abi puses iš $-a_{21}$, o antrosios – iš a_{11}, ir sudėję, gauname lygtį

$$x_2\big(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\big)=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

Atkreipę dėmesį, kad koeficientai prie nežinomųjų yra tie patys (ir iš sąlygos – nenuliniai), padalinę iš jų, gauname vieną vienintelį sprendinį

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Sprendinį sudaro keistos sandaugų po du narius skirtumų išraiškos, turinčios neabejotino panašumo. Pabandykime jas užšifruoti kažkokiu būdu, kad galima būtų jas paprasčiau atsiminti. Ir atsiminti jas labai naudinga, nes tokio tipo sistemos ir nebebūtina spręsti, o, patikrinus sąlygą, kad $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, pakanka tiesiog užrašyti sprendinio išraišką.

Simboliu $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ pažymėkime išraišką $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Vadinasi, šis skaičius gaunamas pagal paprastą taisyklę – pagrindinės įstrižainės (iš kairės į dešinę) ir šalutinės įstrižainės (iš dešinės į kairę) narių sandaugų skirtumas. Tuo pačiu simboliu galima užšifruoti ir abu skaitiklius. Iš tikrųjų,

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{11}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{21}b_2\quad\text{ir}\quad\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

Tokiu būdu, sprendinį galime užrašyti taip:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{21}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

Taigi yra prasmė išskirti tokius simbolius ir suteikti jiems atskirą pavadinimą.

2.1. Apibrėžimas. *Skaičių* a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} *determinantu vadiname skaičių, žymimą simboliu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

lygų pagrindinės įstrižainės ir šalutinės įstrižainės narių sandaugų skirtumui $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Sprendžiant trijų tiesinių lygčių su trim nežinomaisiais sistemą, figūruoja panašios išraiškos, tik sudėtingesnės. Yra prasminga apibrėžti ir trečios eilės determinantą.

2.2. Apibrėžimas. *Skaičių* a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} *determinantu vadiname skaičių, žymimą simboliu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ir lygų algebrinei sumai visų galimų sandaugų po tris, paimtų iš kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

P.S. Ženklų $+$ ir $-$ prasmę išsiaiškinsime vėliau. Bet kurios eilės determinanto apibrėžimui reikia papildomų žinių – kėlinio, keitinio, jų netvarkų skaičiaus sąvokų.

2.3. Apibrėžimas. *Bet kuris skaičių* $1, 2, 3, ..., n$ *rinkinys*

$$\big(a_1, a_2, ..., a_n\big)$$

vadinamas n *natūraliųjų skaičių kėliniu.*

Du kėliniai laikomi lygiais, kai jų skaičių tvarka sutampa.

Nesunku įsitikinti, kad iš viso galima sudaryti $n!$ skirtingų kėlinių.

2.4. Apibrėžimas. 1. *Dviejų kėlinio skaičių sukeitimas vietomis vadinamas tų skaičių transpozicija.*

2. *Jei skaičius* i *kėlinyje yra užrašytas prieš skaičių* j *ir* $i > j$*, tai sakoma, kad tie skaičai sudaro netvarką.*

3. *Kėlinio netvarkų skaičiumi vadiname visų jo skaičių porų sudarytą netvarkų skaičių.*

4. *Kėlinys, kurio netvarkų skaičius yra lyginis, vadinamas lyginiu, o kurio netvarkų skaičius yra nelyginis – nelyginiu.*

2.5. Transpozicijos savybė. *Atlikus vieną kėlinio skaičių transpoziciją, gaunamas priešingo lyginumo kėlinys.*

Įrodymas. Tarkime, darome skaičių porai i, j transpoziciją – j, i. Nagrinėkime du atvejus:

1) skaičiai i ir j parašyti greta vienas kito. Tuomet kėlinį galime užrašyti taip:

$$\bigl(a_1, a_2, ..., a_k, i, j, b_1, b_2, ..., b_l\bigr).$$

Po transpozicijos gausime kėlinį

$$\bigl(a_1, a_2, ..., a_k, j, i, b_1, b_2, ..., b_l\bigr).$$

Prieš transpoziciją ir po jos skaičiai i ir j su skaičiais $a_1, a_2, ..., a_k$ ir $b_1, b_2, ..., b_l$ sudaro tą patį netvarkų skaičių. Jei skaičiai i ir j nesudarė netvarkos, tai po transpozicijos – sudarys ir atvirkščiai – jei prieš transpoziciją tie skaičiai sudarė netvarką, tai po transpozicijos nesudarys. Ir vienu, ir kitu atvejais gauname priešingo lyginumo kėlinį.

2) Tarkime, kad tarp keičiamųjų skaičių i ir j yra t kėlinio skaičių:

$$\bigl(a_1, a_2, ..., a_k, i, c_1, c_2, ..., c_t, j, b_1, b_2, ..., b_l\bigr).$$

Nuosekliai keisdami i su c_1, su c_2, ir t.t. – su c_t, su j, o po to – j su c_t, su c_{t-1} ir t.t. – su c_1, gausime kėlinį

$$\bigl(a_1, a_2, ..., a_k, j, c_1, c_2, ..., c_t, i, b_1, b_2, ..., b_l\bigr).$$

Iš viso atlikome $t + 1 + t = 2t + 1$ transpoziciją tarp gretimų kėlinio skaičių, o kiekviena jų keičia kėlinio lyginumą. Kadangi tokių transpozicijų yra nelyginis skaičius, tai kėlinio, gauto, sukeitus i ir j vietomis, lyginumas virs priešingu. $\triangle$

2.6. Išvada. *Iš viso yra $\frac{n!}{2}$ lyginių ir $\frac{n!}{2}$ nelyginių kėlinių.*

Įrodymas. Tarkime, iš viso yra a lyginių ir b nelyginių kėlinių. Tuomet $a + b = n!$. Kiekviename lyginiame kėlinyje atlikę po vieną transpoziciją, gausime a nelyginių kėlinių, todėl $a \leqslant b$ (nes b – visų nelyginių kėlinių skaičius). Analogiškai atlikus po vieną transpoziciją su nelyginiais kėliniais, galima užrašyti nelygybę $b \leqslant a$. Iš čia išplaukia lygybė

$$a = b.$$

Todėl $a + a = n!$ ir $a = b = \frac{n!}{2}$. $\triangle$

2.7. Apibrėžimai. 1. *Aibės X atvaizdžiu aibėje Y vadiname taisyklę φ, pagal kurią kiekvienam elementui $x \in X$ yra priskiriamas vienas ir tik vienas aibės Y elementas $y = \varphi(x)$.*

2. *Atvaizdį $\varphi : X \to Y$ vadiname injekcija, kai iš sąlygos $x_1 \neq x_2$ išplaukia, kad $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.*

3. *Atvaizdį* $\varphi : X \to Y$ *vadiname surjekcija, kai kiekvienam elementui* $y \in Y$ *egzistuoja* $x \in X$ *toks, kad* $\varphi(x) = y$.

4. *Atvaizdį* $\varphi : X \to Y$ *vadiname bijekcija, kai jis kartu yra ir injekcija, ir surjekcija.*

Nagrinėsime baigtinės aibės $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ bijekcijas į save.

2.8. Apibrėžimas. *Baigtinės aibės X bijekciją į save vadiname keitiniu.*

Tarkime, keitiniu σ skaičius 1 pervedamas į a_1, 2 – į a_2, ir t.t., n – į a_n. Visą keitinį galime užrašyti dviem eilutėmis:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Kadangi σ – bijekcija, visi vaizdai $a_1, a_2, ..., a_n$ yra skirtingi, todėl iš šių skaičių galima sudaryti kėlinį $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Todėl aišku, kad keitinių yra tiek pat, kiek ir kėlinių – $n!$.

2.9. Teorema. *Keitinių aibė* S_n *keitinių kompozicijos atžvilgiu sudaro grupę.*

Įrodymas. Apibrėžkime keitinių aibėje algebrinę operaciją. Tarkime,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix},$$

du fiksuoti keitiniai. Jų kompozicija, žymima $\sigma \circ \tau$, yra keitinys

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}.$$

1) Įrodysime, kad taip apibrėžta algebrinė operacija yra asociatyvi. Tarkime,

$$\kappa = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}$$

– trečiasis keitinys. Turime

$$(\sigma \circ \tau) \circ \kappa = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}.$$

Iš kitos pusės,

$$\sigma \circ (\tau \circ \kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}.$$

Vadinasi, $(\sigma \circ \tau) \circ \kappa = \sigma \circ (\tau \circ \kappa)$.

2) *Vienetiniu elementu* yra keitinys

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}.$$

Iš tikrųjų,

$$\sigma \circ id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} = \sigma.$$

3) *Atvirkštiniu elementu* keitiniui

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

yra keitinys

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}.$$

Iš tikrųjų,

$$\sigma \circ id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix} = id. \quad \triangle$$

2.10. Apibrėžimas. *Keitinys vadinamas lyginiu, kai jo eilučių netvarkų skaičius yra lyginis, ir nelyginiu, kai tas skaičius yra nelyginis.*

Nesunku įsitikinti, kad keitinio lyginumas nepriklauso nuo stulpelių išdėstymo tvarkos.

2.11. Apibrėžimas. *Skaičių* $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}$ *n-otosios eilės determinantu, žymimu*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

vadiname $n!$ *narių sumą* D*, kurios kiekvienas dėmuo yra* n *elementų, paimtų iš determinanto kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio, sandauga su ženklu* $(-1)^{I(\sigma)}$ *(čia* $I(\sigma)$ *– keitinio* σ*, sudaryto iš tos sandaugos dauginamųjų pirmųjų ir antrųjų indeksų, netvarkų skaičius).*

Simboliškai determinanto reikšmę D galima užrašyti taip:

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n},$$

čia sumuojame pagal visus n-tojo laipsnio keitinius σ.

2.12. Determinantų savybės.

1. *Sukeitus determinante eilutes ir stulpelius vietomis, jo reikšmė nesikeičia:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Įrodymas. Šią savybę ir kitas įrodysime trečios eilės determinantams. Bet kurios eilės determinantams įrodymus galima rasti A. Matuliausko ,,Algebros" vadovėlyje. Performulavę savybes, kai $n = 3$, turime įrodyti lygybę

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Pakanka paskaičiuoti abu determinantus, taikant apibrėžimą. Iš tikrųjų,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad \triangle$$

Išvada. *Determinanto eilutės ir stulpeliai yra lygiaverčiai.*

Kitas determinantų savybes formuluosime tik eilutėms – jos tiks ir stulpeliams.

2. *Sukeitus dvi determinanto eilutes vietomis, jo reikšmė virsta priešinga:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Konkrečiai įrodymui sukeisime pirmąją ir trečiąją eilutes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Išskleiskime abu determinantus, taikydami apibrėžimą:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} =$$
$$= -\big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\big) = -D. \quad \triangle$$

Išvada. *Determinantas, turintis dvi vienodas eilutes, lygus nuliui*:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Tarkime, i-toji ir j-toji eilutės determinante D yra lygios. Sukeitę i-tąją ir j-tąją eilutes, taikydami 2 savybę, gausime priešingos reikšmės determinantą $-D$. Iš kitos pusės, pati determinanto išraiška, o tuo pačiu ir jo reikšmė, nepasikeis. Todėl

$$D = -D.$$

Iš čia gausime $D = 0$. $\triangle$

3. *Bendrą kurios nors determinanto eilutės narių daliklį galima iškelti prieš determinanto ženklą*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Įrodymas. Turime įrodyti lygybę

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vėlgi taikome determinanto apibrėžimą:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{22}a_{23} + a_{12}ka_{23}a_{31} + a_{13}ka_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}ka_{22}a_{31} - a_{12}ka_{21}a_{33} - a_{11}ka_{23}a_{32} =$$

$$= k\big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\big) =$$

$$= k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \triangle$$

Išvada. *Determinantas, turintis dvi proporcingas eilutes, lygus nuliui*:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodymas. Iškėlę iš j-tosios eilutės bendrą daliklį k gauname determinantą su dviem lygiom eilutėm, kuris pagal 2-osios savybės išvadą lygus nuliui. $\triangle$

4. *Jei determinanto kurios nors eilutės nariai yra dviejų dėmenų sumos, tai tas determinantas lygus sumai dviejų determinantų, kurių viename minėtąją eilutę sudaro pirmieji dėmenys, kitame – antrieji dėmenys, o likusios eilutės visuose trijuose determinantuose vienodos:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Įrodymas. Įrodysime analogišką lygybę, kai $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Įrodymui vėlgi iš esmės pakanka pritaikyti determinanto apibrėžimą:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\big(b_{22}+c_{22}\big)a_{33} + a_{12}\big(b_{23}+c_{23}\big)a_{31} + a_{13}\big(b_{21}+c_{21}\big)a_{32} -$$

$$- a_{13}\big(b_{22}+c_{22}\big)a_{31} - a_{12}\big(b_{21}+c_{21}\big)a_{33} - a_{11}\big(b_{23}+c_{23}\big)a_{32} =$$

$$= \big(a_{11}b_{22}a_{33} + a_{12}b_{23}a_{31} + a_{13}b_{21}a_{32} - a_{13}b_{22}a_{31} - a_{12}b_{21}a_{33} - a_{11}b_{23}a_{32}\big) +$$

$$+ \big(a_{11}c_{22}a_{33} + a_{12}c_{23}a_{31} + a_{13}c_{21}a_{32} - a_{13}c_{22}a_{31} - a_{12}c_{21}a_{33} - a_{11}c_{23}a_{32}\big) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad \triangle$$

Išvada (Taikome praktiniam determinantų skaičiavimui). *Prie bet kurios determinanto eilutės narių pridėjus atitinkamus kitos eilutės narius, padaugintus iš kurio nors skaičiaus, determinanto reikšmė nepasikeis*:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Big\downarrow{\scriptstyle k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \dots & a_{jn}+ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Įrodymas. Įrodymas išplaukia iš 4-osios savybės bei 3-osios savybės išvados. $\triangle$

2.13. Apibrėžimai.

1. *Jei n -tosios eilės determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

parinksime k eilučių su indeksais $i_1, i_2, ..., i_k$ bei k stulpelių su indeksais $j_1, j_2, ..., j_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, tai iš determinanto narių, esančių pasirinktų eilučių ir stulpelių sankirtoje, sudarytas k-tosios eilės determinantas vadinamas k-tosios eilės minoru ir žymimas

$$M = M\big(i_1, i_2, ..., i_k; j_1, j_2, ..., j_k\big).$$

2. *Išbraukus determinanto eilutes ir stulpelius, einančius per minorą M, iš likusių determinanto narių sudarytas $n-k$-osios eilės determinantas vadinamas minoro M papildomuoju minoru ir žymimas $M' = M'(i_1, i_2, ..., i_k; j_1, j_2, ..., j_k\big)$.*

3. *Minoro M algebriniu papildiniu vadinama sandauga*

$$A_M = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+jk} \cdot M'\big(i_1, i_2, ..., i_k; j_1, j_2, ..., j_k\big).$$

4. *Minoro $M(i;j)$ algebrinis papildinys vadinamas nario a_{ij} algebriniu papildiniu ir žymimas A_{ij}.*

2.14. Laplaso teorema. *Jei n-osios eilės determinante parinksime k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ eilučių ir iš jų narių sudarysime visus galimus k-tosios eilės minorus, tai tų minorų ir jų algebrinių papildinių sandaugų suma bus lygi tam determinantui.*

Įrodymas. Įrodysime teoremą 3-osios eilės determinantui

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

pasirinkę, pavyzdžiui, pirmąją ir trečiąją eilutes. Parašysime iš tų eilučių sudarytų visų galimų 2-osios eilės minorų ir jų algebrinių papildinių sandaugų sumą:

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \cdot a_{23} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \cdot a_{22} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot a_{21}.$$

Pertvarkę sumą S, gauname teoremos dalinį įrodymą:

$$S = a_{11}a_{32}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{22} - a_{13}a_{31}a_{22} +$$

$$+ a_{12}a_{33}a_{21} - a_{13}a_{32}a_{21} = D. \quad \triangle$$

1 išvada. *n-osios eilės determinantas lygus jo bet kurios eilutės (arba stulpelio) narių ir jų algebrinių papildinių sandaugų sumai*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Įrodymas. Pritaikome Laplaso teoremą, laikydami joje $k = 1$. $\triangle$

2 išvada. *n-tosios eilės determinanto kurios nors eilutės narių ir kitos eilutės atitinkamų narių algebrinių papildinių sandaugų suma lygi* 0:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

Įrodymas. Pritaikome 1-ąją išvadą determinantui su dviem lygiomis eilutėmis, skleisdami j-ąją eilute:

$$0 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}. \quad \triangle$$

Konkrečios eilės determinantus patogu skaičiuoti, naudojant 4-osios savybės išvadą bei Laplaso teoremos 1-ąją išvadą.

2.15. Pavyzdys. Paskaičiuokime determinantą

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}. \quad \overset{-1}{\downarrow}\ \overset{-2}{\downarrow}\ \overset{-2}{\downarrow}$$

Padauginę 1-osios eilutės narius atitinkamai iš -1, -2, -2 ir sudėję su atitinkamais 2-osios, 3-osios ir 4-osios eilučių nariais, gausime

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Skleidžiame determinantą 1-uoju stulpeliu:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \quad \overset{-1}{\downarrow}$$

Padauginę 1-osios eilutės narius iš -1 ir sudėję su atitinkamais 3-iosios eilutės nariais, gausime

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Skleidžiame determinantą 1-uoju stulpeliu:

$$D = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$