Tikimybių mokslo pagrindai

Vilius Stakėnas

1575

Vilniaus
universiteto
leidykla

VILNIUS 2017

Apsvarstė ir rekomendavo spaudai
Vilniaus universiteto Matematikos
ir informatikos fakulteto taryba
(2016 m. gruodžio 15 d.; protokolas Nr. 9)

Recenzentai:
prof. dr. V. MACKEVIČIUS
Vilniaus universitetas

doc. dr. J. NORKŪNIENĖ
Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Leidinio bibliografinė informacija pateikiama
Lietuvos nacionalinės Martyno Mažvydo bibliotekos
Nacionalinės bibliografijos duomenų banke (NBDB)

ISBN 978-609-459-806-7 (internete)
ISBN 978-609-459-807-4 (spausdintinis)

Turinys

Pratarmė

Vienas iš tikimybių teorijos kūrėjų – S. Laplasas[1]. Jis tikimybių teorijos esmę apibūdino maždaug taip: tikimybių teorija yra sveika mūsų nuovoka, paversta skaičiavimais. Kitaip tariant – tikimybių teorija pagrindžia skaičiais tai, ką intuityviai ir taip jaučiame. Tada tokia nuomonė gana tiksliai nusakė šio mokslo padėtį ir esmę. Tačiau daug laiko nutekėjo po to, kai Laplasas parašė šiuos žodžius ir padėjo plunksną. Geri du šimtai metų! Laiko srovė išplovė nemažai tiesos iš Laplaso teiginio. Tikimybių teorijos turinys, vaidmuo ir raidos kryptis pasikeitė labai smarkiai. Kokia gi jos vieta mūsų žinių sistemoje?

Galima teigti, kad aiškų požiūrį, kas yra tikimybių teorija, žmonės sukūrė gana neseniai. S. Laplaso laikais ne visi matematikai buvo linkę suteikti tikimybių teorijai neginčytiną teisę vadintis matematikos sritimi. Iš tiesų, ką nagrinėja ši teorija? Įvykius, ir dar tokius, apie kuriuos negalima pasakyti, įvyks jie ar ne! Ką bendro šios neapčiuopiamos esybės turi su griežtais ir aiškias geometrijos ar algebros dėsniais? Tačiau pažvelgę gilyn įsitikinsime, kad ir klasikinių matematikos krypčių – geometrijos ir algebros – sąvokos ir įžvalgos atsirado iš nelabai aiškiai apibrėžtos empirinės patirties. Juk prieš teorinius geometrijos ir algebros mokslus kažkada buvo tik kasdienė matavimo ir skaičiavimo patirtis.

Tikimybių teorija išaugo iš dviejų skirtingų žmonių veiklos sričių – azartinių lošimų ir duomenų rinkimo bei vertinimo praktikos. Abu užsiėmimai labai seni. Seniausio lošimo kauliuko, surasto dabartinio Irako žemėje, amžius – apie 5 tūkstančius metų. Gyventojų ir turto surašymai taip pat vyko labai seniai. Juos vykdė ir senojo Izraelio karaliai, ir Romos imperatoriai... Tačiau praėjo daug laiko, kol lošimus ir surinktus duomenis pradėta analizuoti pasitelkus skaičiavimus. Kas buvo pirmasis? Į tokį klausimą beveik niekada neįmanoma pateikti aiškaus ir galutinio atsakymo. Todėl paminėkime tik du žmones, pažymėdami, kad panašių idėjų užuomazgų galima rasti ir gilesnėje praeityje. Taigi – Džirolamo Kardanas[2]

[1]Pierre-Simon Laplace, 1749–1827.
[2]Gerolamo Cardano, 1501–1576.

apie 1564 metus parašė pirmąjį veikalą, skirtą dėsniams, kuriems paklūsta azartiniai lošimai. Jis ją taip ir pavadino: „Knyga apie azartinius lošimus“ (*Lîber de Ludo Aleae* lot.). Ši knyga, deja, nepadarė didelės įtakos tikimybių teorijos raidai, nes nepatraukė amžininkų dėmesio ir buvo išspausdinta tik 1663 metais. Džonas Grauntas[3] savo 1662 metais pasirodžiusioje knygoje „Natūralistinės ir politinės įžvalgos, gautos iš mirtingumo lentelių“ (*Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*) išdėstė išvadas, kurias padarė tirdamas Londone periodiškai spausdintas „mirtingumo“ lenteles. Iki D. Graunto tomis lentelėmis domėtasi tik iš įprastinio žmogiško, bet ne mokslinio smalsumo.

Dabar tikimybių teorijos ir statistikos vaidmenį bei reikšmę galime apibūdinti aiškiai ir tiksliai: tai matematikos šaka ir tuo pačiu metu – praktinės veiklos patarėja, t. y. taikomasis mokslas. Tačiau ir dabar kartais tenka išgirsti nuomonę, kad ji nieko vertingo praktikai patarti negali.

Prisiminiau, kaip kartą gana atkakliai ginčijausi su jaunuoliu, gynusiu nuomonę, kad tikimybių teorija nereikalinga, nes visus jos praktinius uždavinius galima išspręsti naudojantis vien tik procentais. Išspręsti, žinoma, galima; kartais gaunami tie patys atsakymai kaip ir remiantis teorija. Tačiau visada kyla klausimas: kodėl turime pasitikėti tokiais sprendimais? Atsakydami į tai žmonės iš tiesų pradeda dėstyti savo „teoriją“, supintą iš neišgrynintų sąvokų ir „sveikos nuovokos“ įžvalgų. Tačiau dabartinė tikimybių teorija gali pateikti teisingų išvadų, kurios ne tik neprieinamos „sveikai“ nuovokai, bet netgi jai prieštarauja. Panagrinėkime kad ir tokį „žaislinį“ pavyzdį. Ant stalo yra 9 sveikos taurės ir viena nežymiai įskilusi. Du žmonės vienas po kito atsitiktinai ketina pasirinkti po taurę. Kuris yra geresnėje padėtyje, t. y. kurio galimybės pasirinkti gerą taurę didesnės – pirmojo ar antrojo? Kartais žmonių nuomonės šiuo klausimu išsiskiria, taigi „sveika“ nuovoka pakužda skirtingas išvadas.

Gyvenime viskas be paliovos keičiasi. Būtina ir įmanoma numatyti svarbiausias raidos tendencijas, tačiau neįmanoma visko suplanuoti detaliai. Taigi kasdien privalome rinktis vieną iš kelių tikėtinų baigčių arba raidos scenarijų. Štai tada ir prisireikia argumentuotų kriterijų. Tada ir prisimenama tikimybių teorija. Tačiau ji ne Delfų orakulas, ji atsako ne į visus klausimus, o tik į tinkamai suformuluotus! Kad tinkamai suformuluotume klausimą, turime išmanyti tikimybių teorijos sąvokų sistemą, jos žinių pagrindus.

Tokie pagrindai ir dėstomi šiame vadovėlyje. Jį sudaro keturios dalys. Pirmojoje apžvelgiama tikimybių teorijos raida nuo pirmųjų įžvalgų iki brandaus mokslo. Antrojoje, pavadintoje „Tikimybinė erdvė“, kuriama tikimybių skaičiavimo „scena“, t. y. visi teorijos reikmenys ir metodai. Galima įsivaizduoti, kad šios dalies tikslas – sukurti atsitiktinių įvykių „matavimo“ instrumentus, kuriais pasinaudoję galime nustatyti, kurie įvykiai yra dažnesni, kurie retesni, t. y. kuriais galima daugiau, kuriais mažiau pasikliauti.

[3] John Graunt, 1620–1674.

Trečioji dalis skiriama atsitiktiniams dydžiams. Tai dydžiai, susiję su atsitiktiniais įvykiais, įgyjantys dažniausiai skaitines reikšmes. Pavyzdžių ilgai ieškoti netenka: juk nežinote, kiek elektroninio pašto laiškų gausite per dieną, kiek laiko teks praleisti transporto kamščiuose... Trečiojoje dalyje išdėstyti atsitiktinių dydžių savybėms reikšti naudojami įrankiai ir charakteristikos. Svarbiausias šios dalies skyrelis yra ir pats trumpiausias. Jame suformuluota centrinė ribinė teorema. Tačiau kad gerai suvoktumėte, ką ji teigia ir kodėl yra svarbi, teks pastudijuoti kone visus pirmesniuosius puslapius!

Ketvirtoji dalis skiriama statistikos metodams ir uždaviniams. Statistikos prisireikia, kai, tirdami tam tikrą tikrovės reiškinį, sukaupiame didelį kiekį duomenų. Tirdami duomenis norėtume pasinaudoti tikimybių teorijos modeliais ir formuluoti tam tikras išvadas. Kaip tai padaryti – matematinės statistikos rūpestis.

Žymus danų dailininkas Peteris Stormas kartą tarė: „Sunkus yra gyvenimas, bet matematika dar sunkesnė.“ Skubu nuraminti – šis tikimybių teorijos ir matematinės statistikos vadovėlis nėra sausos ir griežtos matematikos knyga. Tačiau ji gali praversti ir tiems, kurie ketina studijuoti „tikrai matematinę“ tikimybių teorijos knygą. Juk daug geriau leistis į žygį, turint daugmaž aiškius vaizdinius to, su kuo teks susidurti. Verta paminėti kuklią budistinę ištarmę, kuria nesiliauju žavėtis: „Nepatyrę nušvitimo, turi studijuoti turinį, o patyrę – formą.“

1 skyrius

Kaip tai atsirado?

1.1 Dvi šakos

Burtai ir lošimai kauliukais, loterijos... Labai ilgai žmonės manė, kad tai paklūsta tik dievų ar likimo valiai. Nuojauta, kad ir čia slypi tam tikri dėsniai, brendo lėtai.

Taip būna beveik visada: pirmiausia veiksmas, o paskui mintis. Arba mintis – veiksmas, kuris rodo, kad mintis nebuvo itin gera – vėl mintis...

Kiekviena teorija yra geriau ar blogiau suderintų sąvokų ir idėjų sistema. Galime neabejoti – ji išaugo iš praktinės žmonių veiklos, netgi jei dabar tos praktinės veiklos teorijoje nebėra nė atspindžio.

Taigi – kokia praktinė žmonių veikla iškėlė klausimus, į kuriuos bandant atsakyti atsirado tikimybių teorija?

Tikimybių teorija išplėtojo ir paaiškino net dviejų veiklos rūšių patirtį. Vienas žmonių užsiėmimas, parengęs dirvą tikimybių teorijos pagrindams, – azartiniai lošimai. Užsiėmimas gana malonus ir nerūpestingas. Kitas užsiėmimas gerokai rimtesnis ir sunkesnis: išteklių (žmonių, žemės, pastatų ir kitokių turtų) apskaita. Kitaip tariant – įvairūs surašymai...

Astragalas – lošimo kauliukų protėvis

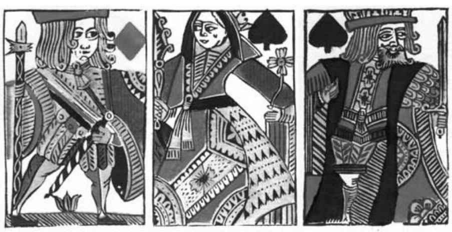
Abu užsiėmimai labai seni ir labai skirtingi. Lošimai yra pramoga, o surašymai – darbas, rūpestis dėl turto.

Tačiau tikriausiai ir azartiniai lošimai, kuriuose sėkmę ar nesėkmę lemia nenuspėjamas lošimo kauliukų elgesys ar kortų išsidėstymas, taip pat turi anaiptol ne lengvabūdišką priešistorę. Tais tolimais laikais, kai daugybė dievų valdė visa, kas žemėje vyko, žmonės burtais bandydavo sužinoti dievų, kurie niekada nieko nepasako tiesiai-šviesiai, nuomones. Žinomas ir tokių burtų įrankis, kurį naudojo Artimųjų Rytų tautos ir graikai – astragalas, kanopinių žinduolių užpakalinių kojų kaulas. Šio ketursienio kaulo sienos yra apyplokštės, dvi plačios, dvi siauros. Jeigu kaulą mesime, kuri siena bus viršutinė, žinos tik lemtį valdantys dievai. Taigi iš anksto nenuspėjama baigtis – pranašystė, informacijos iš dievų pasaulio „nutekėjimas“. Gudrus vis dėlto būdas iškvosti arogantiškas, amžinai tylinčias dievybes!

Nugludinus astragalą galima pasigaminti ir šešiasienį kauliuką! Tarpupio gyventojai (tikriausiai, sumanieji šumerai) šešiasienius kauliukus gamino ir iš molio. Irako žemėje rastas toks kauliukas pagamintas apie 3000 m. pr. Kr.!

Taigi lošimo kauliukai – iš pradžių burtams, o vėliau įrankis nuoboduliui išblaškyti. Tokį lošimų taikymą mini Homeras: graikų kareiviai lošę kauliukais leisdami nuobodžias Trojos apsiausties valandas. Dar įdomesnį lošimų taikymo atvejį mini Herodotas rašydamas apie Lidijos gyventojus maždaug 1500 m. pr. Kr. kamavusį badmetį. Kad pamirštų kankinantį alkio jausmą, lidiečiai esą sugalvoję įvairių lošimų su astragalu, kamuoliu ir kitokių, lošdavo visą dieną. Įsitraukę į lošimus užmiršdavo alkį, o valgydavo tik kas antrą dieną...

Europiečiai irgi neatsispyrė lošimo kauliukų burtams. Lošė ir Romos imperatoriai, ir paprasti romėnai. Net Markas Aurelijus – Romos imperatorius ir didis filosofas – lošė. Romėnų nuomone, kuria puse atvirs mestas lošimo kauliukas, sprendė Dzeuso dukra Fortuna.



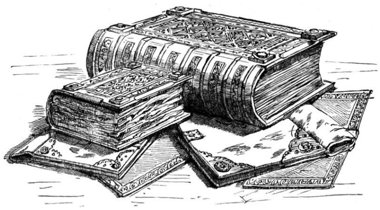
Europiečiai kortomis pradėjo lošti apie 1370 metus. Apie lošimų kortomis istoriją galite daugiau sužinoti atsivertę tinklalapį http://www.wopc.co.uk/

Vėliau atsirado dar ir kitas burtų bei lošimų įrankis – kortos. Jas europiečiai irgi atsigabeno iš Rytų. Kortas į Europą parvežė likę gyvi kryžiaus karų entuziastai. Kaip ir šachmatus bei sausainius, beje... Keturi kortų karaliai tuomet nebuvo abstrakčių karalysčių valdovai kaip dabar. Kryžius tada valdė žydų karalius Dovydas, širdis – frankų karalius Karlas, vynus – graikų valdovas Aleksandras Didysis, o būgnus – Julius Cezaris.

O dar vėliau atsirado loterijos. Savotiškos loterijos buvo rengiamos senovės Kinijoje 100 m. pr. Kr., pajamos iš jų buvo naudojamos didingo sumanymo – didžiosios kinų sienos statybos finansavimui. Įvairių šalių vyriausybės naudojo loterijas kaip pajamų šaltinius svarbiems projektams finansuoti. Europoje loterijų populiarintoja teisinga laikyti Olandiją. Pats žodis „lot“ olandiškai reiškia lemtį. Olandai pirmieji pradėjo rengti loterijas vien tik su piniginiais prizais. Jų valstybinė loterija *„staatsloterij“*, pradėta rengti 1732 metais, veikia iki šiol!

Taigi azartinių lošimų istorija tūkstantmetė. Tačiau bandymai matematiškai nagrinėti jų dėsnius labai vėlyvi.

O dabar – apie kitą užsiėmimą, iš kurio taip pat išaugo tikimybių teorijos sąvokos ir uždaviniai. Gyventojų ir turto surašymai pirmiausia parūpo valdovams. Tokius surašymus vykdė senojo Izraelio karaliai, romėnų imperatoriai... Kas ten buvo surašyta, jau nepaskaitysime. O štai apie Viljamo Užkariautojo, 1085–1086 metais vykdytą Anglijos gyventojų ir turto surašymą, galime sužinoti, nes įrašų knygų išliko. Šių knygų žinios yra labai patikimos, nes pateikėjai jų tikrumą turėjo patvirtinti priesaika.



Apie Viljamo Užkariautojo vykdytą surašymą daugiau galima sužinoti atsivertus tinklalapį http://www.domesdaybook.co.uk

Tačiau tokie surašymai buvo labai reti ir duomenys skirti veikiau peržiūrai nei išsamiam tyrimui. Galėtume pavadinti šiuos duomenis statistiniais, bet kol atsirado statistika, praėjo ne vienas šimtmetis.

Gerai žinoma, kad labai dažnai žmones veiklai įkvepia įvairios bėdos. Vargu ar būta didesnės bėdos viduramžius pabaigusioje ir modernėti pradėjusioje Europoje nei maras. Maras užeidavo ir šienaudavo nesirinkdamas. 1532 metais Londone buvo sumanyta imtis mirusiųjų surašinėjimo, šitaip bandant nustatyti, ar neartėja eilinė maro šienapjūtė. Vėliau surašymo duomenis buvo pradėta spausdinti, svarbiausia – reguliariai. Susikaupė didelis kiekis duomenų, kuriems buvo lemta tapti pirmosios statistinės analizės medžiaga.

Verta paminėti dar vieną veiklos sritį, kuria žmonės, gyvenimo pamokyti, suskato užsiimti – draudimo sistemos kūrimą.

1.2 Italai

Lukas Pačiolis: pirmieji uždaviniai apie lošimus matematikos knygoje. Džirolamo Kardanas: pirmasis bandymas matematiškai tyrinėti lošimus – neišgydomos ligos šaltinį!

Kas įsitraukia į lošimus, tas apie jokias teorijas nemąsto. Taigi – kas ir kada „teoriškai“ pradėjo galvoti apie atsitiktinius įvykius? Neginčijamo atsakymo, žinoma, nerasime, bet jeigu spėsime, kad Aristotelis apie juos pagalvojo, nesuklysime, nes Aristotelis tikriausiai pagalvojo apie viską, apie ką tuo metu buvo įmanoma pagalvoti. Kadangi jis buvo didis sistemintojas, tai suklasifikavo ir įvykius: yra įvykių, kurie būtinai įvyksta; kiti įvykiai įvyksta dažniausiai, tai tikėtini įvykiai; ir pagaliau yra neprognozuojamų įvykių, t. y. įvykių, kurių numatyti niekaip neišmoksi.

Ką gi, filosofijai to gal ir pakako. O matematikai atsitiktiniais įvykiais apskritai nesidomėjo. Juk tuomet matematika buvo nekintamų dydžių ir amžinų dėsnių mokslas!

Į matematinę knygą uždavinį apie lošimus, ko gero, pirmasis įtraukė Lukas Pačiolis[1]. Jo veikale „Suma“ (tai iš tikrųjų buvo to meto matematikos žinių sąvadas), išleistame 1494 metais, suformuluotas toks klausimas:

> *Du lošėjai mėto monetą, vienas gauna tašką, kai moneta atvirsta herbu, kitas – kai skaičiumi. Visą lošimo banką laimi tas, kas pirmas surenka n taškų. Deja, lošimą teko nutraukti, kai laimėtojas dar nebuvo aiškus. Pirmasis lošėjas turėjo p, antrasis – q taškų. Kaip pasidalyti banką?*

Uždavinys pasirodė toli gražu nelengvas. Pats Pačiolis nesugalvojo teisingo sprendimo. Jeigu manote, kad uždavinys nesunkus, pabandykite sugalvoti savąją banko dalijimo taisyklę.

Tarkime, lošimas baigiasi, kai vienas lošėjas surenka penkis taškus. Kaip padalintumėte, pavyzdžiui, 100 eurų sumą, jeigu jūs surinkote tris taškus, o kitas lošėjas tik vieną? Nustatę taisyklę gerai pagalvokite, ar ji jums būtų priimtina, jeigu turėtumėte tik vieną, o kitas – tris taškus!

Girolamo Cardano, 1501–1576

Azartiniai lošimai ir praktiškai, ir teoriškai labai domino italų matematiką Džirolamo Kardaną. Pavadinti jį matematiku nebūtų visiškai teisinga. Europos Atgimimo laikais būdavo žmonių, kurie domėjosi viskuo, kuo buvo įmanoma domėtis, ir veikė viską, ką tik buvo įmanoma veikti. Taigi ir apie Kardaną teisinga pasakyti, kad jis buvo tiek matematikas, kiek gydytojas, filosofas, įvairių prietaisų išradėjas. Kai autombilių remonto dirbtuvėse šaltkalviai kalba apie kardano veleną, jie nors ir nežinodami mini Kardano pavardę!

Taigi Džirolamo Kardanas buvo aistringas lošėjas. Jis lošė viskuo: kauliukais, kortomis, šachmatais. Apie lošimus jis parašė štai ką:

> *Jeigu azartiniai lošimai yra blogis, tai turint galvoje didžiulį lošėjų skaičių, tai yra natūralus blogis. Todėl turėtume tarsi gydytojai tai vertinti kaip neišgydomą ligą.*

Apie lošimus jis parašė knygą „Knyga apie azartinius lošimus“[2]. Tai pirmoji knyga, kurioje atsitiktinius įvykius bandoma nagrinėti pasitelkus matematiką. Ir

[1] Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, 1445–1517.

[2] Liber de ludo aleae, lot.

gana sėkmingai! Tikimybės apibrėžimas palankių baigčių skaičiaus ir visų baigčių skaičiaus santykiu, kurį mes dabar vadiname klasikiniu, yra Kardano idėja!

Tačiau ji buvo išspausdinta tik 1663 metais, kai atsitiktinių įvykių matematinis tyrimas buvo gerokai pasistūmėjęs į priekį. Kardano knygą įdomu paskaityti ir dabar. Joje Kardanas ne tik bando matematiškai nagrinėti azartinius lošimus, bet ir duoda patarimų, kaip ir su kuo verta lošti.

Azartinių lošimų matematika domino ir kitus naujųjų laikų mokslininkus. Pavyzdžiui, Galileo Galilėjus[3] savo straipsnyje „Atradimas, susijęs su lošimo kauliuku“ svarstė tokį klausimą:

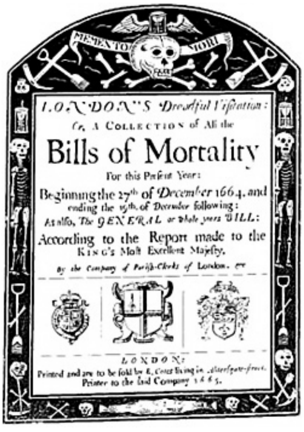
> *Metę tris lošimo kauliukus* 9 *ir* 10 *akučių galime gauti šešiais būdais. Kodėl lošėjai mano, kad* 10 *akučių atvirsta dažniau?*

Iš tikrųjų, ar jų nuomonė teisinga?

1.3 Johno Graunto demografinė aritmetika

> Sukauptos knygos – dar ne išmintis. Surinkti duomenys – dar ne žinios. Istorija apie tai, ką anglų pirklys Džonas Grauntas sužinojo studijuodamas iš pirmo žvilgsnio nuobodžias Londono gyventojų mirčių įrašų knygas.

Mokslų istorija – beveik kaip politinė istorija. Antikos graikų laikais žodis „matematika“ reiškė visas žinias, taigi visą mokslą. Tolydžio mokslo imperijoje susidarė savarankiškos sritys, tarsi valstybės, gavusios savus vardus. Kitaip tariant – mokslas susiskaidė. Matematikos imperija susitraukė iki skaičių ir geometrinių formų teritorijos. Tačiau jos įtaka nuolat didėjo, pasigirdo netgi tokių nuomonių, kad visi mokslai turėtų vartoti tą pačią matematikos kalbą. Ilgiausiai laikėsi socialinius reiškinius nagrinėjantys mokslai. Žinoma, galima manyti, kad kol šiems reiškiniams matematikos metodai nebuvo taikomi, tol ir tų mokslų „valstybių“ nebuvo – vien tik laikinos „klajoklių genčių sąjungos“. Kad matematiniai metodai taip ilgai nebuvo taikomi socialiniams reiškiniams tirti, nieko nestebina. Ir dabar jų taikymas kelia daug keblumų. Juk susivokti visuomenės reiškiniuose dažniausiai padeda veikiau gera nuojauta nei nepriekaištingai tiksli logika.



„Bills of Mortality“ leidinio viršelis

Vienas iš pirmųjų žmonių, socialiniams reiškiniams aiškinti pasitelkusių skaičius, buvo anglas Džonas Grauntas, gyvenęs 1620–1674 m. Londone.

[3]Galileo Galilei, 1564–1642.

Džonas Grauntas nebuvo tuometinio mokslininkų elito žmogus. Jis buvo paprasčiausias pirklys, prekiavęs drabužiais. Tačiau negi profesija viską lemia? Lemia, ar žmogui rūpi tik jis pats, ar ir pasaulio reikalai. Grauntui parūpo, kodėl kasmet tvarkingai išspausdinami tomai su žiniomis apie mirusius Londono gyventojus (*Bills of Mortality*, angl.) gula dulkėti į lentynas be naudos. Jis peržiūrėjo 37 metų knygas, suskaičiavo dėl įvairių priežasčių mirusius žmones, pavaizdavo duomenis lentelėmis, padarė įvairias išvadas ir parašė traktatą „Natūralistinės ir politinės įžvalgos, gautos iš mirtingumo lentelių“. Šį 1662 metais pasirodžiusį veikalą galime vadinti pirmąja statistikos knyga.

Kai kam pasirodys: anoks čia atradimas – pavaizduoti duomenis lentelėmis! Tačiau viską, kuo dabar esame įpratę naudotis, kažkas pirmas turėjo sugalvoti!

Taigi Džono Graunto knygą sudaro duomenų apie gyventojų mirtingumą lentelės ir jas tiriant suformuluotos išvados. Kokios išvados? Pavyzdžiui, berniukų gimsta daugiau negu mergaičių; moterys vidutiniškai gyvena ilgiau; nors berniukų gimsta daugiau, tačiau vedybinio amžiaus ir vyrų ir moterų jau būna apylygiai...

D. Grauntas sudarė pirmąją Londono gyventojų mirtingumo lentelę:

Amžius	0	6	16	26	36	46	56	66	76
Žmonių skaičius	100	64	40	25	16	10	6	3	1

Tokiomis lentelėmis naudojasi ir mūsų laikų draudimo srities teoretikai ir praktikai. Lentelėmis naudojosi ir Graunto amžininkas Viljamas Petty, savo knygoje „Politinė aritmetika“ nagrinėdamas mokesčių, prekybos ir kitus ekonomikos klausimus.

Savo tyrimus Johnas Grauntas apibūdino taip:

> *... galvodamas apie šiuos dėmesio nesusilaukusius raštus aš nustačiau tiesas, o ne nuomones, kuriomis pasikliaujama, ir ėmiau svarstyti, kokią naudą šios žinios gali teikti pasauliui...*[4]

Taigi galime tvirtinti, kad Džonas Grauntas apibrėžė statistiko profesijos esmę: duomenų analizė ir išvados bei prognozės.

D. Graunto veikalas pakylėjo jį iš pirklio luomo iki Karališkosios mokslo draugijos nario aukštumų. Šios 1660 metais įsteigtos draugijos nariai buvo tituluoti ir kilmingi žmonės – mokslų daktarai, dvasininkai... Dėl D. Graunto narystės draugijoje kilo abejonių, todėl atsiklausta karaliaus Čarlzo Antrojo. Karalius atsakė taip:

– Būtinai priimkite Džoną Grauntą į savo draugiją, o jeigu surasite dar ir kitą tokį pirklį kaip jis, tai ir jį nedelsdami priimkite...

[4]... finding some Truths, and not commonly believed Opinions, to arise from my Meditations upon these neglected Papers, I proceeded farther, to consider what benefit the knowledge of the same would bring to the World...

1.4 Mokslo pasaulio kometa – Edmondas Halėjus

Edmondo Halėjaus gyvenimą XVII–XVIII amžių riba dalija pusiau. Jis žavėjosi astronomija ir daug laiko skyrė dangaus šviesuliams stebėti. Tačiau atkreipė dėmesį ir į Žemės gyvenimo reiškinių statistinius dėsningumus.

Taigi tikimybių teorijos ir statistikos mokslų daigai, nors ir iš lėto, bet rodosi.

Daugelis esame girdėję apie Halėjaus kometą. Ji pasirodo žmonėms maždaug kas 75-76 metai. Paskutiniuosius jos skrydžius mūsų dangumi buvo galima stebėti 1758, 1835, 1910, 1986 metais, dalis mūsų amžininkų galės ją vėl pamatyti 2061 metais. Kai kas mano, kad Betliejaus žvaigždė krikščioniškos eros aušroje buvo ta pati kometa.

Mūsų pasaulyje ji vadinama anglų mokslininko Edmondo Halėjaus[5] vardu. Kodėl? Nes jis numatė, kad kometa vėl pasirodys 1758 metais. Taip ir įvyko.

Kodėl Halėjų minime bandydami apžvelgti tikimybių teorijos ir statistikos raidą? Nes pats Halėjaus gyvenimas gerokai primena kometos skrydį. Jis pralėkė daugelio mokslų teritorijose ir paliko jose dalį savo švytėjimo.

Edmond Halley,
1656–1742

Štai tik keletas jo gyvenimo žygių. Pasiturinčių tėvų namuose įgijęs tinkamą išsilavinimą ir įtikinęs savo gabumais bei ryžtu, išvyko į Oksfordą su didele manta – tėvai nepagailėjo didelių pinigų ir aprūpino būsimąjį dangaus tyrėją tokia astronominių prietaisų gausa, kurios užtektų nuosavai observatorijai įsteigti. Halėjus apsilankė Karališkojoje Grinvičo observatorijoje, ir, vadovaujant karališkajam astronomui Flamstedui[6], ėmėsi astronominių stebėjimų ir matavimų. Tačiau, matyt, kitų žmonių sumanymų vykdymas buvo ne Halėjaus charakteriui. Nebaigęs studijų jis leidosi į tolimą kelionę – į Šventosios Elenos salą, turėdamas ambicingų tikslų – sudaryti Pietų pusrutulio dangaus žvaigždėlapį. Dalį šio darbo jis iš tiesų atliko. Be to, jis sudarė pirmąjį okeanų vėjų žemėlapį, vertė matematinius graikų veikalus iš arabų kalbos, galvojo apie traukos dėsnį, kuriam paklūsta planetos, o sužinojęs, kiek šioje srityje yra pasistūmėjęs Niutonas[7], iškart suvokė jo atradimų reikšmę ir skatino Niutoną skelbti pagrindinį jo veikalą „Principia“. Ir ne tik skatino – pats skaitė, taisė, redagavo ir finansavo.

O tikimybių teorijos istorijoje jį minime dėl nedidelio veikalo ilgu pavadinimu, kuriame jis analizuoja Breslau miesto (dabartinio Vroclavo) gimimų ir mirčių registravimo duomenis. Taigi Halėjus naudojo panašius duomenis kaip Grauntas.

[5]Edmond Halley, 1656–1742.
[6]John Flamsteed, 1646–1719.
[7]Isaac Newton, 1642–1726.

Tačiau jo tiriami klausimai yra konkretesni, o duomenų analizė tikslesnė. Juk Grauntas vis dėlto buvo tik šiaip smalsus ir išradingas žmogus, o Halėjus – aukšto lygio matematikas!

Pagrindinis klausimas, kurį Halėjus, pasinaudodamas Breslau duomenimis, bando tirti, – tikėtina žmogaus gyvenimo trukmė. Jis formuluoja klausimus labai konkrečiai. Pavyzdžiui: kokia tikimybė, kad keturiasdešimties metų amžiaus žmogus gyvens dar bent septynerius metus? Štai jo skaičiavimo pavyzdys. Nustatęs 40 metų amžiaus žmonių skaičių (tarkime, jų yra 550) ir 47 metų amžiaus žmonių skaičių (500), jis suranda skirtumą $550 - 500 = 50$ ir galimybių keturiadešimtmečiui gyventi dar bent septynerius metus skaičiaus ir liūdnesnio atvejo galimybių skaičiaus santykį vertina trupmena $500 : 50 = 10 : 1$. Tada tikimybė, kad keturiasdešimties metų amžiaus žmogus gyvens dar bent septynerius metus lygi $\frac{10}{11}$.

Žinoma, tai labai paprasta matematika. Galima teigti, kad panašiais samprotavimais naudojasi kone kiekvienas žmogus, svarstydamas apie jam rūpimo tikrovės reiškinio raidą. Iš tiesų, statistinis mąstymas yra mūsų amžininkų „kasdienio proto“ elementas. Tačiau ne visada taip buvo. Kažkas turėjo būti pirmas, kažkas turėjo išmokyti taip svarstyti. Edmondas Halėjus buvo vienas iš pirmųjų statistinio mąstymo mokytojų. Savo darbe jis pateikė išvadų, kurios svarbios vienai labai senai žmonių veiklos sričiai, turbūt tokiai pat senai, kaip civilizacija – draudimui. Dabar draudimo specialistai vadinami aktuarijais, pagrindinis jų veiklos tikslas – rizikos faktorių vertinimas. Ši sritis – vienas iš pagrindinių šiuolaikinės statistikos uždavinių šaltinių.

Taigi aktuarijai, apžvelgdami savo srities istoriją, turėtų nors probėgšmais paminėti žmogų, kuris, nors ir labiau domėdamasis kometomis, prabėgomis ir juos šio bei to pamokė.

1.5 Įžymieji Ferma ir Paskalio laiškai

Penkiuose laiškuose du XVII amžiaus prancūzų matematikai dalijosi vieno su lošimais susijusio uždavinio sprendimo idėjomis. Jos sukūrė pagrindą tikimybių teorijos raidai. Tikimybinius samprotavimus Paskalis taikė netgi mąstydamas apie filosofines problemas: Dievas yra arba jo nėra; galiu juo tikėti, galiu ne; yra keturios galimybės, tik viena man nepalanki (Dievas yra, bet juo netikiu), taigi – tikėti verta: nieko neprarasiu, o laimėti galiu.

Galima sugalvoti įvairių lošimo su kauliuku taisyklių. Pavyzdžiui, sumokate įnašą, *croupier* meta kauliuką, ir jeigu atvirsta viena akutė, jūs laimite. Gana nuobodus lošimas, ir laimėjimo galimybė nedidelė...

Galima susitarti, kad lošėjas laimi tada, kai viena akutė atvirsta nors vieną kartą, metus kauliuką keturis kartus.

XVII amžiaus vidurio prancūzų diduomenės salonų žvaigždė Ševalje de Merė[8] manė, kad šios lošimo sąlygos gana palankios. Jis tikriausiai galvojo maždaug taip: metus kauliuką vieną kartą, iš šešių galimybių tik viena reiškia laimėjimą, taigi palankių galimybių ir visų galimybių skaičiaus santykis yra 1 : 6. Jeigu mesime kauliuką keturis kartus, santykis padidės keturis kartus ir bus lygus 4 : 6 = 2 : 3, o lošimas tikriausiai taps palankus lošėjui. Nors samprotavimas ir neatrodo įtikinamas, išvada teisinga: lošimas tikrai taps palankus lošėjui.

O jeigu mėtome lošimo kauliukų porą ir laimime tada, kai abu jie atvirsta sienelėmis su viena akute? Kiek kartų reikia mesti kauliukus, kad lošimas taptų palankus lošėjui?

Blaise Pascal, 1623–1662

Kadangi vieną kartą metę kauliukų porą, laimime tik vienu atveju, tai palankių atvejų ir visų atvejų kiekių santykis lygus 1 : 36. De Merė padarė išvadą, kad norėdami, jog palankių galimybių būtų daugiau negu nepalankių, turime mesti kauliukų porą 24 kartus, nes tada palankių atvejų ir visų atvejų kiekių santykis padidėsiąs 24 kartus ir tapsiąs toks pat kaip lošimo su vienu kauliuku atveju: 24 : 36 = 2 : 3.

Žinoma, lošimas su dvidešimt keturiais metimais trunka ilgiau, tačiau tai juk pranašumas! Daugiau metimų, daugiau emocijų. Tačiau pasirinkęs pastarąjį lošimo būdą, de Merė ėmė dažnai pralošti!

Kas čia ne taip? De Merė paprašė Blezo Paskalio[9] paaiškinti, „kur čia šuo pakastas“. Kad Paskalio protas aštrus kaip skustuvas, žinojo visi. B. Paskalis – vienas didžiausių visų laikų matematikų, nors matematika jis užsiėmė tik nedidelį savo trumpo gyvenimo tarpsnį. Tačiau tuomet, 1654 metais, matematika jį domino, ir Paskalis įsigilino į De Merė klausimą.

Žinoma, dabar teisingai atsakyti į šį klausimą galėtų kone kiekvienas gimnazijos paskutinės klasės moksleivis. Suprasti De Merė nesėkmių priežastį nebuvo sunku ir Paskaliui. Svarbiau, kad Paskalis susidomėjo su lošimais susijusiais uždaviniais ir pranešė apie savo svarstymus Pjerui Ferma[10]. Abu matematikai parašė vienas kitam po keletą laiškų. Šių laiškų mintys ir rezultatai sukūrė tvirtą pagrindą tikimybių teorijos uždaviniams nagrinėti. Galime teigti, kad šiais 1654 metais parašytais laiškais baigiasi tikimybių teorijos priešistorė ir prasideda tikroji teorijos raida.

Kokiam gi uždaviniui apie lošimus skyrė daugiausia dėmesio abu matematikai savo laiškuose? Banko dalijimo uždaviniui, kai lošimas buvo per anksti

[8] Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, 1607–1684.
[9] Blaise Pascal, 1623–1662.
[10] Pierre Fermat, 1601–1665.

nutrauktas. Ir Paskalis, ir Ferma sukūrė savo metodus šiam uždaviniui spręsti, bet atsakymą gavo tą patį. Jie nagrinėjo ne tik dviejų lošėjų, bet ir sudėtingesnį – trijų lošėjų nebaigto lošimo atvejį.

Maždaug tais pačiais 1654 metais Paskalis parašė veikalą apie aritmetinį trikampį[11]. Šios knygos idėjos svarbios tikimybių teorijos ir kombinatorikos raidai ... apskritai – visos matematikos raidai.

Pierre Fermat, 1601–1665

Skaičių trikampį Paskalis sudarė pagal tokią taisyklę: pirmojoje lentelės eilutėje ir pirmajame stulpelyje surašė vienetus, o į kiekvieną kitą lentelės langelį užrašė dviejuose gretimuose langeliuose (kairiajame ir viršutiniajame) jau įrašytų skaičių sumą. Taigi iš tiesų tai skaičių lentelė, o ne trikampis. „Aritmetinius trikampius“ gausime „pjaustydami“ šią lentelę pagal įstrižaines. Vienoje iš tokių įstrižainių yra, pavyzdžiui, skaičiai $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Pradėkime įstrižaines numeruoti nuo tos, kurioje yra tik du skaičiai $1, 1$. Tada n-ojoje įstrižainėje yra $n + 1$ skaičius. Dabar šiuos skaičius matematikoje įprasta žymėti

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n, \quad \text{arba} \quad \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Pastarasis žymėjimas laikomas modernesniu, bet man patinka ir pirmasis, kurį matematikai naudoja jau daugiau kaip šimtą metų.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6		
1	3	6	10	15			
1	4	10	20				
1	5	15					
1	6						
1							

Aritmetinio trikampio įstrižainės skaičiai yra sumos laipsnio skleidinio koeficientai, todėl jie vadinami binominiais koeficientais. Taigi

$$(x + y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}.$$

Blezas Paskalis nėra pirmasis šių skaičių atradėjas. Iš tiesų panašių lentelių galime rasti ir gerokai senesnių laikų matematikų raštuose. Tačiau Paskalis

[11] „Traité du triangle arithmétique“, pranc.

pirmasis juos išsamiai ištyrė, atskleidė daug juos siejančių ryšių, o įrodymui panaudojo (tikriausiai pirmą kartą matematikos istorijoje) matematinės indukcijos metodą. Matematinės indukcijos metodas yra kasdienis ir nepakeičiamas matematikų įrankis. Toks jis bus visada. Kaip tikram keliautojui (ne turistui) kasdienis ir nepakeičiamas įrankis visada buvo ir bus paprasčiausia lazda! Taigi šį aritmetinį trikampį pelnytai galime vadinti Paskalio trikampiu.

Naudodami binominių koeficientų žymenį aritmetinio trikampio sudarymo taisyklę galime užrašyti taip:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \tag{1.1}$$

Pritaikę šią taisyklę šeštosios įstrižainės skaičiui $C_6^2 = 15$ užrašykime $15 = 5 + 10$. Taikykime taisyklę skaičiui 10 ir kitiems tame pačiame stulpelyje užrašytiems skaičiams:

$$15 = 5 + 10 = 5 + 4 + 6 = 5 + 4 + 3 + 3 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Lentelės skaičius lygus kairiajame stulpelyje užrašytų skaičių sumai! Galime šią savybę užrašyti ir labai „moksliškai“:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \cdots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}, \quad 0 < m \leqslant n.$$

O dabar pasinaudokime (1.1) savybe kitaip ir išreikškime šeštosios įstrižainės trečiosios eilutės skaičių $C_6^4 = 15$:

$$15 = 5 + 10 = 5 + 4 + 6 = 5 + 4 + 3 + 3 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Taigi Paskalio trikampio lentelės skaičius yra lygus eilutėje virš jo parašytų skaičių sumai:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-2} + \cdots + C_{n-m}^1 + C_{n-m-1}^0, \quad 0 < m < n.$$

Trikampio skaičių savybes Paskalis naudojo įvairiems uždaviniams spręsti. Banko dalybų dviem lošėjams taisyklę, kai pirmajam iki numatytos sumos trūksta n, o antrajam m taškų, jis suformulavo taip:

Parinkime $r = n + m - 1$-ąją trikampio įstrižainę ir sudarykime tokias jos skaičių sumas:

$$A = \sum_{j=0}^{m-1} C_r^j, \quad B = \sum_{j=0}^{n-1} C_r^j.$$

Banką lošėjams teisinga padalyti santykiu $A : B$.

Pavyzdžiui, jeigu pirmajam iki laimėjimo trūksta 2 taškų, o antrajam 4, tai banką reikia padalyti santykiu $(1 + 5 + 10 + 10) : (1 + 5) = 13 : 2$.

Kaip galima paaiškinti tokią taisyklę? Pastebėkime, visų pirma, kad lošimą tęsiant, nugalėtojui išaiškinti prireiktų ne daugiau kaip $r = n + m - 1$ simetriškos monetos metimų. Kartais nugalėtojas išaiškės ir anksčiau, tačiau įsivaizduokime, kad net ir tokiu atveju lošimas tęsiamas ir atliekama lygiai r metimų. Kiekvienas metimas duoda tašką arba pirmajam, arba antrajam lošėjui. Iš viso yra 2^r skirtingų atvejų. Jeigu yra A palankių pirmajam lošėjui atvejų, tai antrajam jų bus $B = 2^r - A$. Taigi banką būtų teisinga padalyti santykiu $A : B$. Belieka įsitikinti, kad Pascalio taisyklėje apibrėžti dydžiai ir reiškia palankių atvejų skaičius.

Nesijaudinkite, jeigu neaišku, kad A, B reiškia palankių atvejų skaičiu. Sugrįžkite prie šio klausimo perskaitę keletą šios knygos antros dalies skyrelių. Tada Paskalio taisyklė tikrai paaiškės.

1.6 Christiano Huygenso knygelė

Pirmoji tikimybių teorijai skirta knygelė – nedidelis uždavinių su sprendimais rinkinėlis. Tačiau jame yra svarbių sąvokų užuomazgų. Viena iš jų – atsitiktinio dydžio vidurkis.

Tikimybių teorijos pradžia – kelių gana kuklių uždavinių sprendimai ir svarstymai apie juos, išdėstyti Paskalio ir Ferma laiškuose. Nė vienas iš šių matematikų toliau neplėtojo savo idėjų ir neparašė jokio tikimybių teorijos veikalo.

Pirmąją knygelę, skirtą tikimybių teorijai, parašė olandų matematikas Christianas Huygensas[12]. Ji vadinasi „Samprotavimų apie azartinius lošimus knygelė“[13] 1657 metais ji buvo išspausdinta kaip Huygenso mokytojo F. van Schuteno[14] knygos priedas.

Uždaviniais apie lošimus Huygensas tikriausiai susidomėjo savo gyvenimo Paryžiuje metais (1666–1681), sužinojęs apie Paskalio ir Ferma tyrimus.

Huygenso knygelę sudaro 14 teiginių arba uždavinių su pateiktais sprendimais. Svarbiausia naujovė – lošimo vertės sąvoka, kurią mes dabar vadiname matematiniu atsitiktinio dydžio vidurkiu. Žinoma, Huygensas nagrinėjo tik atskirus lošimų ir jų vertės skaičiavimo atvejus.

Huygensas samprotauja taip:

Christiaan Huygens, 1629–1695

[12] Christiaan Huygens, 1629–1695.
[13] „Libellus de ratiociniis in ludo aleae“, lot.
[14] Franciscus van Schooten, 1615–1660.

> *jeigu yra p galimybių laimėti a ir q galimybių laimėti b dydžio sumą, tai tokio lošimo vertė yra*
> $$\frac{ap+bq}{p+q}.$$

Taigi Huygenso apibrėžta lošimo vertė yra matematinis atsitiktinio dydžio, įgyjančio reikšmę a su tikimybe $\frac{p}{p+q}$ ir reikšmę b su tikimybe $\frac{q}{p+q}$, vidurkis.

Kiti teiginiai susiję su įvairiais banko dalijimo esant nebaigtam lošimui atvejais. Pabaigoje Huygensas pateikia keletą uždavinių be sprendimų. Štai vienas iš tokių uždavinių:

> *A ir B pakaitomis mėto lošimo kauliukų porą. A laimi, jeigu gauna metimo akučių sumą, lygią* 6, *anksčiau negu B gauna akučių sumą, lygią* 7. *Kokios A ir B laimėjimo tikimybės, jeigu A pradeda lošimą?*

Kone penkiasdešimt metų Huygenso knygelė buvo pagrindinis žinių apie tikimybes sąvadas.

Vėliau pasirodė šveicarai ir prancūzai.

1.7 Ars Conjectandi

> „Spėjimo menas" – taip vadinasi Jakobo Bernulio knyga, skirta tikimybių teorijai. Tačiau ji išmokė matematikus ne spėti, kas įvyks, bet tiksliai matematiškai formuluoti svarbius tikimybių teorijos teiginius. Vienas iš jų – didžiųjų skaičių dėsnis, kurį praktikoje taikome taip: didelio skaičiaus apytikslių reikšmių vidurkiu pasikliaujame labiau nei bet kurio vieno matavimo reikšme.

Tais pačiais 1654 metais, kai Ferma ir Paskalis laiškuose svarstė uždavinių apie lošimus sprendimų idėjas, Bazelyje gimė Jakobas Bernulis.[15] Turtingo pirklio ir įtakingo miesto piliečio sūnui buvo numatytas garbingas dvasininko likimas. Tačiau susiklostė kitaip. Likimą, kurį pasirinko Jakobas, geriausia nusakyti jo paties žodžiais: „*Invito patre sidera verso*" (prieš tėvo valią tyrinėju žvaigždes). Jacobas Bernulis ir jo brolis Johanas[16] tapo įžymios šveicarų mokslininkų ir menininkų dinastijos pradininkais.

Tiesa, vadinti juos šveicarais nėra visiškai teisinga. Bernulių šeima Bazelyje atsirado 1583 metais. Jie atvyko į Šveicariją iš Antverpeno, kurį užėmė katalikiškosios Ispanijos kariuomenė. Protestantų Bernulių šeima nutarė paieškoti saugesnio krašto gyventi. Ramybės tuometiniuose olandų kraštuose nebuvo – vyko aštuoniasdešimt metų trukęs karas su Ispanija dėl nepriklausomybės.

---

[15] Jacob Bernoulli, 1654–1705.

[16] Johann Bernoulli, 1667–1748.

Taigi Bernuliai tapo Bazelio miesto piliečiai. Ir ne bet kokie! Vien įžymių matematikų iš Bernulių šeimos kamieno išaugo net aštuoni!

Ferma ir Paskalio idėjos padėjo tikimybių teorijos pamatus, o Jakobas Bernulis, galima sakyti, pradėjo kelti ir sienas.

Jacob Bernoulli, 1654–1705

Jakobas Bernulis parašė tik vieną tikimybių teorijos veikalą – „Spėjimo menas“[17]. Rašė jį ilgai – apie dvidešimt metų, tiesą sakant, ir nebaigė. Knyga išspausdinta tik 1713 metais, taigi aštuoneri metai po Jakobo Bernulio mirties. Leidėjai norėjo, kad prieš spausdinant, nebaigtąją dalį užbaigtų Jakobo Bernulio sūnėnas Nikolajus[18], disertacijos „Spėjimo meno taikymai teisėje“[19] autorius. Tačiau sūnėnas nesijautė galįs pabaigti savo įžymaus dėdės darbo, ir knyga buvo išspausdinta tokia, kokią ją paliko autorius.

„Spėjimo menas“ – maždaug trijų šimtų nedidelio formato puslapių knyga, kurią sudaro keturios dalys. Pirmoje dalyje pakartotas Huygenso knygelės tekstas su Jakobo Bernulio komentarais. Tiesa, tų komentarų tekstas ilgesnis nei paties Huygenso veikalas. Ir įdomesnis. Jakobas Bernulis nagrinėja daug naujų uždavinių. Štai vienas iš jų:

> *Lošėjas A turi m, o lošėjas B – n monetų. Galimybių laimėti vieną lošimą santykis lygus $a : b$. Pralaimėjęs lošimą lošėjas sumoka laimėjusiam vieną monetą. Lošiama, kol vienas iš lošėjų praranda visą savo sumą. Kokia tikimybė, kad laimės A?*

Antroje dalyje nagrinėjami uždaviniai apie keitinius ir derinius, kuriuos mes dabar priskirtume kombinatorikai. Trečia dalis skirta išdėstytų idėjų ir metodų taikymui įvairiems lošimams nagrinėti. Bernulis formuluoja ir išsprendžia dvidešimt keturis uždavinius, susijusius su populiariais tuo metu lošimais.

Svarbiausi Bernulio teiginiai išdėstyti ketvirtoje dalyje. Jos pavadinimas žada tikrai daug: *„Ketvirtoji spėjimo meno dalis, kurioje išdėstyta, kaip šį mokslą taikyti pilietiniams, moraliniams ir ekonominiams klausimams“.* Tačiau apie tokius taikymus rastume nelabai daug vertingo. Užtat šioje knygos dalyje suformuluotas ir įrodytas (žinoma, atskiru atveju) teiginys, kurį galime pavadinti svarbiausiųjų tikimybių teorijos teiginių prototipu. Šiam teiginiui prigijo pavadinimas, kurį sugalvojo prancūzų matematikas Denisas Puasonas – didžiųjų skaičių dėsnis.

[17] „Ars Conjectandi“, lot.
[18] Nicolaus I Bernoulli, 1687–1759.
[19] Dissertatio inauguralis mathematico-juridica de usu artis conjectandi in jure, 1709, lot.

Jau Bernulio gyvenimo metais matematikai, vertindami įvykio pasirodymo galimybes, naudojo du metodus. Mes dabar sakytume, kad pirmasis remiasi klasikiniu tikimybės apibrėžimu: įvykio tikimybė yra palankių baigčių skaičiaus ir visų galimų baigčių skaičiaus santykis. Antrasis – statistinis apibrėžimas – naudoja empirinius duomenis: įvykio tikimybe galime laikyti įvykio pasirodymo skaičiaus ir stebėtų atvejų skaičiaus santykį. Paties Bernulio dienoraštyje yra įrašas apie maro tikimybę būsimais metais. Bernulis šią tikimybę apibrėžia maro metų tam tikru laikotarpiu skaičiaus ir visų to laikotarpio metų skaičiaus santykiu.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Jakobo Bernulio knygos „Ars Conjectandi“ viršelis

Didžiųjų skaičių dėsnis susieja šias dvi tikimybes. Jis teigia: jeigu statistinė tikimybė apskaičiuota atlikus daug nepriklausomų bandymų, labai tikėtina, kad ji mažai skirsis nuo „teorinės“, t. y. matematiškai apskaičiuotos tikimybės. Tačiau toks didžiųjų skaičių dėsnio formulavimas kelia daug subtilių klausimų. Ką, pavyzdžiui, reiškia „labai tikėtina“? Ką reiškia „mažai skirsis“? Būtina pabrėžti, kad pats Bernulis šį dėsnį formuluoja ir nagrinėja griežtai matematiškai.

Tarkime, p yra „teorinė“ tikimybė, apskaičiuota naudojantis, pavyzdžiui, klasikiniu apibrėžimu. Jeigu bandymas yra simetriško lošimo kauliuko metimas, o mus domina įvykis, kad atvirs daugiau kaip 4 akutės, tai apskaičiavę gausime $p = \frac{1}{3}$. Tarkime, kauliuką ketiname mesti n kartų, įvykio pasirodymų skaičių (jo iš anksto nežinome) pažymėkime S_n. Tada $p_n = \frac{S_n}{n}$ bus statistinė tikimybė. Tegu $\epsilon > 0$ koks nors mažas skaičius. Kiek yra galimybių įvykti įvykiams

$$|p - p_n| < \epsilon, \quad |p - p_n| \geqslant \epsilon?$$

Bernulis įrodo: kad ir kokį didelį skaičių $C > 0$ parinktume, šių įvykių galimybių skaičių santykis bus didesnis už C, jeigu tik n parinksime pakankamai didelį.

Tikimybių teorijos raidai svarbus ne tik šio teiginio turinys, bet ir forma. Matematinės kūrybos vertę sudaro ne tik nauji atsakymai, bet ir naujai suformuluoti klausimai. Šiuo požiūriu Bernulio didžiųjų skaičių dėsniui tikimybių teorijoje mažai kas gali prilygti.

Pats Bernulis suvokė savo atrasto dėsnio svarbą. Jis rašė, kad jo reikšmė prilygintina skritulio kvadratūros uždavinio sprendimo reikšmei. Mes sakytume – pranoksta, nes Bernulio dėsnis parodė matematikams, kaip reikia formuluoti tikimybių teorijos uždavinius.

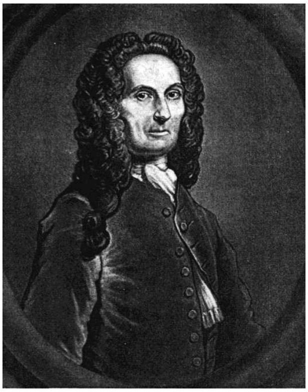
Jakobo Bernulio antkapyje iškalta kreivė – logaritminė spiralė ir užrašytas matematiko motto – *Eadem Mutata Resurgo* (besikeisdama išlieku tokia pat). Tai priminimas apie Bernulio atskleistą spiralės savybę. Tačiau tą patį galima pasakyti ir apie didžiųjų skaičių dėsnį: jo esmę galime įžvelgti daugybėje moderniosios tikimybių teoremos teiginių[20].

1.8 Trys prancūzai

Jų gyvenimas labai skirtingas, skirtingas ir įnašas į tikimybių teorijos raidą. Tačiau visų trijų – labai svarbūs.

Kai mokslo teorija vystosi, jai skirtos knygos storėja. Šis teiginys teisingas ir tikimybių teorijai.

Po Jakobo Bernulio storą tikimybių teorijos knygą parašė Abrahamas de Muavras[21]. De Muavro mokslo laimėjimais galėtų didžiuotis Prancūzija, tačiau negali, nes svarbiausius matematinius darbus de Muavras parašė anapus Lamanšo, Anglijoje. Taigi de Muavrą teisinga vadinti prancūzų-anglų matematiku, dar pridurdant, kad abi šios šalys nebuvo jam itin svetingos.



Abraham de Moivre, 1667–1754

Iš savo tėvynės Prancūzijos de Muavras turėjo pasitraukti dėl tikėjimo. 1685 metais Prancūzijos karalius Luji XIV atšaukė Nanto ediktą, garantavusį protestantams sąlyginį saugumą. Jiems beliko pasitraukti į tremtį.

De Muavras atvyko į Londoną ir pradėjo pelnytis pragyvenimą privačiomis matematikos pamokomis. Jis mokė mokinius jų namuose, taip pat kavinėse. Taip pat konsultuodavo lošėjus, kaip ir kiek statyti. Ko gero, jis buvo pirmasis tikimybių teorijos ekspertas profesionalas!

Apie Niutono darbus de Muavras sužinojo tik būdamas Anglijoje ir iš karto suprato, kad juos būtina išstudijuoti. Nusipirkęs jo veikalą *„Philosophiae naturalis principia mathematica“* supjaustė jį puslapiais, kad būtų patogiau nešiotis, ir studijavo Niutoną pertraukų tarp pamokų metu. Vėliau susipažino ir su pačiu autoriumi, netgi tapo jo draugu. Niutonas labai vertino matematines de Muavro žinias ir dažnai kvietė jį į savo namus pokalbiui apie mokslą. Ilgai ieškoti de Muavro nereikėjo – jis buvo nuolatinis Slaughterio kavinės lankytojas. Joje rinkdavosi šachmatininkai, lošę iš pinigų, čia užeidavo žmonės, kuriems reikėjo matematinių patarimų, taigi ši kavinė buvo pagrindinė de Muavro darbovietė. Deja, nors ir pranoko kitus matematinėmis žiniomis bei turėjo tokių įtakingų draugų kaip an-

[20] Jeigu mokate prancūziškai, daug žinių apie Bernulį ir jo darbus galite rasti Bernuliui skirtame elektroninio žurnalo „Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique“ numeryje http://www.jehps.net/juin2006.html

[21] Abraham de Moivre, 1667–1754.

tai Niutonas ir Leibnicas[22], de Muavras neįstengė gauti jokios akademinės vietos, garantuojančios nuolatinį pragyvenimo šaltinį.

Pagrindinis de Muavro matematinis veikalas – knyga „Mokymas apie atsitiktinumą“[23], skirta tikimybių teorijai. Ji buvo išleista tris kartus 1718, 1738 ir 1756 metais. Šioje knygoje pirmąkart pasirodo nepriklausomų įvykių apibrėžimas. De Muavras nepriklausomais įvykiais pavadina įvykius „kurie nesusiję tarpusavyje, ir vieno iš jų pasirodymas nedaro įtakos kito įvykio pasirodymo tikimybei“. Dabar šitaip paaiškinęs nepriklausomų įvykių sąvoką per egzaminą, studentas tikriausiai nebus labai gerai įvertintas. Juk praėjo keli šimtai metų ir daugelis įžvalgų virto tiksliai formuluojamais teiginiais!

Paskutiniajame papildytame leidime išdėstytas pagrindinis de Muavro rezultatas, kurį jis atskiru leidiniu paskelbė 1733 metais. Tai Bernulio didžiųjų skaičių dėsnio patikslinimas, tapęs vienu iš svarbiausių tikimybių teorijos dėsnių – centrinės ribinės teoremos prototipu.

Įrodymui de Muavras pasinaudojo jo paties atrasta faktorialo apytikslio skaičiavimo formule

$$m! \approx B\sqrt{m}\mathrm{e}^{-m}m^m, \quad m \to \infty.$$

Tik konstantos B dydžio jis negalėjo nustatyti. De Muavro paprašytas tai padarė Dž. Stirlingas[24]: $B = \sqrt{2\pi}$. Ir formulei prigijo Stirlingo vardas! Išties, istorija dažnai išsaugo vardus, neatsižvelgdama į nuopelnus. O gal čia glūdi subtilus siekimas apsaugoti nuo kasdienio vartojimo vertųjų vardus, kad juos prisimintų tik žinantys tikrąją tiesą?

De Muavras taip pat kaip anksčiau Grauntas tyrė gyventojų mirtingumo statistinius dėsningumus ir draudimo klausimus.

1754 metais Abrahamas de Muavras užmigo amžinu miegu. Tai ne metafora! Jį iš tikrųjų apėmė savita miego liga. Pastebėjęs, kad kasdien jis miega ketvirčiu valandos ilgiau, netgi apskaičiavo, kurią dieną jį pasiims mirtis – kai paros miegui prireiks daugiau nei 24 valandų!

Kai de Muavras mirė, Normandijos valstiečio Laplaso sūnui Pjerui-Simonui buvo tik penkeri metai. Ir, žinoma, niekas negalėjo žinoti, kuo jis taps užaugęs. Tėvai mintyse jam tiesė dvasininko kelią. Bažnyčia arba armija – du patys geriausi pasirinkimai valstiečių luomo jaunuoliui! Tačiau jų sūnus surado ypatingą, titulais ir garbės ženklais paženklintą kelią: didžiausias Prancūzijos matematikas, akademikas, senatorius, ministras, Garbės ordino kavalierius... Kad Pjeras-Simonas Laplasas[25] buvo matematikos genijus, nėra ko abejoti. Tačiau proto didybė anaiptol ne geriausia sąlyga įgyti aukštą visuomeninę padėtį ir solidų turtą. Tuo labiau tais

[22] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716.
[23] „The Doctrine of Chance“, angl.
[24] James Stirling, 1692–1770.
[25] Pierre-Simon Laplace, 1749–1827.

sūkuringais ir nuožmiais Prancūzijos revoliucijos metais, kai gyveno Laplasas. Tačiau jis, paprastai tariant, mokėjo laiku prisišlieti ir laiku pasitraukti... Napoleono Bonaparto mokytojas ir, galima sakyti, bendražygis, paskui – jo priešų Bourbonų rėmėjas. Bet kam berūpi seniai nutilusios politinės audros! O matematinės idėjos rūpi!

Svarbiausias Laplaso veikalas vadinasi „Dangaus mechanika“[26]. Tačiau jis domėjosi kuo įvairiausiais matematikos uždaviniais. Tariant amžininko žodžiais „... akademijoje Laplasas reikšdavo nuomonę apie viską.“ Tikimybių teorija – viena iš matematikos sričių, kurios uždaviniai domino jį daugelį metų. Juk Laplasui matematika buvo ne „autonomiška“ žinių sritis, bet įrankis pasaulio sąrangai atskleisti. Beje, Laplasui tikimybių teorija anaiptol nebuvo mokslas apie atsitiktinius įvykius. Jo nuomone, atsitiktinių įvykių apskritai nėra! Jeigu galėtume turėti išsamių žinių apie pasaulio būseną, galėtume neklysdami numatyti visa, kas įvyks. Tačiau mūsų žinios ribotos, todėl numatyti neklysdami negalime. Tikimybių teorija tai viso labo savotiška technika, kuri mums padeda efektyviau pasinaudoti tomis žiniomis apie pasaulį, kurias turime. Tokiai nuomonei apie tikimybių teorijos vaidmenį galime pritarti ir šiandien, tačiau tvirto tikėjimo, kad pasaulio raida vyksta pagal jau „surašytą“ planą, nebeturime. Naujųjų amžių fizikos tyrimai įtvirtino idėją, kad egzistuoja „grynas atsitiktinumas“ ir tai yra esminis pasaulio sąrangos bruožas.

Pierre-Simon Laplace, 1749–1827

Laplaso dvitomio veikalo „Analizinė tikimybių teorija“[27] pirmasis leidimas su dedikacija Napoleonui Bonapartui buvo išleistas 1812 metais. Po dvejų metų pasirodė antrasis leidimas, jau be šios dedikacijos, tačiau kone trečdaliu storesnis!

Neįmanoma trumpai apžvelgti šio didžiulio veikalo. Galima pavadinti jį to meto tikimybių teorijos uždavinių ir metodų sąvadu. Ypatingos dėstymo darnos jame nėra, Laplasas tiesiog surinko po knygos viršeliais įvairių tikimybių teorijos klausimų tyrimo rezultatus. Meistrišku stiliumi veikalas taip pat nepasižymi. Veikalo vertėjas į anglų kalbą I. Todhunteris[28] atsidusęs parašė: „Kai perskaitydavau Laplaso žodžius „akivaizdu, kad“, žinodavau, kad man prireiks kelių valandų, o gal ir dienų sunkaus triūso, kol paaiškės, tai, kas akivaizdu“.

Svarbiausias Laplaso kūrinio bruožas – įvairiausių analizės įrankių (integralų, skirtuminių ir diferencialinių lygčių...) taikymas tikimybiniams uždaviniams

[26] „Mécanique Céleste“, pranc.
[27] „Théorie Analytique des Probabilités“, pranc.
[28] Isaac Todhunter, 1820–1884. Jis parašė pirmąją tikimybių teorijos raidos istoriją, apimančią laikotarpį nuo Paskalio iki Laplaso.

spręsti. Šiuo požiūriu Laplaso tyrimai padarė didelę įtaką tikimybių teorijos raidai. Kita vertus, Laplasas ieškojo ir rado daugybę naujų tikimybių teorijos taikymo sričių. Jo knygoje yra nagrinėjami tikimybinio pobūdžio astronomijos, demografijos, klaidų teorijos ir kitų sričių uždaviniai. Taigi Laplaso „Analizinė tikimybių teorija“ yra taikomosios matematikos knyga, kurioje atskleista tikimybių teorijos metodų ir jų taikymo galimybių įvairovė, kita vertus – vėlesnių matematikų kartų požiūriu, pateikianti veikiau medžiagą nei sistemą naujai „tikrosios“ matematikos sričiai sukurti.

Siméon Denis Poisson, 1781–1840

Prancūzišką tikimybių teorijos raidos tarpsnį užbaikime Simeono Deniso Puasono[29] darbais. S. D. Puasono, kaip ir Laplaso, tėvai – iš luominės visuomenės žemųjų sluoksnių. Tėvas buvo kareivis, vėliau smulkus valdininkas... Prasidėjus revoliucijai, žinoma, karštas jos šalininkas. Dėjo daug pastangų, kad sūnus įgytų tinkamą išsilavinimą ir įgytų garbingą ir pelningą profesiją. Tačiau pradėtas medicinos studijas sūnui teko nutraukti. Viena vertus, todėl, kad jos menkai domino, kita priežastis – prasta judesių koordinacija – tikrai didelė kliūtis žmogui, kuriam tektų darbuotis skalpeliu. Taigi metęs medicinos studijas Puasonas atsidėjo matematikai, ir gerai padarė, nes joje surado tikrąją savo vietą. Puasono nuomone, „gyvenimas yra geras dėl dviejų dalykų – galimybės tyrinėti matematiką ir galimybės ją dėstyti“. Šiomis gėrybėmis Puasonas naudojosi visą gyvenimą. Jis padarė daug svarbių atradimų įvairiose taikomosios matematikos srityse. Aptardami tikimybių teorijos raidą minime jį dėl vienos jo knygos gana keistu pavadinimu: „Kriminalinių ir civilinių teismo nuosprendžių tikimybiniai tyrinėjimai“[30]. Joje Puasonas nagrinėja klausimą, kurį apytikriai galime suformuluoti taip: kokia tikimybė, kad teismų nuosprendžiai teisingi? Tačiau tikimybių teorijai ši knyga svarbi ne atsakymais į tokio pobūdžio klausimus, bet tuo, kad joje Puasonas išdėstė labai svarbų ateities tyrimams ir taikymams tikimybinį modelį.

Įsivaizduokime didelį skaičių bandymų su menka sėkmės tikimybe (pavyzdžiui, prie masalo ant kabliuko priplaukia daug žuvų, tačiau retai kuri susigundo). Kokia tikimybė, kad bus m sėkmių (kad per dieną žvejys sugaus, pavyzdžiui, penkias žuvis)? Štai tokiems skaičiavimams ir praverčia Puasono modelis. Reiškiniai, kurie šiam modeliui paklūsta, Puasono gyvenimo laikotarpiu nebuvo labai svarbūs. O dabar jų daug: transporto įvykiai, komunikacijos procesai, aptarnavimo reiškiniai... Todėl Puasono vardas dažnai minimas tikimybių teorijos knygose.

[29] Siméon Denis Poisson, 1781–1840.

[30] „Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminelle et en matiére civile“, pranc.

1.9 Žiedadulkių vaidmuo tikimybių teorijos istorijoje

Istorija apie tai, kaip tikimybių teorija visai nesidomėjęs gamtininkas atrado reiškinį, apie kurį dabar rašomos solidžios tikimybių teorijos knygos.

Koks svarbiausias reiškinys, kurį nagrinėja dabartinė tikimybių teorija? Jei kas paklaustų, galite atsakyti nedvejodami – Brauno judesys! Susilauksite net profesorių draugijos pritarimo.

Prisiminkime, ką apie tikimybių teoriją manė Laplasas: tikimybių teorija yra savita samprotavimų technika, padedanti mums daryti išvadas, kai neturime išsamios informacijos. Tačiau jeigu ją turėtume (ir mokėtume ja pasinaudoti), jokios tikimybių teorijos nereikėtų. Kitaip tariant, teigti, kad tam tikrą reiškinį valdo atsitiktinumas, tolygu pripažinti, kad mes neturime apie jį pakankamai žinių, todėl negalime jo visiškai suprasti.

Brauno judesio trajektorija yra trimatė. Tačiau galime įsivaizduoti ir vienoje plokštumoje judančią dalelę. Brėžinyje parodyta tokio judesio trajektorija

P. S. Laplasas mirė 1827 metais. Tais pačiais metais anglų botanikas Robertas Braunas[31] pažvelgė pro mikroskopą į vandenyje plaukiojančias augalo žiedadulkes. Jį nustebino tų dalelių judėjimo būdas. Dalelės judėjo mažais šuoliukais, kurių kryptys nuolat keitėsi. Be to, jos sukiojosi, tačiau ir šio sukimosi ašies kryptis nuolat keitėsi... Braunas atliko daugybę eksperimentų, bandydamas nustatyti šio keisto judesio priežastį. Gal daleles nešioja mikroskopiniai skysčio sūkuriai? Šią prielaidą teko atmesti. Gal dalelės turi gyvybinės galios, kuri jas verčia blaškytis? Tačiau 100 metų senumo dalelės, kuriose gyvybinė galia tikrai turėjo būti jau išnykusi, judėjo taip pat. Kad galutinai atmestų gyvybinių galių hipotezę Braunas stebėjo neorganinės kilmės daleles. Dulkelės, nugremžtos nuo egiptietiško sfinkso statulos tikrai negalėjo būti gyvos! Tačiau ir jos vandenyje judėjo taip pat kaip ir žiedadulkės!

Brauno judesio paslaptis laukė, kol bus paaiškinta, daugiau kaip 70 metų. Dabar reiškinio esmę tikriausiai suvoktų kone kiekvienas mokyklinės fizikos žinias pasitelkęs žmogus. Tačiau paprasta mintis apie dujas ar skystį kaip judančių molekulių visumą – daugybės mokslininkų daugybę metų kurtas požiūris!

Brauno judesio priežastį maždaug tuo pačiu metu paaiškino du žmonės. A. Einšteinas[32] paskelbė Brauno judesiui skirtą straipsnį 1905 metais, o M. Smoluchovskis[33] – 1906 metais. Esminė judesio chaotiškumo priežastis – molekulių smūgiai, kuriuos patiria plūduriuojanti skystyje dalelė. Jeigu dalelę molekulės smūgiuotų

[31] Robert Brown, 1773-–1858.
[32] Albert Einstein, 1879–1955.
[33] Marian Smoluchowski, 1872–1917.

iš visų pusių vienodai dažnai ir vienodai smarkiai, dalelė tiesiog nuolankiai rymotų. Tačiau ir smūgių skaičius, ir jėga kiekvienu momentu nuolat ir atsitiktinai keičiasi, todėl ir dalelė juda tokia keista, nuolat keičiančia kryptį trajektorija.

Žinoma, šios idėjos dar ne matematinis reiškinio modelis. Matematinis modelis tai griežtai apibrėžtos sąvokos, integralai, lygtys, įvairių skaitinių reiškinio charakteristikų skaičiavimo metodai. Brauno judesio matematika buvo sukurta kiek vėliau. Vienas iš autorių – Norbertas Vyneris[34], todėl „matematinis“ Brauno judesys dažnai vadinamas Vynerio procesu.

Taigi tos mažytės žiedadulkės neblogai pasitarnavo tikimybių teorijai. Jų judesio stebėjimai ir tyrimai paskatino suabejoti Laplaso nuomone, kad tikrovė paklūsta griežtam planui, kuriame viskas iš anksto numatyta. Palengva įsitvirtino idėja, kad gamta taip pat „renkasi“ savo raidos kelius atsitiktinai. O jeigu atsitiktinumas yra „prigimtinis“ tikrovės bruožas, tai ir tikimybių teorija ne „samprotavimų technika“, bet tokia pat tikrovės reiškinių savybes aprašanti kalba, kaip pavyzdžiui, teorinė mechanika.

Vėliau pasirodė, kad Brauno judesio dėsningumai būdingi ir kitokiems gamtos bei visuomenės reiškiniams. Pavyzdžiui, ekonomikos ar finansų pasaulio „dalelių“ judėjimui. Čia skatinančių keisti judesio kryptį molekulių vaidmenį atlieka mūsų doleriai, jenos, eurai, svarai, rubliai...

1.10 Rusų mokykla

> Matematinės analizės raida – judesys nuo skaičių link funkcijų. Tikimybių teorijos – nuo atsitiktinių įvykių link atsitiktinių dydžių. Judesį šia kryptimi paspartino rusų matematikų darbai.

Matematika – šilto ir šviesaus Graikijos klimato augalas. Į šiauresnius kraštus ji plito lėtai. Tačiau plito. XVIII amžiuje pasiekė ir Rusiją. Pagrindus matematikai prigyti Rusijoje padėjo caras Petras I – didysis Rusijos gyvenimo modernintojas. Viena iš jo plano dalių – švietimo sistemos pertvarkymas. Kelionių po Europos šalis metu jis surado labai gerai išmanančių mokslo reikalus patarėjų. Vienas iš jų – pats Gotfrydas Vilhelmas von Leibnicas. Jis parengė visą Rusijos švietimo reformos planą, vienas iš šio plano elementų – mokslų akademijos steigimas. Petras I jam pritarė, akademiją buvo nuspręsta steigti pagal Paryžiaus akademijos pavyzdį: nedidelė mokslininkų bendrija, išlaikoma valdovo. Imperatorius akademijos Peterburge nebeišvydo. Petras I mirė 1725 metų sausio mėnesį gyvenęs 52 metus, jau dešimties metų tapęs imperatoriumi. Vis dėlto planas buvo įgyvendintas: tais pačiais metais Peterburgo mokslų akademiją savo dekretu įsteigė imperatore tapusi antroji Petro I žmona Jekaterina.

[34] Norbert Wiener, 1894–1964.

Peterburgo mokslų akademijos narių veikla – šlovingas puslapis matematikos istorijoje. Užtenka vien paminėti vardus tų matematikų, kurie joje dirbo: Leonardas Oileris, Christianas Goldbachas, Nikolajus ir Danielis Bernuliai...[35] Tačiau matematikos mokslo tradicijų plėtojimo židiniu Rusijos imperijoje jos nepavadinsi. Klestėjusi pirmaisiais savo gyvavimo dešimtmečiais, kai joje dirbo įžymūs užsieniečiai, XVIII amžiaus pabaigoje ji visai sumenko.

Pafnutijus Lvovičius Čebyšovas, 1821–1894

Pirmasis XIX amžiaus dešimtmetis Rusijoje prasidėjo liberaliomis Aleksandro I reformomis. Įsteigta naujų universitetų – Kazanėje (1804), Charkove (1804). Užsimezgė glaudesni akademiniai kontaktai su Vakarų Europos mokslininkais, nors ir gerokai apkarpyti dėl po Napoleono karų suvešėjusių antivakarietiškų nuostatų. Tačiau vis dėlto – Rusijos jaunimas spėjo pažvelgti į margesnį pasaulį.

Kazanės universiteto profesoriaus Nikolajaus Lobačevskio[36] neeuklidinė geometrija yra rusų pirmasis reikšmingas įrašas į matematikos raidą.

Tačiau grįžkime prie tikimybių teorijos. Kone kiekviename šiuolaikiniame tikimybių teorijos vadovėlyje rasime paminėtą Čebyšovo pavardę.

Pafnutijus Lvovičius Čebyšovas[37] buvo Maskvos universiteto (įsteigto 1755 metais) auklėtinis, tačiau jo pedagoginė ir mokslinė veikla daugiausia susijusi su Peterburgo universitetu (įsteigtas 1819). Čebyšovo baigiamasis darbas buvo skirtas tikimybių teorijai, tačiau tikimybių teorija – tik viena jo matematinių tyrimų sritis.

Kilęs iš aukštesniųjų visuomenės sluoksnių ir guvernantės puikiai išmokytas prancūzų kalbos, Čebyšovas lengvai užmezgė ryšius su Vakarų Europos, ypač su prancūzų, matematikais. Į Prancūziją jis važiuodavo kone kiekvieną vasarą, lankydavosi universitetuose, skaitydavo juose pranešimus, taip pat Paryžiaus mokslų akademijoje.

Priežastis, kodėl Čebyšovo vardas taip dažnai minimas tiek pradinio, ties aukštesniojo lygio tikimybių teorijos vadovėliuose, – paprasta nelygybė, kuria naudojantis galima įvertinti tikimybes, susijusias su atsitiktiniais dydžiais. Nelygybė labai paprasta, tačiau naudinga. Pasinaudojus ja galima paprastai įrodinėti įvairius didžiųjų skaičių dėsnio atvejus. Šį dėsnį Bernulis įrodė bandymų su dviem baigtimis atvejui, pasinaudodamas gana sudėtingais skaičiavimais.

[35]Leonhard Euler, 1707–1783.
Christian Goldbach, 1690–1764.
Nicolaus (II) Bernoulli, 1695–1726.
Daniel Bernoulli, 1700–1782.

[36]Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, 1792–1856.

[37]Pafnutij Lvovič Čebyšov, 1821–1894.

Tiesos dėlei reikia pabrėžti, kad Čebyšovas ne vienintelis įrodęs šią nelygybę. Ji naudojama, pavyzdžiui, ir gero Čebyšovo pažįstamo prancūzo Bienemė[38] darbuose. Todėl nelygybę būtų teisingiau vadinti Bienemė ir Čebyšovo nelygybe. Tačiau kai šią nelygybę pamatysite, tikriausiai ir jums pasirodys, kad toks ilgas pavadinimas tokiai paprastai nelygybei nelabai tinka...

Aleksandras Michailovičius Liapunovas, 1857–1918

Žinoma, ši nelygybė tik vienas epizodas Čebyšovo kūryboje, skirtoje tikimybių teorijai. Jo darbų reikšmę tikimybių teorijos raidai galima nusakyti maždaug taip: anksčiau svarbiausias dėmesys teko įvairių įvykių tikimybėms nagrinėti, o dabar tampa aiškesnė atsitiktinio dydžio sąvoka ir pastangos labiau sutelkiamos atsitiktinių dydžių analizei plėtoti.

Tikimybių teorijos paskaitas Peterburgo universitete Čebyšovas skaitė 1860–1882 metais. Du jo studentai – Aleksandras Michailovičius Liapunovas[39] ir Andrejus Andrejevičius Markovas[40] taip pat tapo tikimybių teorijos klasikais.

Tiesa, A. Liapunovo mokslinėje veikloje tikimybių teorija sudaro tik trumpą epizodą. Jam teko dėstyti tikimybių teoriją, tai paskatino atsidėti sudėtingesniems klausimams. Svarbiausias A. Liapunovo įnašas – centrinės ribinės teoremos įrodymas analiziniu charakteristinių funkcijų metodu. Dabar šis metodas yra kiekvieno tikimybių teorijos klausimų tyrėjo pagrindinių įrankių „dėžėje".

Iki 1917 metų A. Liapunovas dirbo Peterburgo universitete, vėliau gavo vietą Odesoje. Odesos universitete Liapunovas dėstė vos metus. 1918 metų pavasarį jo žmonos sveikata ėmė sparčiai blogėti, o rudenį ji mirė. Susitaikyti su netektimi moters, su kuria jį siejo ne tik pragyventi metai, bet ir vaikystės prisiminimai, Liapunovas neįstengė. Kitą dieną Liapunovas nukreipė į save ginklą.

A. Markovui tikimybių teorija buvo viena iš svarbiausių jo mokslinės veiklos sričių, nors jo matematinio kelio pradžią žymi puikūs skaičių teorijos darbai. Visi A. Markovo darbai svarbūs tikimybių teorijos raidai, tačiau svarbiausi tie, kuriuos pats autorius kažin ar vertino labiausiai. „Markovo procesai", „Markovo grandinės", „Markovo laukai" ... – šitaip vadinami ištisi šiuolaikinės tikimybių teorijos knygų skyriai ar net pačios knygos. Ar visus šiuos matematinius objektus sukūrė A. Markovas? Žinoma, ne. Jis nagrinėjo tam tikrą lyg grandine tarpusavyje susijusių atsitiktinių dydžių modelį, kuris vėliau pasirodė labai svarbus įvairiuose taikymuose.

[38] Irénée-Jules Bienaymé, 1796–1878.
[39] Aleksandr Michailovič Liapunov, 1857–1918.
[40] Andrej Andrejevič Markov, 1856–1922.

Andrejus Andrejevičius Markovas, 1856–1922

Kas yra Markovo grandinės, paaiškinti nesudėtinga. Įsivaizduokime lošimo kauliuką, kurio sienelės sužymėtos skaičiais $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Mėtykime ir rašykime skaičius, kurie atvirto. Bandymo pabaigoje galime sakyti: štai nepriklausomų atsitiktinių dydžių stebėjimo rezultatai – pirmasis dydis susijęs su pirmuoju metimu, antrasis su antruoju ir t. t.

O dabar įsivaizduokime, kad yra šeši lošimo kauliukai, kiekvieno sienelės sužymėtos tais pačiais skaičiais, tačiau kauliukai yra skirtingi, taigi tais pačiais skaičiais pažymėtų sienelių atvirtimo tikimybės priklauso nuo to, kurį kauliuką mesime. Kauliukus irgi sunumeruokime: pirmasis kauliukas, antrasis, ... , šeštasis. Meskime pirmąjį kauliuką. Jeigu atvirto sienelė su skaičiumi i, jį užrašykime ir meskime i-ąjį kauliuką. Jeigu jis atvirto sienele su skaičiumi j, meskime j-ąjį kauliuką. Pabaigę bandymus turime teisę teigti: štai atsitiktinių dydžių, susijusių Markovo grandine, stebėjimų rezultatai.

Štai iš šios „markoviško“ atsitiktinių dydžių ryšio sąvokos – kai atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybės priklauso nuo ankstesnio dydžio reikšmės – ir išaugo ištisa tikimybių mokslo teritorija – atsitiktinių procesų teorija.

A. Markovas gyveno Rusijos revoliucijų laikais. Kilęs iš viduriniojo visuomenės sluoksnio (jo tėvas buvo samdomas dvarų valdytojas) jis ir pats buvo radikalių, prieš autokratinį caro valdymą nukreiptų pažiūrų. 1913 metais Romanovų dinastija iškilmingai minėjo 300 metų valdymo sukaktį. A. Markovas nusprendė organizuoti kitos sukakties minėjimą – 200 metų didžiųjų skaičių dėsnio! Ir tai įvykdė.

1.11 Didieji XX a. statistikai

Gyvoji gamta – didžiulė įvairovė. Visuomenės reiškiniai – taip pat. Kokias išvadas galima padaryti pasinaudojus didžiuliais iš gamtos ir visuomenės gyvenimo gautais duomenų kiekiais? Ieškant atsakymų ir atsirado statistika.

Tikimybių teorijos pradininkai – didieji matematikai, dėl įvairių priežasčių susidomėję atsitiktinius reiškinius valdančiais dėsningumais. Tačiau statistikos klausimus pirmieji kėlė visai kitokie žmonės. Prisiminkime, pavyzdžiui, Grauntą, Halėjų ... Jie tyrė duomenis, gautus stebint socialinio gyvenimo reiškinius. Žinoma, statistiniai duomenų tyrimo metodai rūpėjo ir tiksliųjų mokslų atstovams: astronomams, fizikams, ... visiems, kieno darbui reikia didelio duomenų kiekio, gauto iš apytikslių matavimų. Tačiau tiksliųjų mokslų dydžių matavimo prietaisus galima patobulinti, taigi galima lengviau kontroliuoti duomenų gavimo procesą.

Duomenys apie gyvosios gamtos reiškinius ar socialinius procesus – visai kitas dalykas! Čia „tikrosios“ reikšmės, prie kurios galėtum priartėti patobulinęs savo matavimų prietaisus, paprasčiausiai nėra. Tiesos reikia ieškoti kitais būdais. Tad nenuostabu, kad didelis stimulas statistikos raidai atsirado tuomet, kai tyrėjai nuo kokybinių gamtos ir visuomenės reiškinių aprašymų perėjo prie kiekybiniais duomenimis pagrįsto tyrimo. O šiuolaikinės statistikos metodų kūrėjai – ne „grynieji“ matematikai, bet labai įvairių interesų turėję žmonės.

Karl Pearson, 1857–1936

Vienas iš šiuolaikinės statistikos metodų kūrėjų – Karlas Pirsonas[41]. Kadangi jis gimė tikrų tikriausių anglų šeimoje, tai gavo, žinoma, Carlo vardą. Išvykęs tęsti studijų Heidelbergo universitete pakeitė pirmąją vardo raidę. Viena iš priežasčių galbūt – žavėjimasis Karlo Markso idėjomis. Amžininkai, minėdami šį universalių interesų žmogų, rašydavo tiesiog „KP“.

Enciklopedijose galima rasti tokį KP veiklos apibūdinimą – teisininkas, germanistas, eugenikas, matematikas ir statistikas (visų pirma – statistikas). „Visų pirma“ nereiškia, kad visos kitos sritys jam buvo mažiau svarbios. Kaip tik priešingai – statistika jis susidomėjo gana vėlai, ypač tada, kai, bendraudamas su gamtininku Valteriu Veldonu[42], pamatė, kokią įvairių duomenų gausą tyrinėjams teikia gyvoji gamta. Duomenų daug, visi jie įvairūs, o ką gi teigia jų visuma?

Akademinį savo kelią Pirsonas pradėjo studijomis Kembridže. Apie savo studijų metus jis parašė taip: „Kembridže matematikos mane mokė Routas, Stoksas, Keilis ir Maksvelas[43], bet aš skaičiau Spinozos raštus.“ Ne todėl, kad būtų nusivylęs matematika. Anaiptol. Tikrąsias jo paskatas geriausiai apibūdina jis pats:

> „Aš puldavau nuo mokslo prie filosofijos, ir nuo filosofijos prie mūsų senųjų draugų – poetų; o tada – pavargęs nuo per didelio idealizmo – vėl tapdavau praktiškas ir sugrįždavau prie mokslo. Ar jūsų niekada nebuvo užvaldęs jausmas, kad nėra visatoje nieko, ko nebūtų verta tyrinėti? Literatūros milžinai, daugiamatės erdvės paslaptys, Bolcmano ir Kruko bandymai įsiskverbti į tikrąją Gamtos laboratoriją, Kanto visatos teorija, paskutiniai embriologijos atradimai, įstabūs pasakojimai apie gyvybės raidą – kokia neaprėpiamybė.“

[41]Karl Pearson, 1857–1936.

[42]Walter Frank Raphael Weldon, 1860–1906.

[43]Edward John Routh, 1831–1907.
George Gabriel Stokes, 1819–1903.
Arthur Cayley, 1821–1895.
James Clerk Maxwell, 1831–1879.

Pažintis su Veldonu, taip pat su anglų gamtininku Galtonu[44] įtraukė Pirsoną į gyvosios gamtos evoliucijos reiškinių tyrimus. Laikotarpiu nuo 1893 iki 1912 metų K. Pirsonas parašė 18 straipsnių, kuriuose matematika taikoma evoliucijos teorijos klausimams tirti. Šiuose darbuose išdėstyti metodų, kuriuos galėtume pavadinti statistikos klasika, pagrindai – regresinės ir koreliacinės analizės, chi-kvadratu testų...

William Gosset,
1876–1937

K. Pirsonas kartu su V. Veldonu ir F. Galtonu 1901 metais įsteigė žurnalą „Biometrika", skirtą gyvybės evoliucijos reiškinių statistiniams tyrimams. Steigėjų nuomone, „evoliucijos tyrimo problema yra statistikos uždavinys".

Nuo 1906 metų Pirsonas ėmėsi organizacinės veiklos, kurios tikslas, jo žodžiais tariant,

> „ ... padaryti statistiką taikomosios matematikos šaka su sava terminologija ir technika, ugdyti statistikus kaip mokslininkus ... ir apskritai – paversti statistiką šioje šalyje iš diletantų žaidimų lauko solidžiu mokslu, kuriuo niekas negalėtų užsiimti neįgijęs atitinkamo išsilavinimo..."

Pagrindinius sau iškeltus tikslus K. Pirsonas pasiekė. Jo veiklą vertino ir specialistai, ir oficialioji valdžia. Karališkas riterio titulas būtų glostęs daugelio mokslininkų savimeilę. Tik ne K. Pirsono. Socializmo šalininkas, aktyvus pilietinių teisių gynėjas ir šiaip žmogus, linkęs apie viską turėti savo nuomonę, aukščiausių valstybinių apdovanojimų tiesiog atsisakydavo.

Kitas statistikas, minimas kiekviename vadovėlyje, taip pat pradėjo statistikos tyrimus pirmiausia susidūręs su praktiniais uždaviniais. Vienas iš tokių praktinių uždavinių – alaus kokybės kontrolė įžymioje Guineso alaus darykloje Dubline. Joje 1899 metais pradėjo dirbti Oksfordo universitete chemijos ir matematikos studijas baigęs Viljamas Gosetas[45].

Tačiau statistika jaunas aludaris užsiėmė ne iškart. Norėdamas įgyti savo darbui reikalingų žinių, 1906 metais V. Gosetas pradėjo studijas Karlo Pirsono laboratorijoje. Tuomet jis ir pradėjo publikuoti statistikos mokslo straipsnius. Tačiau nors Gosetas minimas kiekviename statistikos vadovėlyje, jo pavardės ten nerasite. Užtat rasite Studento skirstinį, Studento testą (dažniau vadinamą t testu). Tas Studentas ir yra Gosetas, šiuo vardu jis skelbdavo savo mokslinius straipsnius, nes Guineso darbuotojams buvo draudžiama skelbti savo tyrimus, kuriais (kas žino!) galėtų pasinaudoti konkurentai. Nors V. Gosetas ir gilino žinias Pirsono laboratorijoje, jo bendraminčiu jis netapo. Viena vertus, biometrika

[44] Francis Galton, 1822–1911.
[45] William Gosset, 1876–1937.

Goseto nedomino, kita vertus, skirtingai nuo Pirsono Gosetui Guineso aludėje tekdavo daryti išvadas neturint labai didelio kiekio duomenų. Taigi jo uždaviniams spręsti reikalingi kiek kitokie metodai nei tie, kuriuos plėtojo Karlas Pirsonas. Goseto sukurtas t testas – būtent toks metodas ir yra.

Viljamo Goseto metodų reikšmė ne iš karto buvo suvokta. Nesuklysime teigdami, kad ją tinkamai įvertino kitas įžymus XX amžiaus statistikas – Ronaldas Fišeris[46]. Jo kelias į statistikos mokslą taip pat buvo vingiuotas. Kembridže jis studijavo matematiką ir astronomiją. Naudojimasis astronominiais duomenimis, kai būtina atsižvelgti į galimas matavimo paklaidas, jau savaime kelia statistikos uždavinius.

Tačiau baigus studijas teko galvoti ne apie mokslo uždavinius, o apie pragyvenimą. Padirbėjęs kelis mėnesius Kanadoje, grįžo į Angliją, mokytojavo, prasidėjus karui ketino eiti į frontą, tačiau dėl silpno regėjimo nebuvo priimtas. Tad vėl teko mokyti moksleivius matematikos ir fizikos. 1919 metais pasisekė: gavo net du pasiūlymus statistiko vietai. Vieną iš K. Pirsono, kitą iš Rothamstedo eksperimentinės žemės ūkio stoties. Šioje stotyje buvo atliekami ilgalaikiai bandymai ir stebėjimai, siekiant įvertinti trąšų efektyvumą ir pagerinti augalų derlingumą. Duomenų buvo sukaupta daug, reikėjo juos vertinti ir daryti išvadas.

Ronald Fisher,
1890–1962

R. Fišeris įsikūrė Rothamstede ir šitaip prasidėjo jo statistiko karjera. Rothamstede R. Fišeris dirbo iki 1933 metų, čia jis subrandino svarbias ne tik statistikos, bet ir genetikos idėjas. Jo 1925 metais išleista knyga „Statistiniai metodai mokslo darbuotojui“[47] tapo parankine knyga įvairių sričių mokslininkams. Per maždaug 50 metų ji išleista net 14 kartų. Savo idėjas ir metodus R. Fišeris taikė evoliucijos reiškiniams tirti. Vienas iš svarbiausių šios srities uždavinių buvo Darvino natūralios atrankos ir Mendelio genetinio paveldimumo teorijų suderinimas. Kaip įvyksta gyvybės formų pokyčiai ir kaip jie perduodami? R. Fišeris tyrė šiuos klausimus naudodamas tikimybių teoriją ir statistiką. R. Fišerio knyga „Genetinė natūralios atrankos teorija“[48] tapo klasikiniu šios mokslo srities veikalu.

Daugelis R. Fišerio įvestų sąvokų ir pasiūlytų metodų tapo šiuolaikinės praktinės ir teorinės statistikos kasdieniais įrankiais. Panašiai kaip V. Gosetas, R. Fišeris plėtojo metodus, tinkamus turint mažiau duomenų.

Statistiniai duomenys iš dangaus nekrenta, jų reikia atitinkamu būdu įgyti. Dažnai duomenų gaunama atliekant bandymus. Taigi bandymų planavimas yra

[46] Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962.
[47] „Statistical Methods for Research Worker“, angl.
[48] „Genetical Theory of Natural Selection“, angl.

svarbus praktinio statistikos taikymo klausimas. R. Fišerio knyga „Eksperimentų planavimas“[49] taip pat tapo klasika, 1935–1966 metais buvo išleista aštuonis kartus.

Klausimus, kurių kyla planuojant eksperimentą, R. Fišeris populiariai paaiškino straipsnyje „Ragaujančios arbatą damos matematika“[50].

Tarkime, didelę arbatos su pienu gėrimo patirtį turinti ponia teigia, kad ji vien iš skonio gali nustatyti, ar į puoduką pirmiausia buvo įpilta pieno, o paskui arbatos, ar, atvirkščiai. Kaip nustatyti, ar ji tikrai turi tokį gebėjimą? Reikia atlikti bandymą. Patiekti tam tikrą skaičių puodukų su arbata ir paprašyti, kad ponia pasakytų, į kuriuos puodukus pirma buvo įpilta pieno, o paskui arbatos. Suprantama, kad iš tokio bandymo didelio duomenų kiekio negausime. Be to, bandymą tikriausiai galėsime atlikti tik vieną kartą. Tačiau norėtume priimti labai patikimą sprendimą.

Pirmiausia reikia nuspręsti, kiek puodukų panaudosime ir į kiek puodukų pieno įpilsime iš pradžių. Sekdami Fišeriu tarkime, kad į lygiai pusę puodukų pieno bus įpilta iš pradžių. Tarkime, kad tai žino ir bandymo dalyvė. Jeigu panaudosime tik du puodukus, tikimybė duoti teisingą atsakymą paprasčiausiai spėjant, lygi 1/2. Toks bandymas vargu ar yra pakankamas, kad sėkmingo spėjimo atveju patikėtume subtiliais arbatos gėrėjos sugebėjimais. O jeigu patiektume 6 puodukus ir į tris pieno būtų įpilta anksčiau už arbatą? Tada tikimybė atsakyti teisingai tiesiog spėjant būtų lygi 1/20, tačiau jeigu manytume, kad arbatos skonio žinovės reputacijos nesugriauna ir viena klaida, tai tikimybė pereiti tokį testą tik spėjant (ją galima nesunkiai apskaičiuoti išrašius visus galimus variantus) vėl lygi 1/2!

Taigi gerai pagalvoti, kaip atlikti bandymą, reikia net šiuo labai paprastu atveju!

1.12 Tikimybių teorijos matematinių pagrindų klausimas

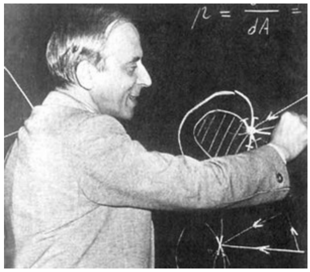
> Matematikos teorija dažniausiai atsiranda iš kelių įdomių uždavinių, iš kelių įžvalgų ir metodų. Jie plėtojami, tikslinami ... Tada iškyla būtinybė susisteminti, aksiomatizuoti teoriją. Kitaip tariant – turi atsirasti šios teorijos Euklidas.

XIX a. pabaigoje tikimybių teorijos vaidmuo labai išaugo. Mokslininkai taikė tikimybių teoriją tirdami fizikos, evoliucijos dėsnius, aiškindami socialinius procesus. Tačiau pačios tikimybių teorijos vieta mokslų visumoje buvo neaiški. Net pagrindinės jos sąvokos nebuvo aiškiai apibrėžtos. 1919 metais Richardo von Mizeso[51] straipsnyje apie tikimybių teorijos pagrindus rašoma taip: „ ... dabartinę

[49] „The Design of Experiments“, angl.
[50] „Mathematics of a Lady Tasting Tea“, angl.
[51] Richard von Mises, 1883–1953.

padėtį galima apibūdinti tik taip: tikimybių teorija nėra matematinė disciplina."

Kiekvienos praktikoje taikomos matematinės teorijos raidoje iškyla du svarbiausi klausimai: kaip griežtai apibrėžti teorines sąvokas bei dydžius ir kaip šias sąvokas bei dydžių reikšmes „įžvelgti" tikrovės reiškiniuose. Kartais be nuoseklios teorijos žmonės išsiverčia labai ilgai. Pavyzdys – geometrinių ilgių, plotų ar tūrių matavimo praktika. Kas yra kvadrato plotas? Pasakys kiekvienas. O skritulio? Žinoma, πr^2. Kodėl? Nes tokia formulė. Ar kiekvienos figūros plotui skaičiuoti yra sava formulė, kas gi yra tas plotas? Kas išmano, tikriausiai pasakys – ne taip lengva paaiškinti... Ir bus visiškai teisus. Nes patys matematikai po tūkstantmetės geometrinių matų skaičiavimo praktikos tik XIX amžiaus pabaigoje ir XX amžiaus pradžioje iš tiesų išsiaiškino, kas tas matas yra. Didžiausi nuopelnai šioje srityje tenka dviem prancūzų matematikams E. Boreliui[52] ir H. Lebegui.[53]



Richard von Mises, 1883–1953

Tad nenuostabu, kad ir matematikai ilgą laiką skaičiavo įvykių tikimybes, įrodinėjo teoremas neturėdami aiškaus požiūrio, kas gi iš tikrųjų tos tikimybės yra. Kai bandymo baigčių aibė baigtinė ir visos jos vienodai galimos, galima skaičiuoti palankias įvykiui baigtis, o įvykio tikimybe laikyti palankių baigčių ir visų baigčių kiekių santykį. O jeigu baigtys nėra vienodai galimos? Arba jeigu jų yra be galo daug?

Matematinė teorija tik tada tampa „tikrosios matematikos" dalimi, kai sukuriama šios srities aksiomatika, t. y. išvardijami pagrindiniai objektai, jų savybės, o iš jų – naudojantis logika kaip darbiniu instrumentu – išvedamos visos kitos sąvokos ir teiginiai.

Vienas iš pirmųjų tikimybių teoriją aksiomatizuoti pabandė Richardas Mizesas. Pirmajame pasauliniame kare jis buvo karo lakūnas, vėliau dėstė aviacijos mokslų disciplinas ir, žinoma, matematiką. Be to, buvo labai geras austrų poeto R. M. Rilkės kūrybos žinovas. Matematikus, kurie žino šį poetą ir suvokia jo kūrybos gelmę, tikriausiai galima ant pirštų suskaičuoti. Jis domėjosi įvairiomis matematikos taikymo sritimis, vadovavo Berlyno taikomosios matematikos institutui. Kai Vokietijos gyvenimą pradėjo tvarkyti naciai, R. Mizesui teko išvykti. Nepadėjo nė jo – karo lakūno – nuopelnai Pirmajame pasauliniame kare.

Savo tikimybių teorijos aksiomatiką R. Mizesas kūrė pagrindiniu objektu pasirinkęs begalines sekas, kurias pavadino kolektyvais. Kolektyvą galime laikyti matematiniu reiškinio, kurį valdo atsitiktinumas, modeliu. Pavyzdžiui, simetriško lošimo kauliuko, kurios sienelės sužymėtos skaičiais $1, 2, 3, 4, 5, 6$, mėtymo bandy-

[52] Félix Edouard Justin Émile Borel, 1871–1956.
[53] Henri Léon Lebesgue, 1875–1941.

mą atitiktų Mizeso „kolektyvas“

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, \quad i_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

turintis tokią savybę: jeigu $a_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, reiškia kiekį elementų $i_k = j$, $k \leqslant n$, tai $a_j(n)/n \to 1/6$, kai $n \to \infty$. Sąvoka gana miglota, veiksmai su šiais objektais, kuriuos nagrinėja Mizesas, gana painūs. Nenuostabu, kad Mizeso požiūris nesulaukė dėmesio. Tačiau, žvilgtelėję į tuos seniai pamiršto straipsnio puslapius, galbūt geriau suvoksime, kokį elegantišką požiūrį į tikimybes išdėstė rusų matematikas Andrejus Nikolajevičius Kolmogorovas[54]. Jo nedidelė 1933 metais vokiečių kalba parašyta knygelė „Tikimybių teorijos pagrindai“ iš tikrųjų yra pagrindai, kuriuos, nors ir ne iš karto, bet pripažino visi, kurie tyrė ar taikė tikimybių teoriją. A. Kolmogorovo požiūrį neformaliai galima paaiškinti taip.

Ką reiškia surasti įvykio tikimybę? Reiškia išmatuoti jo galimybes įvykti. Taigi tikimybė yra įvykio matas. Todėl ji privalo turėti tas pačias pagrindines savybes, kaip, pavyzdžiui, geometrinis matas. Geometrinio mato teorija jau yra. Taigi paverskime įvykius aibėmis, panašiomis į geometrinių taškų aibes, o tikimybes apibrėžkime pagal geometrinio mato pavyzdį.

Tokia yra Kolmogorovo sukurtos tikimybių teorijos aksiomatikos esmė. Priimdami šią „konstituciją“, paverčiame tikimybių teoriją visaverte matematikos sritimi, tokia kaip geometrija arba analizė. Matematikams, kuriuos domino tikimybių teorija, žinoma, labai palengvėjo. Tačiau tiems, kurie nori taikyti tikimybių teoriją gamtos bei socialiniuose moksluose, – nelabai. Juk realių įvykių „matavimo“, t. y. jų tikimybių skaičiavimo klausimas lieka toks pat keblus kaip ir anksčiau. Pavyzdžiui, požiūris į tikimybę kaip į matą, nė kiek nepadeda atsakyti į klausimą „kokia tikimybė, kad po penkiasdešimties metų žmonės įrengs gamyklas Marse?“ O gal toks klausimas apskritai neturi prasmės? Kiek pagalvoję tikriausiai nieko nenuspręsime, tačiau pajusime, jog norėtume, kad tokios rūšies klausimai taip pat būtų prasmingi.

Andrejus Nikolajevičius Kolmogorovas, 1903–1987

A. N. Kolmogorovas buvo vienas žymiausių XX amžiaus matematikų. Jis pažėrė daugybę naujų idėjų, požiūrių ir rezultatų visose svarbiausiose matematikos srityse išskyrus skaičių teoriją.

Būdamas septyniolikos metų A. N. Kolmogorovas įstojo į Maskvos universitetą jau turėdamas gerų savarankiškai įgytų matematikos žinių. Buvo spėjęs ir kiek padirbėti – traukinio konduktoriumi. Galbūt iš pradžių nebuvo visiškai tikras, ar

[54] Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 1903–1987.

matematika jo tikrasis pašaukimas. Ėmėsi istorijos tyrimų, parašė rimtą darbą apie mokesčių rinkimą senojoje Novgorodo respublikoje. Legenda pasakoja, kaip tą darbą įvertino žinomas istorikas: „Jūs pateikėte vieną istorinio fakto įrodymą. Matematikoje vieno įrodymo visiškai pakanka, bet mums istorikams reikia bent dešimties.“ Ir A. N. Kolmogorovas atsidėjo matematikai. Nepaisant visų porevoliucinės Rusijos nepriteklių, Maskvos universitetas buvo nuostabi vieta studijuoti matematiką. Čia dirbo aukščiausio lygio matematikai, kūrę XX amžiaus matematikos pagrindus: N. N. Luzinas, P. S. Urysonas, P. S. Aleksandrovas, A. J. Chinčinas.

Dirbdamas su A. J. Chinčinu[55] 1924 metais A. Kolmogorovas pradėjo tikimybių teorijos tyrimus. Tikimybių teorijos aksiomatika – tik vienas A. Kolmogorovo tikimybių teorijos kūrinys, tačiau ir jo užtektų, kad autorius taptų šios srities klasiku. A. Kolmogorovo idėjų įtaka tikimybių raidai didžiulė – jis pratęsė Markovo darbus, sukūrė šiuolaikinės atsitiktinių procesų teorijos pagrindus...

Ir dar – kažin ar visoje matematikos istorijoje buvo tokio lygio matematikas, kuris būtų tiek daug laiko, dėmesio ir pastangų skyręs gabių moksleivių ugdymui. Įžymiojoje matematinės krypties mokykloje Maskvoje „Kolmogorovo mokykloje“ jis skaitydavo paskaitas turbūt dažniau nei universitete.

Kolmogorovas kūrė kažką daugiau nei matematinės teorijos, Kolmogorovas kūrė „Kolmogorovo visatą“[56].

1.13 Lietuviai

Lietuvoje tikimybių mokslo žmonių yra daug. Kaip gi jie atsirado?

Pirmieji tikimybių teorijos daigai Vilniaus universitete pasirodė apie 1800 metus. O atskirą tikimybių teorijos kursą studentams 1830 metais buvo pasirengęs skaityti Zigmantas Revkovskis[57]. Tačiau ne kažin kiek suspėjo – už pagalbą 1830 metų sukilėliui teko iškeliauti į Kaukazą caro kariuomenės eiliniu. Ne tik Z. Revkovskio, bet ir paties Vilniaus universiteto maištinga dvasia buvo caro tinkamai įvertinta – 1832 metais jis buvo uždarytas.

1919 metais lenkai atkūrė Vilniaus universiteto veiklą pavadinę jį Stepono Batoro universitetu, o 1922 metais lietuviai Kaune įkūrė Lietuvos universitetą. Abiejuose universitetuose tikimybių teorija mažai domėtasi. Tiesa, Stepono Batoro universitete dirbo du įžymūs lenkų matematikai, kurie tyrė ir tikimybių teoriją: A. Zigmundas ir J. Marcinkievičius.[58]

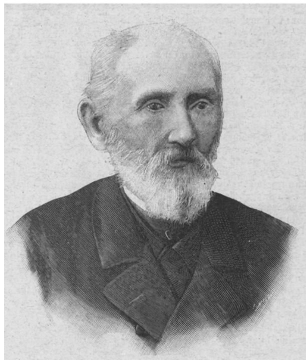
[55] Aleksandr Jakovlevič Chinčin, 1894–1959.

[56] Jeigu norite sužinoti daugiau apie A. Kolmogorovo gyvenimą ir veiklą – pavartykite tinklalapį http://www.kolmogorov.com/

[57] Zygmunt Rewkowski, 1807–1893.

[58] Antoni Szczepan Zygmund, 1900–1992.
Józef Marcinkiewicz, 1910–1940.

Tačiau tikimybių teorijos mokslo Lietuvoje jie, žinoma, negalėjo įdiegti. Juolab kad J. Marcinkievičius, prasidėjus karui, grįžo iš Anglijos, kad gintų tėvynę, ir žuvo. Trisdešimties metų karininkas padėjo galvą ne mūšio lauke, bet Katynėje. Kulkos yra tiesai, talentui ir grožiui labai abejingi vabzdžiai.



Zygmunt Rewkowski, 1807–1893

Pasibaigus Antrajam pasauliniam karui, tarp Vakarų ir Rytų Europos šalių nusileido uždanga. Ji, deja, buvo geležinė. Taigi stebėti Vakarų kultūros ir mokslo įvykius tapo beveik neįmanoma, tuo labiau juose dalyvauti. Tačiau žvelgti į rytus nebuvo draudžiama.

Bet tiesa yra visur tiesa, nesvarbu, kur spindi – rytuose ar vakaruose. Jeigu jai leidžiama spindėti. Kadangi tiksliųjų mokslų tiesų tironai ar totalitariniai režimai bijo mažiau arba netgi tikisi jas išnaudoti saviems tikslams, todėl pasitaiko, kad tikslieji mokslai suklesti ir nepalankiomis visuomenės raidai aplinkybėmis.

Šitaip galima pasakyti ir apie Tarybų Sąjungą pokario dešimtmečiais – matematikos tyrimai joje buvo pasaulinio lygio. Į tokius matematinius centrus Maskvoje ir Leningrade turėjo galimybę išvykti keli pirmieji Vilniaus universiteto pokario metų absolventai matematikai (K. Grincevičius, J. Kubilius, A. Naftalevičius, S. Strelicas). Nė vienas iš jų neketino užsiimti tikimybių teorija. Arčiausiai jos atsidūrė J. Kubilius išvykęs į Leningradą (dabar Sankt Peterburgas), nes jo mokslinis vadovas J. Linikas[59] tyrė ir skaičių teorijos, ir tikimybių teorijos bei matematinės statistikos uždavinius. Tačiau J. Kubilius užsiėmė skaičių teorija ir, sėkmingai apgynęs disertaciją, sugrįžo į Lietuvą.

Jonas Kubilius, 1921–2011

„Vienas lauke ne karys“ – šis priežodis nelabai tinka mokslui. Moksle vienas žmogus gali būti ne tik karys, bet netgi gali pranokti visą armiją. Tačiau būti vieninteliam, net ir labai geram kariui ... – tiesiog nuobodoka.

Sugrįžęs į Vilnių J. Kubilius ne tik tęsė savo skaičių teorijos tyrimus, bet ir ėmėsi veiklos, panašios į A. Kolmogorovo. Plėtojo ne tik savo matematines idėjas, bet ir kūrė sąlygas kitiems įsitraukti į matematinę kūrybą. Be entuziazmo nieko gero nesukursi, o entuziazmą sukelia asmeninės sėkmės, kad ir nedidelės. Buvo pradėtos rengti moksleivių matematikos olimpiados. Ar gali būti geresnė scena patirti pirmąsias matematines sėkmes ir netgi sulaukti plojimų?

[59] Jurij Vladimirovič Linik, 1915–1972.

Vytautas Statulevičius, 1929–2003

Į kokias gi tyrimo sritis nukreipti tuos jaunus žmones, patyrusius pirmosios sėkmės skonį moksleivių matematikos olimpiadose, pradėjusius tikras matematikos studijas universitete ir supratusius, kad jos tik pradžia? Gaivus pradžios jausmas – vienas iš didžiausių kiekvieno tyrėjo malonumų.

Buvo nuspręsta pagrindine Lietuvoje plėtojamų matematikos tyrimų kryptimi paversti tikimybių teoriją. Argumentai paprasti, lengvai suvokiami ir teisingi: tikimybių teorija įdomi teoriniu požiūriu, be to, – svarbi savo taikymais. Tačiau reikėjo „įsikibti“, įsitraukti į svarbių tikimybių teorijos ir statistikos klausimų tyrimą.

Į matematinius Tarybų Sąjungos centrus išvyko jaunesnės kartos žmonės. Vytautas Statulevičius – į Leningradą tikimybių teorijos studijų vadovaujant J. Linikui. Jis tapo pasaulinio lygio tikimybių teorijos srities matematiku, taip pat daug nuveikė organizuodamas tikimybių teorijos tyrimus Lietuvoje.

B. Grigelionis išvyko į Kijevą ir tapo žymaus tikimybininko B. Gnedenkos[60] aspirantu. Jis tapo atsitiktinių procesų tyrimo krypties Lietuvoje pradininku ir vadovu. Taip susidarė pirmosios lietuviškos tikimybių teorijos mokslo šakos, o kaip jos toliau šakojosi – atskirų studijų verta tema[61].

Bronius Grigelionis, 1935–2014

Kai geležinė uždanga surūdijo ir subyrėjo, Lietuvos matematikams atsivėrė ir Vakarų erdvė. Daug Lietuvoje išaugusių tikimybių teorijos specialistų dirba įvairių šalių mokslo centruose.

O Lietuvoje nuo 1973 metų kas penki metai vyksta tradicinė tarptautinė tikimybių teorijos ir statistikos konferencija. Tai viena iš svarbiausių šios srities konferencijų. Prieš kelis dešimtmečius ji teikė unikalią galimybę susitikti vakarų ir rytų šalių mokslininkams, tiriantiems tikimybių teorijos mokslą.

O apie šio mokslo pagrindus skaitykite jau kitame šios knygos puslapyje.

[60] Boris Vladimirovič Gnedenko, 1912–1995.

[61] Išsamią apžvalgą galima rasti knygoje „Matematika Lietuvoje po 1945 metų“. Matematikos ir informatikos institutas, 2006.

2 skyrius

Tikimybinė erdvė

Kasdien tiek visko atsitinka, kad nespėji net įsižiūrėti. Jeigu neįsižiūrėsi, tai nieko ir nesuprasi. Jei nesuprasi, negalėsi pasirinkti tų sprendimų, kurie geriausi. O kaip gi renkamės geriausią variantą iš keleto? Dažniausiai remdamiesi tam tikrais vertinimais arba matavimais, kurių rezultatai reiškiami skaičiais. Tačiau dažnai nėra visiškai aišku, nei ką matuoti, nei ką skaičiuoti! Kol nėra teorijos – praktika yra tarsi klaidžiojimas tamsoje. Net ir tie, kurie aukština praktiką ir neigia teorijos vertę, iš tikrųjų taip pat vadovaujasi *savo teorija*. Kadangi vengia susimąstyti apie savo teorijos pagrindus, dažnai nesuvokia, kokie naivūs ir nepatikimi yra argumentai, kuriais remiasi priimdami sprendimus.

Sukurti reiškinio teoriją reiškia suformuluoti pagrindines savybes atspindinčias sąvokas, nustatyti jų ryšius ir dėsnius. Kurti matematinę teoriją – formuluoti apibrėžimus, sąryšius ir teiginius matematine kalba, naudojantis logika kaip pagrindiniu instrumentu.

Tikrovės objektų dydžių matavimų pagrindas – geometrinės erdvės teorija. Tai darni apibrėžimų, teiginių ir metodų visuma. Ketiname tirti kitokios rūšies tikrovės objektus – įvykius. Todėl turime sukurti sąvokų, teiginių ir metodų sistemą, atspindinčią mums rūpimus tikrovės bruožus – tikimybinės erdvės teoriją.

2.1 Bandymai, baigtys ir įvykiai

> Geometrinę erdvę sudaro taškai, taškų poaibius vadiname kreivėmis, figūromis, kūnais... Bandymo baigtys yra tikimybinės erdvės „taškai“, o „figūros“ – atsitiktiniai įvykiai.

Kasdien atliekame daugybę veiksmų, dėl kurių baigties nesame visiškai tikri. Pavyzdžiui, išvykę iš namų prieš valandą iki paskaitų pradžios, tikimės nepavėluoti. Dažniausiai taip ir būna, be ne visada. Juk autobusas gali patekti į transporto kamštį, arba – jei ruošimasis kontroliniams darbams užtruko iki vėlumos – galime savo stotelę tiesiog pramiegoti. Taigi kelionė į paskaitas yra bandymas, kuris gali baigtis dvejopai: atvyksime laiku arba pavėluosime. Tačiau galime su tokiu bandymu susieti ir kitokias baigtis. Pavyzdžiui, atvykę į fakultetą, galime žvilgtelėti į laikrodį ir užsirašyti, kiek minučių liko iki paskaitos pradžios. Jeigu atvykome likus penkioms minutėms iki paskaitos pradžios, bandymo baigtį vaizduojame skaičiumi 5, jeigu penkias minutes pavėlavome, užrašome neigiamą skaičių -5. Tada bandymo baigtys bus užrašomos sveikaisiais skaičiais – ir teigiamais, ir neigiamais, ir nuliu.

Taigi, norėdami nusakyti bandymą, turime nurodyti ne tik tai, ką veiksime, bet ir kokius rezultatus stebėsime. Vieni bandymai visada baigiasi vienodai. Pavyzdžiui, uždegta medžio pliauska visada pavirsta anglimi ir pelenais. Galime ieškoti priežasčių, kodėl taip yra, tačiau tai jau nebe tikimybių teorijos uždavinys.

Tikimybių teorija nagrinėja tokius bandymus, kurių baigčių negalima garantuotai numatyti. Jeigu negalima numatyti, kuo bandymas pasibaigs, vadinasi, tokį bandymą valdo atsitiktinumai. Kodėl bandymo baigčių numatyti negalime, kas yra atsitiktinumas, ar apskritai atsitiktinumai egzistuoja tikrovėje – sudėtingas klausimas, kurį matematikai mielai palieka lukštenti filosofams bei į pasaulio sandaros pagrindus besigilinantiems fizikams.

O pati tikimybių teorija prasideda tokiu paprastu sakiniu:

nagrinėsime bandymus, kurių baigčių numatyti negalima[1].

Tiesiog sakysime, kad tokio bandymo baigtys yra atsitiktinės.

Kokia baigtis pasirodys – pasakyti negalime, tačiau galime išvardyti arba nusakyti visas galimybes. Bandymo baigčių aibės apibrėžimas – pirmas konstruktyvus žingsnis, kuriuo prasideda tikimybinis bandymo tyrimas. Įprasta bandymo baigčių aibę žymėti didžiąja graikiška raide Ω (skaitome: omega), o pačias baigtis mažosiomis omega raidėmis su indeksais ir be jų: $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$

1 pavyzdys. Monetos metimas

Metame monetą. Ji gali atvirsti herbu arba skaičiumi į viršų. Šias baigtis žymėkime H ir S. Tiesa, galimos ir kitokios baigtys, pavyzdžiui, moneta gali atsistoti ant briaunos arba tiesiog pasimesti. Tačiau tokios baigtys yra labai retos, todėl galime supaprastinti padėtį ir tarti, kad tokių baigčių apskritai nepasitaiko. Taigi baigčių aibė $\Omega = \{H, S\}$. Tai pats paprasčiausias bandymas: baigtys tik dvi. Tačiau tai labai svarbus pavyzdys, nes tokius bandymus atliekame kasdien, ir ne po vieną kartą. Iš tikrųjų, juk monetos metimą galime suvokti kaip bandymą, kuris gali pasibaigti dvejopai: sėkme (S) ir nesėkme (H).

---

[1]Knygose, kuriose tikimybių teorija dėstoma kaip abstrakti matematikos šaka nesiejant jos su taikymais, bandymai apskritai gali būti neminimi. Abstrakčiu požiūriu tikimybių teorija yra speciali mato teorijos sritis.

2 pavyzdys. Trys monetos metimai

Jeigu monetą mesime, pavyzdžiui, tris kartus, tai bandymo baigtį galėsime užrašyti trijų simbolių seka. Iš viso bus aštuonios skirtingos baigtys:

$$\Omega = \{HHH, HHS, HSH, SHH, HSS, SHS, SSH, SSS\}.$$

3 pavyzdys. Iki pirmos sėkmės

Tą pačią monetą galime mėtyti tol, kol atvirs pirmas skaičius (pasirodys pirmoji sėkmė). Skaičius gali atvirsti jau pirmame metime, gali antrajame, trečiajame, ketvirtajame... Gali visai neatvirsti. Taigi tokio bandymo baigčių aibė yra begalinė:

$$\Omega = \{S, HS, HHS, HHHS, \ldots, HHHH...\}.$$

4 pavyzdys. Automobilio stabdymas

Bandymas – stabdome automobilį. Baigtis – atstumas, kurį nuvažiuoja stabdoma mašina. Ją galime užrašyti teigiamu skaičiumi. Taigi $\Omega = (0; +\infty)$. Žinoma, labai toli stabdomas automobilis nenuvažiuos, tačiau kadangi didžiausio galimo atstumo nežinome, tai į baigčių aibę įtraukiame visus teigiamus skaičius.

Jau ir šie paprasti pavyzdžiai rodo – bandymų, kurių baigčių negalime numatyti, gali būti labai įvairių.

Panagrinėkime dar vieną bandymą: iš gerai išmaišytos 52 kortų kaladės traukiama viena korta. Kadangi visos kortos skirtingos ir bet kuri iš jų gali būti ištraukta, tai iš viso yra 52 baigtys. Galime jas žymėti nurodydami kortos spalvą ir pavadinimą. Pavyzdžiui, $\diamondsuit T$ reiškia baigtį „ištrauktas būgnų tūzas“.

Galbūt traukiame kortą tikėdamiesi tūzo. Ar įvykis

$$A = \{\text{ištraukta korta – tūzas}\}$$

įvyks, prieš bandymą negalime numatyti. Kada gi jis įvyks? Kai bandymas pasibaigs viena iš baigčių:

$$\clubsuit T,\ \diamondsuit T,\ \heartsuit T,\ \spadesuit T.$$

Šias baigtis pavadinkime palankiomis įvykiui A.

O dabar atlikime nedidelį, bet labai svarbų minties šuolį: įvykį A tiesiog sutapatinkime su palankių baigčių aibe:

$$A = \{\clubsuit T,\ \diamondsuit T,\ \heartsuit T,\ \spadesuit T\}.$$

Taip elgsimės nuolat: apibrėžę bandymo baigčių aibę Ω, kitus su tuo pačiu bandymu susijusius įvykius vaizduosime baigčių aibės poaibiais.

Nagrinėti bandymą pradedame taip:

> *Apibrėžiame visų bandymo baigčių aibę Ω.*
> *Kitus su bandymu susijusius įvykius vaizduojame poaibiais $A \subset \Omega$. Dažnai šiuos poaibius vadinsime tiesiog įvykiais.*
> *Jei baigtis ω yra A elementas, ją vadinsime palankia įvykiui A. Jeigu ω nėra A elementas, ją vadinsime nepalankia įvykiui A.*

Kiekvienam bandymui atlikti reikia tam tikrų įrankių ar aplinkybių. Ko gero, patys paprasčiausi įrankiai, su kuriais galime atlikti bandymus su atsitiktinėmis baigtimis – moneta ir lošimo kauliukas. Paprastumas – štai pagrindinė priežastis, kodėl monetos metimo ar lošimo kauliuko ridenimo bandymai labai dažnai minimi tikimybių teorijos tekstuose.

Lošimo kauliuko sienelės paprastai būna pažymėtos įspaustomis ar nudažytomis akutėmis. Tarkime, ruošiamės ridenti įprastinį lošimo kauliuką, jo sienelės pažymėtos $1, 2, \ldots, 6$ akutėmis. Kauliukui nustojus riedėti, fiksuokime, kiek akučių atvirto. Šis bandymas turi šešias baigtis:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \quad \omega_i = \{\text{atvirto } i \text{ akučių}\}.$$

Nagrinėkime įvykį $A = \{\text{atvirto lyginis akučių skaičius}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Įvykis turi tris palankias jam baigtis. Galime sudaryti įvykį iš įvykiui A nepalankių baigčių:

$$\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{\text{atvirto nelyginis akučių skaičius}\}.$$

Įvykį $\overline{A}$ vadinsime priešingu įvykiui A. Šią priešingo įvykio sudarymo operaciją galime pritaikyti visiems kiekvieno bandymo įvykiams. Taigi su bandymu susijusius įvykius visada galime nagrinėti poromis.

Grįžkime prie kauliuko ridenimo bandymo. Kiek palankių baigčių turi įvykiai

$$A = \{\text{atvirs mažiau kaip septynios akutės}\},$$
$$B = \{\text{neatvirs aštuonios akutės}\}?$$

Aišku, kad šiems įvykiams yra palankios visos baigtys, taigi jie visada įvyksta:

$$A = B = \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Įvykį, kuriam palankios visos bandymo baigtys, vadinsime būtinuoju ir visada žymėsime Ω – taip pat kaip ir visų baigčių aibę.

O koks įvykis yra priešingas būtinajam? Toks, kuris apskritai neturi palankių baigčių. Todėl ir žymėsime jį tuščios aibės ženklu $\emptyset$ ir vadinsime negalimuoju įvykiu.

Sąvokos

Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė, o $A \subset \Omega$ koks nors su šiuo bandymu susijęs įvykis. Įvykį, sudarytą iš baigčių, kurios yra nepalankios įvykiui A, vadinsime priešingu jam įvykiu ir žymėsime $\bar{A}$.
Įvykį, kuriama palankios visos baigtys, vadinsime būtinuoju įvykiu ir žymėsime Ω, jam priešingą vadinsime negalimuoju įvykiu ir žymėsime $\emptyset$.

Klausimai ir uždaviniai

1. *Bandymas – dviejų monetų: didesnės ir mažesnės metimas. Ketiname stebėti, kuriomis pusėmis atvirto abi monetos. Pažymėkime ω_1 įvykį, „didesnė moneta atvirto herbu", ω_2 – „mažesnė atvirto herbu". Ar teisinga šiuos įvykius pavadinti bandymo baigtimis?*
A) Taip, teisinga.
B) Ne, neteisinga.
C) Atsakymą lemia stebėtojo požiūris.

2. *Urnoje yra baltų, juodų ir raudonų rutulių. Bandymas – dviejų rutulių traukimas. Įvykis A reiškia, kad buvo ištrauktas baltas ir raudonas rutulys. Koks įvykis yra jam priešingas?*
A) Ištraukti du juodi rutuliai.
B) Neištrauktas nei raudonas, nei baltas rutulys.
C) Ištraukti vienspalviai rutuliai arba bent vienas juodas.

3. *Bandymas – kortos traukimas iš kaladės. Įvykis A reiškia, kad ištrauktas būgnų arba vynų tūzas. Kuris įvykis yra jam priešingo įvykio priešingas?*
A) Ištraukta korta – ne tūzas.
B) Ištraukta korta ne būgnų ir ne vynų tūzas.
C) Ištraukta korta vynų arba būgnų tūzas.

4. *Bandymas – tikimybių teorijos egzaminas. Kokias baigtis galime fiksuoti? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

5. *Bandymas: stiklinės vazos kritimas nuo stalo. Apibrėžkite tokio bandymo baigčių aibę.*

6. *Trumpųjų nuotolių bėgikas J pateko į pusfinalį. Pusfinalyje bėgs aštuoni dalyviai. Pirmieji keturi pateks į finalą. Mus domina tik J rezultatai. Taigi bandymas – bėgiko J dalyvavimas paskutiniuose dviejuose varžybų etapuose. Apibrėžkite šio bandymo baigtis.*

7. *Bandymas: trys draugai susiruošė žvejoti. Įvykis, susijęs su šiuo bandymu: $A = \{$visi trys pagaus po tiek pat žuvų$\}$. Žodžiais nusakykite priešingą įvykį.*

8. *Bandymas – trijų, skirtingomis spalvomis nudažytų lošimo kauliukų metimas. Metę kauliukus nustatome, kokiomis sienelėmis jie atvirto. Algis laimi, jeigu atvirsta* *bent 1 šešetukas, o Birutė – jei atvirsta bent 1 vienetukas. Kiek yra baigčių, kurios palankios ir įvykiui $A = \{Algis\ laimėjo\}$ ir įvykiui $B = \{Birutė\ laimėjo\}$?*

9. *Bandymas – n lošimo kauliukų metimas. Nagrinėkime įvykį*

$$A = \{bent\ du\ kauliukai\ atvirto\ tais\ pačiais\ akučių\ skaičiais\}.$$

Su kokiomis n reikšmėmis įvykis $\overline{A}$ yra negalimas?

Atsakymai

1. *B.* **2.** *C.* **3.** *C.*

4. *Galima baigčių aibę sudaryti tik iš dviejų baigčių: išlaikyta ir neišlaikyta. Galima baigtis sieti su įvertinimais.*

5. *Pavyzdžiui, baigtys gali būti tokios: vaza liko sveika, įskilo, sudužo.*

6. *Galime baigtis žymėti, pavyzdžiui, skaičių poromis $\langle i, j\rangle$, čia i reiškia bėgiko vietą pusfinalyje, o j – finale. Jeigu į finalą bėgikas nepateko, galime susitarti, kad $j = 0$.*

7. *Priešingas įvykis reiškia: bent dviejų žvejų pagautų žuvų kiekiai bus skirtingi.*

8. *30.* **9.** *Kai $n \geqslant 7$.*

2.2 Klasikinis tikimybės apibrėžimas

Klasikinis – vadinasi, pripažintas, pagrindinis, pavyzdinis. Galima jį taikyti, ieškoti apibendrinimų, galima juo remtis arba neigti ...

Palyginkime du bandymus. Pirmasis: metame simetrišką monetą ir užsirašome, kas atvirto – S jeigu skaičius (sėkmė), N – jeigu herbas (nesėkmė). Antrasis: nuėję iki gatvės kampo žvilgterkime, ar už jo kartais nesislapsto lokys. Jeigu jis ten yra – užsirašome S (sėkmė), jeigu ne – užsirašome N (nesėkmė). Abu bandymai turi po dvi baigtis, kurias net žymime vienodai: $\Omega = \{S, N\}$. Kuo gi vis dėlto skiriasi šie bandymai? Tai aišku kiekvienam: abi pirmojo bandymo baigtys yra lygiavertės, kitaip tariant – vienodai galimos. O antrojo – antroji baigtis žymiai dažnesnė. Tačiau ir pirmoji kartais gali pasitaikyti, jeigu mieste yra zoologijos sodas arba cirkas.

Šiame skyrelyje nagrinėsime bandymus, kurie turi baigtinį kiekį baigčių ir visos jos vienodai galimos. Tokių bandymų pavyzdžiai: simetriškos monetos (arba simetriško kauliuko) metimas vieną ar daugiau kartų, egzamino bilieto traukimas iš pateikto rinkinio, kokios nors loterijos laimėtojo parinkimas atsitiktinai traukiant laišką iš šūsnies...

Kartais reikia šiek tiek pagalvoti prieš darant išvadą, kad baigtys vienodai galimos. Įsivaizduokime, kad bandymas – dviejų simetriškų lošimo kauliukų metimas. Tarkime, buvo nuspręsta baigtimi laikyti atvirtusių akučių sumą. Taigi bandymas turi vienuolika baigčių, kurias galima užrašyti skaičiais $2, 3, \ldots, 12$. Ar galime teigti, kad jos vienodai galimos? Ne, nes pavyzdžiui, gauti sumą, lygią 4, yra trys galimybės, o gauti 3 – tik dvi.

Taigi nagrinėkime bandymą, kurio baigčių aibė sudaryta iš n vienodai galimų baigčių:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Kitus su bandymu susijusius įvykius vaizduojame šios aibės poaibiais. Kuo daugiau palankių baigčių turi įvykis A, tuo daugiau jis turi galimybių atlikus bandymą įvykti, t. y. tuo jis tikėtinesnis.

Susitarsime baigtinės aibės B elementų skaičių žymėti $|B|$.

Dabar jau galime apibrėžti įvykio tikėtinumo matą, kitaip tariant, tikimybę.

Klasikinis apibrėžimas

1 apibrėžimas. *Jeigu bandymo baigčių aibė Ω yra baigtinė, o visos baigtys yra vienodai galimos, tai įvykio $A \subset \Omega$ tikimybe vadinsime skaičių*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Šis apibrėžimas vadinamas klasikiniu. Maždaug prieš keturis šimtus metų pirmasis jį pradėjo naudoti italų matematikas D. Kardanas.

Jeigu parduotuvės lentynoje išrikiuota $n = 10$ stiklinių vazų ir $m = 4$ iš jų šiek tiek įskilusios, tai pasirinkus vazą atsitiktinai, įvykio

$$A = \{\text{nusipirksime įskilusią vazą}\}$$

tikimybė lygi

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5}.$$

Kokių žinių apie vazų pirkimą teikia šis skaičius? Ką jis reiškia praktiškai? Jeigu tokiomis aplinkybėmis po vazą nusipirks, tarkime, $N = 100$ pirkėjų, kiek iš jų parsineš namo įskilusias? Niekas negali atspėti tikslaus skaičiaus. Tačiau jeigu teigsime, kad maždaug $N \cdot P(A) = 40$, labai tikėtina, kad mažai apsiriksime.

Figūros plotas yra jos didumo matas, o įvykio tikimybė – jo galimybių įvykti atlikus bandymą matas. Abu matai turi nemažai tų pačių savybių.

1 teorema. *Tegu bandymo baigčių aibė yra baigtinė ir visos baigtys yra vienodai galimos. Tada su šiuo bandymu susijusių įvykių tikimybės turi šias savybes:*

1. *bet kokio įvykio tikimybė yra intervalo* $[0;1]$ *skaičius, t. y. bet kokiam įvykiui* A *teisinga nelygybė* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. *negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, o būtinojo – vienetui:*
$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1;$$
3. *įvykio* A *ir jam priešingojo įvykio* $\overline{A}$ *tikimybės susiję lygybe*
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Šių savybių įrodymas beveik akivaizdus. Vis dėlto – įsivaizduokite, kad jūsų kas nors paklausė: o kodėl šie teiginiai teisingi? Sugalvokite įtikinamus paaiškinimus.

Klausimai

1. *Žodyje AMERIKA yra šešios skirtingos raidės. Bandymas: atsitiktinai išbraukiama viena raidė. Jeigu baigtį žymėsime išbrauktąją raide, tai baigčių aibę sudarys šešios baigtys. Ar tokiam bandymui galima taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą?*

A) Galima taikyti.

B) Negalima, nes baigčių aibė neteisingai apibrėžta.

C) Nors baigčių aibė apibrėžta teisingai, tačiau baigtys nėra vienodai galimos, todėl klasikinis tikimybės apibrėžimas netinka.

2. *Simetriškos monetos pusės pažymėtos skaičiais* 0 *ir* 1. *Moneta metama du kartus. Baigtis – skaičių ant atvirtusių pusių suma. Tada baigčių aibė* $\Omega = \{0, 1, 2\}$. *Ar tokiam bandymui galima taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą?*

A) Negalima taikyti, nes baigtys nėra vienodai galimos.

B) Galima taikyti.

C) Galima taikyti, tačiau ne visiems įvykiams.

3. *Urnoje yra* 10 *rutulių, vieni jų balti, kiti juodi. Bandymas – atsitiktinis rutulio traukimas iš urnos. Įvykio, kad bus ištrauktas baltas rutulys, tikimybė yra keturis kartus didesnė už šiam įvykiui priešingo įvykio tikimybę. Kiek baltų rutulių yra urnoje?*

A) 9.

B) 8.

C) Tokia padėtis nėra įmanoma.

4. *Galilėjaus uždavinys. Metami trys simetriniai lošimo kauliukai, atvirtusių akučių skaičiai sumuojami. Sumas, lygias* $9, 10, 11, 12$, *galima gauti šešiais būdais. Kurios sumos dažniausiai pasitaiko lošimuose?*

Atsakymai

1. *C.* **2.** *A.* **3.** *B.* **4.** *Sumos* 9 *ir* 12 *pasitaiko vienodai dažnai, tačiau rečiau už sumas* $10, 11$, *kurios taip pat pasitaiko vienodai dažnai*[2] .

2.3 Keli pavyzdžiai

Taikant klasikinį tikimybių apibrėžimą kartais tenka nemažai skaičiuoti. Ne visada skaičiavimo „ant pirštų“ įgūdžių pakanka.

Norėdami pritaikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą, turime suskaičiuoti, kiek iš viso yra bandymo baigčių ir kiek yra nagrinėjamam įvykiui palankių baigčių. Dažnai tai pavyksta padaryti pritaikius visai paprastą skaičiavimo taisyklę.

Tarkime, kokius nors savo daiktus (pavyzdžiui, CD plokšteles) norime sužymėti skaitmens ir raidės poromis. Skaitmenų aibė $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, o raides rinksime iš aibės $\mathcal{R} = \{A, B, C, D\}$, taigi $|\mathcal{S}| = 10$, $|\mathcal{R}| = 4$. Kiek skirtingų daiktų galime tokiomis poromis pažymėti? Atsakymas kone akivaizdus. Kad būtų visiškai akivaizdus, surašykime visus žymenis į lentelę:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
B	B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
C	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
D	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9

Taigi iš viso galime sudaryti $|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{R}| = 10 \cdot 4 = 40$ skirtingų porų. Žinoma, skaičiai ir raidės šiame pavyzdyje tik tarp kitko. Porą galime sudaryti ir iš bet kokių kitokių objektų.

Daugybos taisyklė

2 teorema. *Tegu aibėje* U *yra* M, *aibėje* V – N *elementų, o porą sudarome pirmąjį elementą rinkdami iš aibės* U, *antrąjį iš aibės* V. *Tada iš viso šitaip galime sudaryti* $M \cdot N$ *skirtingų porų.*

Jeigu teorema, turi būti ir įrodymas. Tačiau pasitenkinkime nuojauta: porų lentelė – beveik įrodymas.

Dažnai tenka galvoti ne apie elementų poras, bet apie ilgesnes eiles. Skaičiuoti, kiek jų yra, taip pat galime naudodamiesi daugybos taisykle.

[2]Tai pastebėjo Toskanos herzogas ir paprašė Galilėjaus paaiškinti, kodėl taip yra. Galilėjus paaiškino parašęs 1620 metais straipsnelį „Atradimas, susijęs su lošimo kauliukais“.

Bendroji daugybos taisyklė

3 teorema. *Tegu aibėse $U_1, U_2, \ldots, U_k$ yra atitinkamai $N_1, N_2, \ldots, N_k$ elementų, o elementų eilę sudarome rinkdami pirmąjį iš aibės U_1, antrąjį iš U_2 ir t.t. Tada šitaip galime sudaryti iš viso*

$$N_1 \cdot N_2 \cdots N_k$$

k ilgio elementų eilių.

Aibės $U_1, U_2, \ldots, U_k$ nebūtinai skirtingos. Visus elementus galime rinkti iš tos pačios aibės U. Galime įsivaizduoti, kad elementai – tai sužymėti skaičiais rutuliai urnoje. Parinkę elementą užsirašome jo numerį, o elementą grąžiname atgal. Tada vėl renkame iš naujo. Jeigu aibėje U yra N skirtingų elementų, šitaip sudarytą k elementų eilę vadiname **gretiniu iš N po k elementų su pasikartojimais**[3]. Tokių gretinių iš viso yra

$$\underbrace{N \cdot N \cdots N}_{k} = N^k.$$

5 pavyzdys. Kauliuko mėtymas

Simetrinį lošimo kauliuką metame keturis kartus. Kokia tikimybė, kad per antrajį ir ketvirtajį metimus atvirs lyginis, o per pirmajį ir trečiajį – nelyginis akučių skaičius?

Pradėti reikia nuo bandymo baigties apibrėžimo. Jeigu po kiekvieno metimo užsirašysime atvirtusių akučių skaičių, gautasis skaičių ketvertas

$$\omega = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \rangle, \quad \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

ir nusakys baigtį. Taigi bandymo baigtis – gretinys iš 6 elementų po 4 su pasikartojimais. Iš viso yra $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ bandymo baigčių. Kokios baigtys palankios mums rūpimam įvykiui A? Ir jas galime suskaičiuoti naudodamiesi daugybos taisykle. Iš tiesų, ω_1, ω_3 reikia parinkti iš nelyginių skaičių, o ω_2, ω_4 iš lyginių skaičių (ne didesnių už 6) aibės. Taigi $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, ir

$$P(A) = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

6 pavyzdys. Ir vėl kauliukas

Simetrinį lošimo kauliuką metame keturis kartus. Kokia tikimybė, kad nors kartą atvirs šešios akutės?

[3] Prisiminę algebros sąvokas galime sakyti: gretinys su pasikartojimais – tai Dekarto sandaugos $U \times U \times \cdots \times U$ elementas. Tačiau svarbiau ne kaip nors šias eiles vadinti, bet mokėti apskaičiuoti jų kiekį.

Bandymo baigčių skaičius tas pats kaip nagrinėtame pavyzdyje: $|\Omega| = 6^4$. Tačiau dabar rasti mums rūpimo įvykio

$$A = \{\text{nors kartą atvirs šešetukas}\}$$

palankių baigčių skaičių kiek kebliau. Iš tiesų, juk šešetukas gali atvirsti ne vieną, bet daugiau kartų. Kai įvykis yra sudėtingas, verta panagrinėti priešingą įvykį. Galbūt jis paprastesnis? Mūsų atveju priešingas įvykis yra toks: $\overline{A} = \{\text{šešetukas neatvirto nė karto}\}$. Skaičiuokime priešingam įvykiui palankias baigtis $\omega = \langle\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\rangle$. Skaičiai ω_i gali būti bet kokie, išskyrus 6. Vėl turime gretinį su pasikartojimais, tik dabar iš 5 po 4 elementus. Taigi $|\overline{A}| = 5^4$ ir

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,5177.$$

Jei pasirodžius šešetukams gauname daugiau nei lošimo mokestis, lošti apsimoka! Tai žinojo ir Blezo Paskalio amžininkas, lošimų aistruolis Ševalje de Merė. O jeigu metami du kauliukai iš karto ir išlošiama, kai pasirodo du šešetukai? Kiek kartų reikėtų mesti kauliukų porą, kad lošimas būtų naudingas lošėjui, t. y. tikimybė, kad pasirodys du šešetukai nors vieną kartą, būtų didesnė už 1/2? Jis samprotavo taip: vieną kartą metus kauliuką šešetukas pasirodo su tikimybe 1/6 ir lošti naudinga, jei leidžiama mesti keturis kartus. Metus du kauliukus gauti abu šešetukus tikimybė lygi 1/36, t. y. sumažėja šešis kartus. Tad, matyt, mesti porą kauliukų reikia šešis kartus daugiau, t. y. 24 kartus. Tačiau šitaip lošdamas jis ėmė dažniau pralošti nei išlošti! B. Paskalis jam paaiškino, kodėl. Jums taip pat nebus sunku įsitikinti, kad taip ir turi būti.

Jeigu sudarydami gretinį parinktųjų aibės U elementų nebegrąžinsime į aibę, gausime gretinį iš skirtingų elementų. Jei aibėje U yra N elementų, o iš jos be grąžinimo renkame ir rikiuojame į eilę k elementų, gautąją eilę vadinsime **gretiniu iš N po k elementų be pasikartojimų.** Pažymėkime jų kiekį A_N^k. Šį skaičių taip pat galime surasti naudodamiesi daugybos taisykle. Iš tiesų, pirmąjį elementą galime parinkti N būdais, antrąjį galime rinktis iš vienu elementu mažiau turinčios aibės ir t. t.

Gretiniai be pasikartojimų

4 teorema.

$$A_N^2 = N \cdot (N-1), \quad A_N^3 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2), \quad \ldots,$$

$$A_N^k = \underbrace{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots (N-k+1)}_{k}.$$

Tarkime, rinksime elementus tol, kol nebebus ko rinkti, t. y. $k = N$. Tada gautasis gretinys bus tiesiog visų aibės elementų eilė, o skaičius A_N^N lygus galimybių išrikiuoti visus elementus į eilę skaičiui. Taigi N elementų į eilę galime surikiuoti

$$A_N^N = N \cdot (N-1) \cdots 2 \cdot 1 = N!$$

būdais.

7 pavyzdys. Kortos iš kaladės

Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiamos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad visos ištrauktos kortos bus būgnai?

Įsivaizduokime, kad kortas traukiame vieną po kitos ir rikiuojame į eilę. Ši eilė ir yra bandymo baigtis. Taigi bandymo baigtis – gretinys iš 52 po 5 be pasikartojimų. Iš viso baigčių yra $|\Omega| = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$. Įvykiui $A = \{\text{visos ištrauktos kortos būgnai}\}$ palankios baigtys – gretiniai, sudaryti iš skirtingų būgnų kortų. Jų skaičių irgi galime greitai apskaičiuoti:

$$|A| = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9, \quad P(A) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11}{39\ 984} \approx 0,0003.$$

Tikimybė gauti visas būgnų kortas labai maža; tokia sėkmė pasitaiko maždaug tris kartus iš 10 000.

Kokia tikimybė ištraukus penkias kortas gauti lygiai vieną būgnų kortą? Pažymėkime šį įvykį B. Būgnų korta gali būti pirmoji, antroji ir t. t. Taigi įvykiui B palankių baigčių bus:

$$|B| = 13 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 + 39 \cdot 13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 + \ldots = 5 \cdot 13 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36.$$

Tada

$$P(B) = \frac{5 \cdot 13 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0,411.$$

Įvykis B įvyks maždaug keturis kartus iš dešimties bandymų! O kokia tikimybė, jog ištraukę penkias kortas gausime lygiai du būgnus? Kiek pasvarstę suprasime, kad šiam įvykiui palankių baigčių skaičių tiesiogiai skaičiuojant nustatyti kiek sunkiau. Todėl paieškokime kito, paprastesnio būdo.

Tarkime, aibėje yra n elementų, o mes norime surašyti visus gretinius po k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ iš šios aibės elementų. Kiek jų yra, jau žinome:

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k}.$$

Sudarydami gretinius galime elgtis šitaip: pirmiausia pasirinkime k skirtingų aibės elementų ir sudarykime visas pasirinktųjų elementų eiles (gretinius). Iš viso jų bus $k!$. Paskui pasirinkime naują poaibį iš k elementų ir vėl sudarykime gretinius. Gretiniai, sudaryti iš skirtingų poaibių elementų, bus būtinai skirtingi. Kiek skirtingų poaibių iš k elementų galime sudaryti, jeigu elementus galime rinkti iš n elementų turinčios aibės? Pažymėkime šį dydį C_n^k.[4] Tada gausime tokį teiginį.

5 teorema.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}^{k}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1}_{k}}.$$

Poaibį, sudarytą parinkus k elementų iš n elementų turinčios aibės, vadinsime **deriniu iš n po k elementų**. Išvedėme derinių skaičiaus formulę, kurios dažnai prireiks. Kai n ir k nedideli, derinių skaičių apskaičiuoti lengva. Pavyzdžiui,

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120, \quad C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdots 4}{7 \cdot 6 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Gavome, kad $C_{10}^3 = C_{10}^7$. Tai ne atsitiktinumas.

Tris elementus iš dešimties galime parinkti taip: paprašykime, kad kas nors pasirinktų septynis iš dešimties, o mes pasirinkime likusius. Yra tiek pat būdų pasirinkti tris elementus iš dešimties, kiek – septynis iš dešimties. Ši taisyklė teisinga ir bendruoju atveju:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Kai $k = 0$, gauname $C_n^0 = C_n^n = 1$. Visus elementus galime pasirinkti tik vienu būdu, nieko nepasirinkti – taip pat vienu.

O dabar grįžkime prie pavyzdžio.

8 pavyzdys. Kortos iš kaladės

Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiamos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad iš jų lygiai dvi kortos bus būgnų?

Dabar įsivaizduokime, kad visos penkios kortos traukiamos ne po vieną, bet iš karto. Taigi baigtis – derinys iš 52 po 5. Baigčių iš viso yra $|\Omega| = C_{52}^5$. Įvykiui $C = \{\text{lygiai dvi kortos bus būgnų}\}$ palankios tos baigtys (deriniai), kuriose yra dvi būgnų kortos. Būgnų kortas galime parinkti C_{13}^2 būdais, o likusias tris – C_{39}^3 būdais. Pasinaudoję daugybos taisykle gausime

$$|C| = C_{13}^2 \cdot C_{39}^3, \quad P(C) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_{39}^3}{C_{52}^5} = \frac{9139}{3320} \approx 0,274.$$

[4] Modernesnis šio dydžio žymėjimas $\binom{n}{k}$.

9 pavyzdys. Rutuliai iš urnos

Uždavinį apie kortas galime suformuluoti visai neminėdami kortų. Tegu urnoje yra N baltų ir M juodų rutulių (arba, jeigu norite, – gaminių partijoje N gerų ir M brokuotų). Atsitiktinai traukiame k rutulių. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus lygiai n baltų?

Atsakymas, žinoma, priklauso nuo dydžių reikšmių. Jeigu, pavyzdžiui, $n > N$, galime be skaičiavimų teigti, kad tikimybė lygi nuliui. Tikimybė ištraukti n baltų rutulių nelygi nuliui, jei

$$\max(0, k - M) \leqslant n \leqslant \min(k, N).$$

Šią sąlygą žodžiais galima paaiškinti taip: negalime ištraukti daugiau baltų rutulių nei traukiame; taip pat – nei yra urnoje. Kita vertus, jei traukiame rutulių daugiau nei yra juodų, tai bent $k - M$ baltų rutulių tikrai ištrauksime.

Bandymo baigtis – derinys iš $N + M$ po k elementų. Taigi $|\Omega| = C^k_{N+M}$. Įvykiui

$$A = \{\text{ištrauksime lygiai } n \text{ baltų rutulių}\}$$

palankias baigtis suskaičiuosime irgi naudodamiesi deriniais:

$$|A| = C^n_N \cdot C^{k-n}_M, \quad P(A) = \frac{C^n_N \cdot C^{k-n}_M}{C^k_{N+M}}.$$

Nagrinėdami pavyzdžius, skaičiavome dydžius C^m_n. Jie labai dažnai pasitaiko įvairiuose sąryšiuose ir turi daug savybių. Vieną iš jų jau nustatėme: $C^m_n = C^{n-m}_n$. Dar šiek tiek patyrinėkime.

Tarkime, iš n elementų aibės reikia parinkti m elementų poaibį. Parinkime vieną elementą ir atidėkime jį į šalį. Rinkdami m elementų, galime atidėtąjį elementą įtraukti į poaibį, galime neįtraukti. Jeigu įtraukiame, likusiuosius $m-1$ elementą turėsime parinkti iš $n - 1$ elemento, tokių galimybių yra C^{m-1}_{n-1}. Jeigu atidėtojo elemento neįtrauksime į poaibį, bus C^m_{n-1} galimybių sudaryti poaibį. Taigi

$$C^m_n = C^{m-1}_{n-1} + C^m_{n-1}. \tag{2.1}$$

O dabar į šalį atidėkime ne vieną, bet k, $1 < k < n$ elementų, tada liks $n - k$ elementų. Rinkdami m elementų poaibį iš atidėtosios grupelės galime neimti nė vieno, galime imti vieną, galime daugiau elementų. Jeigu iš atidėtosios grupelės neimame nė vieno elemento, poaibį galėsime parinkti C^m_{n-k} būdais. Vieną elementą iš atidėtųjų galėsime parinkti $C^1_k = k$ būdais, o likusiuosius $m - 1$ elementus C^{m-1}_{n-k} būdais. Taigi galėsime sudaryti $C^1_k C^{m-1}_{n-k}$ skirtingų poaibių. Atitinkamai rinkdami 2 elementus iš atidėtųjų galėsime sudaryti $C^2_k C^{m-2}_{n-k}$ poaibių. Šitaip samprotaudami gauname tokį (2.1) lygybės apibendrinimą:

$$C^m_n = \sum_{j=0}^{m} C^j_k C^{m-j}_{n-k}.$$

Beje, ši lygybė teisinga su visomis sveikomis neneigiamomis $0 \leqslant k \leqslant n, m, n$ reikšmėmis.

Prisiminkime (arba įrodykime), kad dydžiai C_n^m – dvinario laipsnio koeficientai:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^m b^{n-m} + \cdots + C_n^n a^n.$$

O dabar keletas uždavinių – jėgoms išbandyti.

Uždaviniai

1. *Lošimas su simetrine moneta: jeigu mesta moneta atvirsta herbu, pirmasis žaidėjas gauna tašką, jeigu skaičiumi – antrasis. Kokia tikimybė, kad po keturių metimų bus lygiosios? Kokia tikimybė, kad po penkių metimų vienas iš žaidėjų turės vieno taško persvarą?*

2. *Muzikos grotuvo grojaraštyje – n muzikinių kūrinių, kurie grojami atsitiktine tvarka. Tas pats kūrinys gali būti grojamas pakartotinai. Kokia tikimybė, kad pirmasis pagrotas kūrinys vėl bus pagrotas m-uoju, tačiau ne anksčiau?*

3. *Muzikos grotuvo grojaraštyje – n muzikinių kūrinių, kurie grojami atsitiktine tvarka, tačiau tas pats kūrinys negali būti grojamas iš eilės du kartus. Kokia tikimybė, kad pirmasis pagrotas kūrinys vėl bus pagrotas m-uoju, tačiau ne anksčiau?*

4. *Fotografijų parodai pateikta n fotografijų, m iš jų – peizažai. Nuspręsta nuotraukas sukabinti atsitiktine tvarka. Kokia tikimybė, kad visi peizažai bus sukabinti vienas po kito?*

5. *Tą patį rinkinį iš n SMS žinučių gavo m žmonių. Kiekvienas iš jų vieną ištrynė neperskaitęs. Kokia tikimybė, kad bent du žmonės ištrynė tą pačią žinutę?*

6. *Į vienos įstaigos laukiamąjį vienas po kito suėjo n žmonių. Tačiau jie aptarnaujami ne iš eilės, bet atsitiktine tvarka. Kokia tikimybė, kad pirmasis atėjęs bus aptarnautas m-uoju?*

7. *Namo aukštų skaičius n, liftu važiuoja m žmonių. Kiekvienas gali išlipti bet kuriame aukšte. Kokia tikimybė, kad lygiai du žmonės išlips viename aukšte, o likusieji išlips po vieną?*

8. *Keista kelionė: kiekvieną minutę žmogus žengia žingsnį arba į kairę, arba į dešinę. Kryptį jis pasirenka visiškai atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad po $2m$ minučių jis grįš į tą pačią vietą, iš kurios pajudėjo?*

9. *Trys beveik vienodo ilgio gatvės sudaro trikampį, jos kertasi taškuose A, B, C. Iš taškų A ir B atsitiktinai pasirinkę kryptis vienu metu iškeliauja du draugai. Jeigu nesusitinka, tai gatvių sankirtos taškuose atsiduria vienu metu ir vėl atsitiktinai pasirinkę vieną iš dviejų galimų krypčių keliauja toliau. Kokia tikimybė, kad po n tokių kelionės etapų jie vis dar bus nesusitikę?*

10. *Duryse yra du užraktai, rakinami skirtingais raktais. Raktų ryšulyje yra n raktų, juos bandome atsitiktinai: pasirenkame raktą ir patikriname, ar jis tinka kuriam nors užraktui. Jau išbandytas raktas pakartotinai nebebandomas. Kokia tikimybė, kad durys atsidarys, kai bandysime m-ąjį raktą?*

Atsakymai

1. 3/8 *ir* 5/8. **2.** *Jei* $n = 5, m = 4$, *tikimybė* 16/125. **3.** *Jei* $n = 5, m = 4$, *tikimybė* 3/16. **4.** *Jei* $n = 10, m = 4$, *tikimybė* 1/30. **5.** *Jei* $n = 6, m = 4$, *tikimybė* 13/18. **6.** *Jei* $n = 10$, *tikimybė* 1/10. **7.** *Jei* $n = 10, m = 5$, *tikimybė* 504/1000. **8.** *Jei* $m = 4$, *tikimybė* 35/128. **9.** *Jei* $n = 5$, *tikimybė* 1/32. **10.** *Jei* $n = 10, m = 5$, *tikimybė* 4/45.

2.4 Geometrinės tikimybės

Kai įvykį sudarančių lygiaverčių baigčių suskaičiuoti neįmanoma, galima bandyti kitus matavimo būdus. Mokame matuoti ir skaičiuoti ilgį, plotą, tūrį...
Ką moki – visada pritaikai!

Norėdami skaičiumi išreikšti geometrinės figūros didumą, skaičiuojame jos plotą. Norėdami skaičiumi išreikšti įvykio tikėtinumą, skaičiuojame jo tikimybę. Kartais ši tikimybė reiškiama geometriniais dydžiais: ilgiu, plotu, tūriu.

10 pavyzdys. Sustojęs laikrodis

Kai elektroninio laikrodžio baterijos išsikraus, jis sustos. Kokia tikimybė, kad tai atsitiks, kai valandų rodyklė bus tarp 2 ir 3 valandos?

Neabejoju, kad atsakymą įspėjote iš karto: tikimybė lygi $\frac{1}{12}$. Kaipgi pagrįstume savo nuomonę?

Tarkime, laikrodis yra skritulio formos, taigi valandų rodyklė kiekvienu metu yra nukreipta į vieną padalų apskritimo tašką. Laikrodis gali sustoti bet kuriuo metu. Bandymo baigtį vaizduokime tuo tašku, į kurį laikrodžiui sustojus liko nukreipta valandų rodyklė. Taigi baigčių aibė Ω – apskritimo taškų aibė, o $A = \{\text{laikrodis sustojo tarp 2 ir 3 valandos}\}$ palankios baigtys sudaro lanką, jungiantį šių valandų padalas. Kyla natūrali mintis įvykio A tikimybę reikšti geometrinių ilgių santykiu:

$$P(A) = \frac{\text{lanko } A \text{ ilgis}}{\Omega \text{ ilgis}} = \frac{1}{12}. \tag{2.2}$$

Šiame pavyzdyje panaudojome kitokį nei klasikinis tikimybės apibrėžimą. Nustatykime, kokiems bandymams jį galima taikyti.

Geometrinis tikimybės apibrėžimas

2 apibrėžimas. *Tegu bandymo baigtys vaizduojamos geometrinės srities Ω taškais, visos baigtys yra lygiavertės, o sritis Ω turi nenulinį ir baigtinį geometrinį matą (ilgį, plotą ar tūrį). Tada susijusio su bandymu įvykio $A \subset \Omega$ tikimybe vadinsime skaičių*

$$P(A) = \frac{\text{geometrinis } A \text{ matas}}{\text{geometrinis } \Omega \text{ matas}},$$

čia geometrinis matas reiškia ilgį, plotą ar tūrį.

Atvirai sakant, šis „apibrėžimas“ nėra tikras matematinis apibrėžimas. Kodėl? Jame pavartota viena sąvoka, kuriai nesuteikėme griežtos matematinės prasmės: „visos baigtys yra lygiavertės“. Tačiau mūsų intuicija priima ją kaip savą. Logika irgi ją priimtų, tiesa, iš pradžių gerokai pakamantinėjusi. Apibrėžime yra ir dar vienas „povandeninis akmuo“, už kurio galima ilgam užkliūti. Tai klausimas, kokios tiesės, plokštumos ar erdvės taškų aibės turi geometrinį matą?

Nesunku įsitikinti, kad įvykių tikimybių savybės, kurias išvardijome skyrelyje „Klasikinis tikimybės apibrėžimas“, teisingos ir geometrinio tikimybės apibrėžimo atveju.

Panagrinėkime daugiau geometrinio tikimybės apibrėžimo taikymo pavyzdžių.

11 pavyzdys. Skambučiai draugui

Du draugai pažadėjo paskambinti trečiajam tarp pirmos ir trečios valandos. Kokia tikimybė, kad laikotarpis tarp pirmo ir antro skambučių bus ne ilgesnis už 15 minučių?

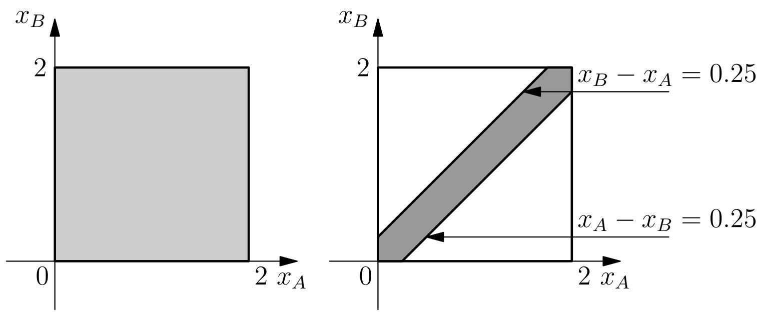
Bandymas baigsis, kai bus paskambinta antrąjį kartą. Pavadinkime pirmąjį draugą A, o antrąjį – B. Jeigu A skambučio momentą pažymėsime x_A, o B skambučio momentą x_B, tai šių skaičių pora $\omega = \langle x_A, x_B \rangle$ ir bus bandymo baigtis. Galime laikotarpį nuo pirmos iki trečios valandos sutapatinti su skaičių intervalu $[0; 2]$, tada x_A, x_B galės įgyti bet kokias reikšmes iš šio intervalo. Plokštumoje įvedę Dekarto koordinačių sistemą, skaičių porą ω galėsime pavaizduoti plokštumos tašku. Kokią plokštumos taškų aibę sudarys visos galimos bandymo baigtys? Atsakymas paprastas – kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus 2. O dabar pabandykime pavaizduoti įvykį

$$U = \{\text{laikotarpis tarp skambučių bus ne ilgesnis kaip } \tfrac{1}{4} \text{ valandos}\}.$$

Kad baigtis $\omega = \langle x_A, x_B \rangle$ būtų palanki U, skambučių momentų skirtumo modulis turi būti ne didesnis už $\frac{1}{4}$, t. y.

$$U = \left\{ \langle x_A, x_B \rangle : |x_A - x_B| \leqslant \frac{1}{4} \right\}.$$

Pavaizduokime įvykį U plokštumoje. Įvykio U tikimybė lygi užbrūkšniuotos srities ir viso kvadrato plotų santykiui. Lengviausia apskaičiuoti užbrūkšniuotos dalies plotą, suradus neužbrūkšniuotų trikampių plotus (trikampius suglaudę, gausime kvadratą!) ir šį plotą atėmus iš kvadrato ploto.



Gauname

$$P(U) = \frac{2^2 - 1{,}75^2}{2^2} = \frac{15}{64} \approx 0{,}234.$$

Šiame pavyzdyje bandymo baigtis vaizdavome plokštumos taškais, o įvykio tikimybę reiškėme plotų santykiu. Panagrinėkime bandymą, kurio baigtims pavaizduoti prireiks erdvės taškų.

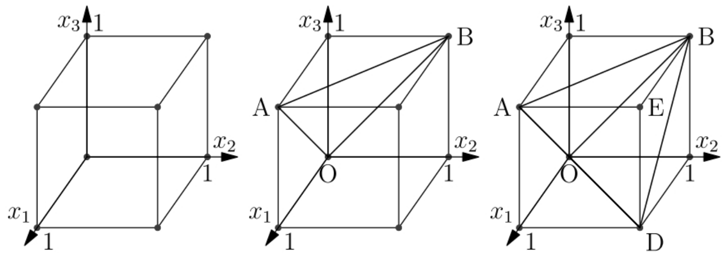
12 pavyzdys. Uždavinys apie trikampį

Atsitiktinai parenkamos trys atkarpos, kurių ilgiai – intervalo $[0;1]$ skaičiai. Kokia tikimybė, kad iš atkarpų galėsime sudėti trikampį?

Viską lemia parinktų atkarpų ilgiai. Pažymėję juos atitinkamai x_1, x_2, x_3 sudarysime baigtį – skaičių trejetą $\omega = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle, x_i \in [0;1]$. Skaičių trejetą vaizduosime erdvės, kurioje yra Dekarto koordinačių sistema, tašku. Pavaizdavę visas galimas bandymo baigtis, gautume kubą, kurio kraštinės ilgis lygus 1. Taigi baigčių aibė Ω yra vienetinis kubas. Kokie jo taškai vaizduoja baigtis, palankias įvykiui $T = \{$galėsime sudėti trikampį$\}$? Kad iš atkarpų, kurių ilgiai yra x_1, x_2, x_3, galėtume sudėti trikampį, būtina ir pakankama, kad būtų patenkintos trikampio nelygybės:

$$x_1 + x_2 \geqslant x_3, \quad x_1 + x_3 \geqslant x_2, \quad x_2 + x_3 \geqslant x_1.$$

Panagrinėkime pirmą nelygybę. Pakeiskime nelygybės ženklą lygybės ženklu: $x_1 + x_2 = x_3$. Visi erdvės taškai, tenkinantys šią lygybę, yra vienoje plokštumoje. Plokštumai apibrėžti pakanka trijų taškų. Štai jie: $O(0;0;0)$, $A(1;0;1)$, $B(0;1;1)$. Taigi plokštuma kerta tris kubo sienas pagal įstrižaines ir dalija kubą į dvi dalis. Viena iš jų – piramidė $COAB$, čia C žymime tašką su koordinatėmis $(0;0;1)$. Kurie taškai tenkina nelygybę $x_1 + x_2 \geqslant x_3$? Galime patikrinti įstatę taško $D(1;1;0)$ koordinates. Akivaizdu, kad šio taško koordinatės tenkina nelygybę. Taigi piramidės $OABC$ taškų koordinatės netenkina pirmos nelygybės. Analogiškai samprotaudami atmetame dar dvi piramides. Gauname, kad visas tris nelygybes tenkina briaunainio, kurio viršūnės yra O, A, B, D, E taškų koordinatės.



Bandymo baigčių aibė – vienetinis kubas.

Todėl

$$P(T) = \frac{OABDE \text{ tūris}}{\text{kubo tūris}}.$$

Kaip apskaičiuoti briaunainio tūrį? Paprasčiausia surasti trijų atkirstųjų piramidžių tūrius ir atimti juos iš kubo tūrio:

$$P(T) = \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Atsakymas įdomus. Atsitiktinai parinkus tris atkarpas vienodai tikėtina, kad galėsime sudaryti trikampį ir kad negalėsime. Galime kelti klausimą, kokia tikimybė, kad galėsime sudaryti smailųjį trikampį? Bukąjį trikampį? Atsakyti į šiuos klausimus nėra paprasta. Užtat galime nesunkiai surasti tikimybę, kad galėsime sudaryti statųjį trikampį. Skaičiuoti beveik nereikia, bet pagalvoti tektų. Ta tikimybė lygi nuliui!

Nagrinėtuose pavyzdžiuose nebuvo sudėtinga pasiruošti vartoti geometrinį tikimybės apibrėžimą. Tačiau kartais reikia ilgiau pagalvoti, kaip jį pritaikyti.

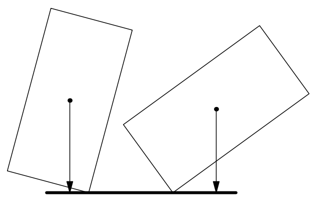
13 pavyzdys. Uždavinys apie storą monetą

Paprastai manome, kad metus monetą ji gali atvirsti viena iš dviejų pusių. Tačiau jeigu ji labai stora, galima ir trečia baigtis – moneta atsistos ant briaunos. Jeigu monetos spindulys lygus r, o storis h, kokia trečios baigties tikimybė?

Uždavinio sąlygoje nutylėta, kad moneta yra simetriška ir pagaminta iš vienalytės medžiagos. Tada jos svorio centras sutampa su geometriniu centru. Pirmiausia nusatykime, kada moneta atsistoja ant briaunos. Nagrinėkime monetą tuo momentu, kai ji prisiliečia plokštumos. Pažiūrėję į brėžinį nuspręsime, kad tai priklauso nuo monetos geometrinio centro projekcijos į plokštumą taško vietos.

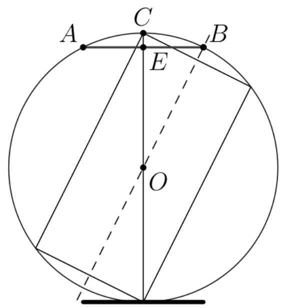
Jeigu šis taškas pateks į apatinės briaunos projekcijos sritį, moneta atsistos ant briaunos. Tačiau nuo ko tai priklauso? Nuo pradinės padėties, t. y. nuo tos padėties, iš kurios paleidžiame monetą kristi. Galime tarti, kad krisdama moneta nebesisukioja ir nebesivarto.

Tačiau kuo nusakyti pradinę monetos padėtį? Be to, reikia pasirūpinti, kad pradinės padėties nusakymo atvejai būtų vienodai galimi, t. y. lygiaverčiai. Mūsų moneta yra ritinys. Ritinys turi ašį ir geometrinį centrą. Galime įsivaizduoti, kad monetą paleidžiame iš padėčių, kurias atitinka tas pats centro taškas O ir skiriasi tik ašys. Tada pradinę monetos padėtį galėsime nusakyti nurodydami šią ašį. Tačiau norėdami taikyti geometrinį tikimybės apibrėžimą turime bandymo baigtį vaizduoti geometrinės srities tašku. Tiesė nėra taškas! Apie ritinį galime apibrėžti sferą. Įsivaizduokime tokią sferą, kuri apgaubia monetą, jos centras yra taške O. Tada monetos ašis kirs sferą dviejuose taškuose. Ašiai nusakyti pakanka imti vieną iš jų, pasirinkime viršutinį. Dabar monetos ašių aibę galime pakeisti pusės sferos taškų aibe, tai ir yra mūsų baigčių aibė! Galime tarti, kad ta sfera krinta kartu su moneta, o jai prisilietus prie plokštumos ji subyra kaip muilo burbulas.



Moneta atsistos ant briaunos, jeigu jos centro projekcijos taškas pataiko į briaunos projekcija

Nagrinėkime ribinę padėtį, kaip moneta prisiliečia plokštumos taip, kad jos centras projektuojasi į bendrą briaunos ir sienos projekcijos tašką. Ją atitinka punktyru pavaizduota monetos ašis, o ją savo ruožtu – taškas, esantis apskritime, kuris gaunamas, kertant sferą plokštuma, einančia per taškus A, B. Ši plokštuma atkera sferos nuopjovą, jos pagrindas – apskritimas su skersmeniu AB, o aukštinė CE. Jeigu monetos ašis kirstų sferą šios nuopjovos taške, moneta atsistotų ant briaunos. Tegu B šio įvykio žymuo. Tada



$$P(B) = \frac{\text{nuopjovos } ABC \text{ plotas}}{\text{pusės sferos plotas}}.$$

Belieka prisiminti ar sužinoti, kaip skaičiuojamas nuopjovos plotas. Štai tos žinios: jei sferos spindulys R, o nuopjovos aukštinė H, tai nuopjovos plotas lygus $2\pi RH$. Taigi

$$P(B) = \frac{2\pi \cdot CO \cdot CE}{2\pi \cdot OC^2}.$$

Belieka išreikšti CO ir CE monetos spinduliu r ir storiu h. Tai paprastas geometrinis uždavinys. Taigi

$$P(B) = 1 - \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + h^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2h/r)^2}}.$$

Koks turi būti monetos storio ir spindulio santykis, kad tikimybė, jog ji atsistos ant briaunos, būtų lygi 1/3? Atsakymą nesunku gauti: $h/r = \sqrt{5}/4 \approx 0,559$.

Uždaviniai

1. *Vienetinė atkarpa atsitiktinai padalijama į dvi dalis. Kokia tikimybė, kad trumpesniosios dalies ilgis bus mažesnis už* $\frac{1}{3}$*?*

2. *Nuo Vyžuonų iki Užpalių yra* 9 *kilometrai, o nuo Užpalių iki Jūžintų –* 17 *kilometrų. Jei važiuojant iš Vyžuonų į Jūžintus per Užpalius mašina dėl gedimo sustotų, kokia tikimybė, kad Užpaliai būtų arčiau negu Vyžuonos? Kokia tikimybė, kad Užpaliai būtų arčiau negu Vyžuonos ir Jūžintai?*

3. *Vienetiniame kvadrate atsitiktinai parenkamas taškas. Kokia tikimybė, kad jis bus ant kurios nors įstrižainės?*

4. *Sudėtingos formos sklypo plotą buvo nutarta įvertinti keistu būdu. Srityje buvo pažymėtas* $1\text{m}\times 1$ *m dydžio kvadratas, ir iš tolo sklypo link buvo mėtomas akmuo. Penkis šimtus kartų buvo pataikyta į sklypą, o iš jų –* 25 *kartus į kvadratą. Kaip naudodamiesi šiais duomenimis galėtume įvertinti sklypo plotą?*[5]

5. *Atsitiktinai parenkamas rombo taškas. Kokia tikimybė, kad jis bus arčiau kurios nors viršūnės negu įstrižainių susikirtimo taško? Galbūt sprendimą rasti bus lengviau, jeigu nagrinėsite atskirą rombo atvejį – kvadratą.*

Atsakymai

1. 2/3. **2.** 43/52 *ir* 1/2. **3.** *0.* **4.** $\approx 20\ m^2$. **5.** 1/2.

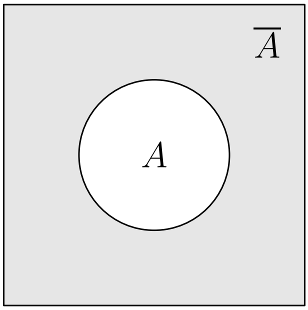
2.5 Įvykių algebra

Vaikai nesaugo dovanotų žaidimo kaladėlių giliai spintoje. Jie jas dėlioja, derina, konstruoja. Panašiai elgiasi ir matematikai: sukūrę sąvokas, jie ima su jomis ką nors veikti. Taigi – veiksmai su įvykiais...

[5]Šitaip matuodami taikėme idėją, kuria remiasi labai svarbus ir naudingas Monte-Karlo metodas. Jis taikomas ne tik plotams ar tūriams matuoti, bet ir sudėtingiems integralams skaičiuoti. Juk kartais matematikos formulės yra bejėgės, o suskaičiuoti būtinai reikia.

Kauliuko metimo bandymas turi šešias baigtis: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, čia ω_i kaip visada žymime baigtį „atvirto i akučių“. Tačiau įvykių, kuriuos galime sieti su šiuo bandymu, yra gerokai daugiau. Kiek? Kadangi įvykius vaizduojame baigčių aibės poaibiais, tų įvykių bus tiek, kiek galima sudaryti baigčių aibės poaibių. Yra iš viso C_6^m, $m = 0, 1, \ldots, 6$ būdų sudaryti poaibį iš m baigčių, tai įvykių iš viso yra

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64.$$



Įvykius ir jų sąryšius patogu vaizduoti diagramomis. Kvadratas vaizduoja būtinąjį įvykį Ω.

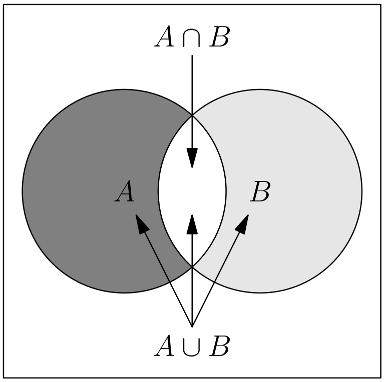
Įvykius sieja įvairūs tarpusavio ryšiai. Kadangi juos vaizduojame poaibiais, aibių veiksmus galime naudoti įvykių ryšiams nagrinėti.

Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė, o $\mathcal{A}$ – su bandymu siejamų įvykių šeima, ją sudaro baigčių aibės poaibiai. Jau žinome, kad kiekvienam įvykiui A šioje šeimoje galime rasti „antrininką“ – priešingą įvykį $\overline{A}$. Priešingo įvykio sudarymas yra pirmasis veiksmas, kurį pritaikę iš vieno įvykio gauname naują.

Apibrėšime dar du veiksmus.

3 apibrėžimas. *Tegu A ir B yra su tuo pačiu bandymu siejami įvykiai, t. y. jie vaizduojami tos pačios baigčių aibės poaibiais. Įvykį, kurį sudaro baigtys, palankios abiem įvykiams A, B, vadinsime jų sankirta ir žymėsime $A \cap B$. Įvykį, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių A, B (gali būti palankios ir abiems), vadinsime jų sąjunga ir žymėsime $A \cup B$.*

Taigi įvykių veiksmai – tie patys aibių veiksmai. Nagrinėdami juos galime net neminėti jokių bandymų ir įvykių. Tačiau kasdienėje kalboje niekas nesako, pavyzdžiui, taip: „žinai, vakar įvyko toks įvykis, jis yra štai tokios aibės poaibis...“ Bet įvykių veiksmai minimi ir kasdienėje kalboje. Pavyzdžiui, sakinys „tikėkimės, kad dviratis nesuges ir nepradės lyti“ iš tikrųjų reiškia, kad tikimasi, jog įvyks dviejų su bandymu (kelione) susijusių įvykių sankirta $A \cap B$, čia $A = \{\text{dviratis nesuges}\}$, $B = \{\text{nepradės lyti}\}$.



Įvykį $A \cap B$ galime apibrėžti kaip įvykį, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta abu įvykiai A, B. Įvykis $A \cup B$ savo ruožtu reiškia įvykį, kuris įvyksta, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A, B (arba abu).

Veiksmus su įvykiais galime pavaizduoti paprastais brėžiniais. Tie brėžiniai – tai tiesiog veiksmų apibrėžimai be žodžių.

Jeigu visos baigtys, palankios įvykiui A, yra palankios ir įvykiui B, tai A vaizduosime B poaibiu. Tokiu atveju rašysime $A \subset B$. Taigi

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

Galime apibrėžti ne tik poros, bet ir kiekvienos įvykių sistemos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (netgi begalinės) sąjungą ir sankirtą. Begalinės įvykių sekos $A_1, A_2, \ldots$ sąjunga tai įvykis, sudarytas iš baigčių, kurios palankios bent vienam sekos įvykiui, o sankirta – įvykis, sudarytas iš baigčių, kurios palankios visiems sekos įvykiams.

Jeigu yra įvykiai veiksmai, reikia aptarti ir jų savybes. Dauguma jų tiesiog akivaizdžios.

6 teorema. *Tegu A, B, C yra su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai, Ω žymime būtinąjį, $\emptyset$ – negalimąjį įvykį. Teisingi šie teiginiai:*

1. $\overline{\emptyset} = \Omega,\ \overline{\Omega} = \emptyset,\ \overline{\overline{A}} = A;$
2. $\emptyset \cup A = A,\ \Omega \cup A = \Omega,\ \emptyset \cap A = \emptyset,\ \Omega \cap A = A;$
3. $A \cup A = A,\ A \cap A = A;$
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset,\ A \cup \overline{A} = \Omega;$
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Kiek sudėtingesnė yra šeštoji savybė. Tačiau ir ji turėtų paaiškėti, jei panagrinėsite įvykių sąjungą ir sankirtą vaizduojančią diagramą. Ji vadinama de Morgano taisykle[6]. Jis suformulavo ją kaip logikos dėsnį. Jeigu A, B reiškia kokius teiginius, o brūkšneliu žymimas neigimo veiksmas, tada antrąją lygybę galime nusakyti taip: abu teiginiai A ir B neteisingi kartu reiškia, kad bent vienas iš jų neteisingas. De Morgano taisyklė teisinga visoms įvykių (aibių) sąjungoms ir sankirtoms:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

[6] Augustus De Morgan, 1806–1871.

14 pavyzdys. Įvykių reiškiniai

Naudodamiesi įvykių veiksmų savybėmis galime tvarkyti reiškinius su įvykių veiksmais. Pavyzdžiui, suprastinkime įvykio $D = \overline{(\overline{A} \cup B) \cup C}$ išraišką.

Tai galime padaryti naudodamiesi įvykių veiksmų savybėmis taip:

$$D = \overline{(\overline{A} \cup B)} \cap \overline{C} = (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Taigi įvykis D reiškia, kad įvykis A įvyko, o įvykiai B, C – ne.

Jeigu Ω yra bandymo baigčių aibė, kiekvieną su bandymu susijusį įvykį galime pavaizduoti poaibiu $A \subset \Omega$. Įvykių šeimos $\mathcal{A}$ narių ryšius reiškiame naudodami priešingo įvykio, įvykių sankirtos ir sąjungos veiksmus. Atlikę juos su šeimos $\mathcal{A}$ įvykiais, vėl gauname šios šeimos narius. Taigi įvykių šeima $\mathcal{A}$ turi šias savybes;

$$\begin{aligned}
&\emptyset \in \mathcal{A}, \quad \Omega \in \mathcal{A},\\
&\text{kiekvienam } A \in \mathcal{A} \text{ taip pat } \overline{A} \in \mathcal{A},\\
&\text{bet kokiems } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ taip pat } \cap_i A_i, \cup_i A_i \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Kitap tariant, atlikę veiksmus su šeimos $\mathcal{A}$ įvykiais, vėl gauname šios šeimos įvykius. Tai panašu į sveikųjų skaičių aritmetiką: sudėdami, daugindami sveikuosius skaičius vėl gauname sveikuosius skaičius.

Bandymo baigčių aibėje Ω galima parinkti daug poaibių. Dažnai netgi be galo daug. Tačiau mes ne šiaip ketiname nagrinėti su bandymu susijusius įvykius. Norime apibrėžti ir skaičiuoti jų tikimybes. Kai įvykių yra labai daug, ar neteks kartais „apriboti apetitą“ ir nagrinėti tik dalį įvykių? Su tokia būtinybe jau buvome susidūrę. Juk geometrinę tikimybę apibrėžėme tik įvykiams, vaizduojamiems poaibiais, kurių geometrinį matą galima apskaičiuoti. Kokia taisykle vadovautis iš visų įvykių šeimos atrenkant tuos, kuriuos nagrinėsime? Tikriausiai sutiksite, kad būtų gerai, jog nagrinėjamų įvykių šeima turėtų tas pačias **visų įvykių šeimos** savybes: jeigu įvykis įtrauktas į nagrinėjamų įvykių šeimą, tai priešingas įvykis taip pat turi joje būti, be to, nagrinėjamų įvykių šeimoje turi būti įvykių sąjungos bei sankirtos. Taigi nagrinėjamų įvykių šeimos taisyklę reikia suformuluoti taip.

Įvykių σ-algebra

Nagrinėjamų, su bandymu susijusių įvykių šeimai turi priklausyti būtinasis ir negalimasis įvykiai. Jeigu priklauso įvykis A, tai turi priklausyti ir $\overline{A}$. Jeigu šeimai priklauso įvykiai $A_1, A_2, \ldots$, tai turi priklausyti ir visų jų sąjunga bei sankirta.
Įvykių šeima $\mathcal{A}$, turinti šias savybes, vadinama σ-algebra.

Kam įvykių šeimos pavadinime reikalinga ta graikiška raidelė σ (sigma)? Galite laikyti ją ypatingų galių ženklu, kaip kokią šerifo žvaigždę amerikiečių filme. Kartais tenka nagrinėti paprastesnes įvykių šeimas, kurių įvykius jungti ar kirsti galime tik tada, kai tų įvykių skaičius baigtinis. Jungdami ar kirsdami begalines tokių šeimų įvykių sekas galime gauti jau nebe tos pačios šeimos įvykius. Tokios įvykių šeimos vadinamos tiesiog algebromis.

Ar dažnai tenka rūpintis įvykių σ-algebrų sudarymu? Kol studijuojame tik tikimybių teorijos pagrindus – ne. Pavyzdžiui, jeigu bandymo baigčių aibė yra baigtinė, sudarę σ-algebrą iš visų galimų įvykių, bėdų neturėsime. Kai aibė begalinė – visko gali būti.

Tačiau σ-algebros sudarymo uždavinys yra veikiau teorinis nei praktinis. Mus dominančių įvykių sistemą $\mathcal{S}$, nors ir nesudarančią σ-algebros, galime papildyti iki σ-algebros, įtraukę naujus įvykius. Papildyti, žinoma, galima įvairiai. Pavyzdžiui, jeigu mus domina tik vienas su lošimo kauliuko metimu susijęs įvykis $A = \{\textit{atvirto lyginis akučių skaičius}\}$, tai σ-algebrą gausime įtraukę visus kitus galimus įvykius. Joje bus net 64 įvykiai. Tačiau pastebėkime, kad vos keturių įvykių šeima

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$$

jau sudaro σ-algebrą. Tai pati mažiausia σ-algebra, kuriai priklauso įvykis A. Sakysime, kad ją generavo iš vieno įvykio sudaryta įvykių sistema $\mathcal{S} = \{A\}$.

Kad ir kokia būtų pradinė įvykių sistema $\mathcal{S}$, ją visada galima papildyti iki σ-algebros. Pati „mažiausia“ σ-algebra, kuriai priklauso visi sistemos $\mathcal{S}$ įvykiai, vadinama $\mathcal{S}$ generuota σ-algebra[7].

Panagrinėkime vieną svarbų pavyzdį.

15 pavyzdys. Borelio aibės

Tarkime, bandymo baigtys vaizduojamos skaičių tiesės taškais, o mus dominančių įvykių sistemą $\mathcal{S}$ sudaro intervalai: $\mathcal{S} = \{[a,b) : a < b\}$. Šios sistemos generuotą σ-algebrą vadiname skaičių tiesės Borelio σ-algebra, o jos elementus – Borelio[8] aibėmis. Trumpai tariant, Borelio aibės – tai aibės, kurias galima gauti iš $\mathcal{S}$ intervalų juos jungiant, kertant ir taikant priešingo įvykio sudarymo veiksmą. Pavyzdžiui, iš sąryšių

$$[a;b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a; b + \frac{1}{n}), \quad \{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a; a + \frac{1}{n})$$

gauname, kad uždarieji intervalai ir iš vieno skaičiaus sudarytos aibės yra Borelio aibės. Nesuklystume tarę, kad visos skaičių aibės, kurias dažniausiai nagrinėjame, yra Borelio aibės. Aibių, kurios nepriklauso šiai šlovingai aibių šeimai, taip pat yra labai daug, tačiau jos glūdi toje gūdžioje tankmėje, į kurią mes paprastai nekeliame kojos.

[7]Atidesnis skaitytojas gali pasigesti matematinio griežtumo. Iš tiesų matematiniuose tikimybių teorijos kursuose σ-algebra apibrėžiama formuluojant mažiau reikalavimų. Kitos savybės yra įrodomos. Kad visų σ-algebrų, apimančių $\mathcal{S}$ šeimoje yra „mažiausioji“ taip pat reikėtų įrodyti.

[8]Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871–1956.

Klausimai ir uždaviniai

1. *Jeigu bandymo baigtis yra palanki ir įvykiui A, ir įvykiui B, tai ji palanki*
A) jų sąjungai, bet ne sankirtai.
B) jų sankirtai, bet ne sąjungai.
C) ir sąjungai, ir sankirtai.

2. *Tegu bandymo baigčių aibė yra baigtinė, A, B yra du atsitiktiniai įvykiai, o $C = A \cap B$. Tada*
A) įvykis C visada turi daugiau jam palankių baigčių negu A.
B) įvykis C gali turėti tiek pat jam palankių baigčių, kiek ir įvykis A.
C) įvykio C palankių baigčių skaičius lygus įvykiams A ir B palankių baigčių skaičių sumai.

3. *Jeigu A, B yra atsitiktiniai įvykiai, $A \subset B, A \neq B$, tai*
A) $\overline{A} \subset \overline{B}$.
B) $\overline{B} \subset \overline{A}$.
C) Tarp $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ negalima nustatyti visais atvejais teisingo sąryšio.

4. *Bandymas – dviejų lošimo kauliukų metimas. Nagrinėkime įvykius:*

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{atvirtusių akučių suma lyginė}\}, \\ B &= \{\textit{ant pirmojo kauliuko atvirto daugiau akučių negu ant antrojo}\}, \\ C &= \{\textit{ant kauliukų atvirtusių akučių skirtumas ne didesnis už } 1\}. \end{aligned}$$

Kada įvyksta įvykis $A \cap \overline{B} \cap C$?

5. *Bandymas – kortos traukimas iš kaladės. Nutarėme nagrinėti tik dalį įvykių, kuriuos galima sieti su šiuo bandymu. Vienas iš įvykių, kurį būtinai norime įtraukti į nagrinėjamų įvykių šeimą, yra $A = \{$ištraukta būgnų korta$\}$. Kokius dar įvykius būtinai turime įtraukti į nagrinėjamų įvykių sistemą, kad ji sudarytų algebrą? Ar reikia įtraukti įvykį $\{$ištraukta vynų korta$\}$?*

6. *Bandymas tas pats kaip ankstesniajame pavyzdyje – kortos traukimas iš kaladės. Norime, kad į nagrinėjamų įvykių sistemą būtinai įeitų įvykiai $A = \{$ištraukta būgnų korta$\}$, $B = \{$ištraukta vynų korta$\}$. Kokius dar įvykius būtinai turime įtraukti į įvykių sistemą, kad ji būtų įvykių algebra?*

7. *Bandymas – vėl traukiame kortą. Tačiau šįkart mus domina tokie įvykiai:*

$$A = \{\textit{ištraukta būgnų korta}\}, \quad C = \{\textit{ištrauktas tūzas}\}.$$

Pasinaudokite įvykių veiksmais ir išreikškite įvykį $\{$ištrauktas tūzas, bet ne būgnų$\}$.

8. *Tegu A, B – su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai. Pasinaudokite veiksmų su įvykiais savybėmis ir įsitikinkite, kad $\overline{A} \cup \overline{(B \cap \overline{A})}$ yra būtinasis įvykis.*

Atsakymai

1. *C.* **2.** *B.* **3.** *B.* **4.** *Ant abiejų kauliukų atvirto tas pats akučių skaičius.* **5.** $\overline{A}, \emptyset, \Omega$. *Ne.* **6.** $\emptyset, \Omega, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, \overline{A \cup B}$. **7.** $\overline{A} \cap C$.

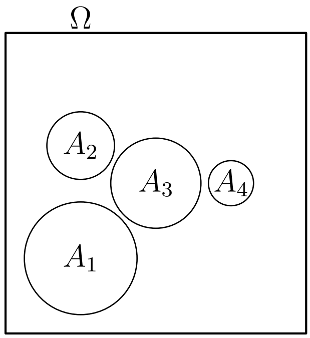
2.6 Tikimybinė erdvė

Jei reikia atlikti darbą – būtina darbo vieta ir įrankiai. Norėdami tirti atsitiktinumų valdomą reiškinį taip pat turime susikurti darbo vietą – tam reiškiniui tinkamą tikimybinę erdvę.

Įsivaizduokime tris bandymus. Pirmasis: metame monetą, pavyzdžiui, 5 kartus, ir rašome rezultatų eilutę (S, jei atvirto skaičius, H – jei herbas). Antrasis: mėtome monetą, kol pagaliau atvirsta herbas. Trečiasis: iš intervalo $I = [0; 1]$ atsitiktinai parenkame skaičių. Šių bandymų baigčių aibės tokios:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= = \{SSSSS, HSSSS, \ldots, HHHHH\},\\ \Omega_2 &= = \{H, SH, SSH, SSSH, \ldots, SSS...\},\\ \Omega_3 &= [0; 1].\end{aligned}$$

Visas pirmojo bandymo baigtis galime sunumeruoti, prireiks tik $|\Omega| = 2^5 = 32$ skaičių. Antrojo bandymo baigtis irgi galime sunumeruoti. Begalinei sekai galime priskirti nulį, o kitas baigtis numeruoti natūraliaisiais skaičiais. Tada kiekviena baigtis turės savo numerį. O štai trečiojo bandymo baigčių neįmanoma sunumeruoti. Tuo šis bandymas iš esmės skiriasi nuo dviejų pirmųjų.



Nesutaikomus įvykius $A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, brėžinyje galime pavaizduoti nesikertančiomis sritimis

Jeigu aibės elementus galime sunumeruoti, ją vadiname **diskrečiąja.**

Apibrėžus bandymo baigčių aibę reikia nuspręsti, kokią su bandymu susijusių įvykių šeimą nagrinėsime. Jau žinome, kad visais atvejais reikia laikytis tos pačios taisyklės – įvykių šeima turi sudaryti σ-algebrą. Kai bandymo baigčių aibė diskrečioji (kaip pirmųjų dviejų bandymų atveju), galime imti visus galimus įvykius ir nesukti sau galvos. Tačiau gali tekti gerokai pagalvoti kaip apibrėžti įvykių tikimybes. Konkretus apibrėžimas priklauso nuo paties bandymo ir nuo baigčių aibės rūšies. Pavyzdžiui, apibrėžimai, tinkami, kai baigčių aibė diskrečioji, bus visai nepritaikomi atvejams, kai baigčių sunumeruoti negalima. Jeigu paliktume visišką apibrėžimų pasirinkimo laisvę, galėtume susilaukti tikros painiavos. Tikimybėmis gali būti pavadinti visiškai skirtingas įvykių savybes atspindintys dydžiai! Kad taip neatsitiktų, reikia šiek tiek apriboti apibrėžimų laisvę, t. y. būtina nustatyti, kokias bendras savybes privalo turėti įvairiai apibrėžtos įvykių tikimybės. Tos savybės labai paprastos, galima sakyti, nusižiūrėtos iš geometrinių plotų matavimo teorijos.

Prieš formuluojant šias savybes susitarkime dėl vieno pavadinimo, kurį dažnai naudosime.

4 apibrėžimas. *Jeigu įvykiai A, B neturi nė vienos abiems palankios baigties, t. y. negali kartu įvykti, juos vadinsime nesutaikomais.*
Jeigu jokie du sistemos $A_1, A_2, \ldots$ įvykiai negali įvykti kartu, tai sakysime, kad jie sudaro nesutaikomų įvykių sistemą.

Tikimybės apibrėžimas

5 apibrėžimas. *Įvykių tikimybe vadinsime taisyklę, kiekvienam σ-algebros $\mathcal{A}$ įvykiui A priskiriančią intervalo $[0; 1]$ skaičių $P(A)$ ir tenkinančią šias sąlygas:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *jei $A_1, A_2, \ldots$ sudaro nesutaikomų įvykių sistemą, tai*

$$P\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i P(A_i).$$

Čia $\cup_i A_i$ žymime visų įvykių sąjungą, o $\sum_i P(A_i)$ reiškia visų įvykių tikimybių sumą.
Skaičių $P(A)$ vadinsime įvykio A tikimybe.

Taigi būtinojo įvykio tikimybė visada lygi vienetui. O kaipgi negalimojo? Imkime du negalimuosius įvykius, jie neturi nė vienos bendros palankios baigties (nes neturi palankių baigčių iš viso!). Taigi abu juos galime pavadinti nesutaikomais. Jeigu sujungsime – gausime tą patį negalimą įvykį. Taigi

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \quad P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) = P(\emptyset), \quad P(\emptyset) = 0.$$

Jeigu su bandymu susiejote jo baigčių aibę, parinkote įvykių σ-algebrą ir apibrėžėte tikimybę, vadinasi, sukonstravote matematinį modelį savo bandymui nagrinėti.

Tikimybinė erdvė

6 apibrėžimas. *Tikimybine erdve vadinsime trejetą, kurį sudaro: bandymo baigčių aibė Ω, su bandymu susijusių įvykių σ-algebra $\mathcal{A}$ ir taisyklė, priskirianti įvykiams skaičius – jų tikimybes.*

Du būdus apibrėžti tikimybę jau žinome. Jeigu bandymo baigčių aibė yra baigtinė ir visos jos vienodai galimos, įvykio A tikimybę galime apibrėžti naudodamiesi klasikiniu apibrėžimu:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

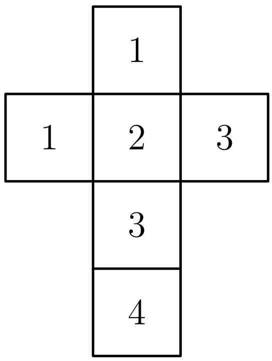
Jeigu baigtys vaizduojamos geometrinės srities taškais ir visos jos lygiavertės, tada galime taikyti geometrinį tikimybės apibrėžimą:

$$P(A) = \frac{\text{geometrinis } A \text{ matas}}{\text{geometrinis } \Omega \text{ matas}}.$$

Panagrinėkime pavyzdį, kuriam netinka nė vienas iš šių apibrėžimų.

16 pavyzdys. Kitoks lošimo kauliukas

Tarkime, ant simetriško lošimo kauliuko sienelių, kaip parodyta brėžinyje, surašyti skaičiai $1, 2, 3, 4$.



Metę kauliuką pamatysime, koks skaičius atvirto. Taigi bandymo baigčių aibėje yra keturios baigtys: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, čia ω_i kaip visada žymi baigtį, kad atvirto i akučių. Kiekvienam akivaizdu, kad baigtys nėra vienodai galimos, taigi klasikinio apibrėžimo taikyti negalime. Tačiau taip pat akivaizdu, kaip apibrėžti bandymo baigčių tikimybes:

$$P(\omega_1) = \frac{2}{6},\ P(\omega_2) = \frac{1}{6},\ P(\omega_3) = \frac{2}{6},\ P(\omega_4) = \frac{1}{6}.$$

Kam lygi įvykio $A = \{\text{atvirto nelyginis skaičius}\} = \{\omega_1, \omega_3\}$ tikimybė? Tikriausiai kiekvienas sutiks, kad šią tikimybę reikia skaičiuoti taip:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}.$$

Šis paprastas pavyzdys rodo, kaip reikia apibrėžti tikimybę tuo atveju, kai bandymo baigčių aibė yra diskrečioji.

Diskrečiosios tikimybinės erdvės sudarymas

Jeigu bandymo baigčių aibė Ω yra diskrečioji, t. y. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, tai įvykių algebrą $\mathcal{A}$ galime sudaryti iš visų poaibių $A \subset \Omega$. Po to reikia apibrėžti baigčių tikimybes

$$P(\omega_1) = p_1,\ P(\omega_2) = p_2, \ldots \quad (0 < p_i < 1), \quad p_1 + p_2 + \ldots = 1.$$

Kiekvieno kito įvykio $A \subset \Omega$ tikimybę apibrėžiame sumuodami šiam įvykiui palankių baigčių tikimybes

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Nesudėtinga įsitikinti, kad toks tikimybės apibrėžimas tenkina visas tikimybės apibrėžimo sąlygas.

Sudaryti diskrečiosios tikimybinės erdvės baigčių aibę dažniausiai būna nesudėtinga. Kitas reikalas – apibrėžti jų tikimybes. Kartais tai galime padaryti, pasinaudojant bandymo aplinkybėmis, kaip tai darėme pavyzdyje. Tačiau tikrovėje bandymai kur kas sudėtingesni. Kaip apibrėžti baigčių tikimybes tokiais atvejais?

17 pavyzdys. Augalo žiedai

Pasodinome augalą ir laukiame, kol jis sukraus žiedus. Taigi bandymas – augalo augimas. Sudarėme tokią baigčių aibę:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \{\text{augalas nepražys}\},\\
\omega_1 &= \{\text{augalas pražys vienu žiedu}\},\\
\omega_2 &= \{\text{augalas pražys dviem žiedais}\},\\
\omega_3 &= \{\text{augalas pražys trimis žiedais}\},\\
\omega_4 &= \{\text{augalas pražys ne mažiau kaip keturiais žiedais}\}.
\end{aligned}$$

Tačiau kas iš to? Šių baigčių tikimybių nežinome. Kaip sužinoti? Būdas tėra vienas – pasodinti didelį skaičių n augalų (atlikti daug nepriklausomų bandymų) ir, kai jie pražys (bandymai pasibaigs), suskaičiuoti, kiek kartų įvyko baigtys $\omega_0, \ldots, \omega_4$. Jeigu šių baigčių pasitaikymo skaičiai yra atitinkamai n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, galime apibrėžti

$$P(\omega_i) = \frac{n_i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ar tokiu būdu nustatysime tikras baigčių tikimybių reikšmes? Žinoma, kad ne. Tačiau juk ir tikrovėje, kad ir ką matuotume, gausime tik apytiksles dydžių reikšmes. Žinoma, nustatant tikimybes tokiu būdu, prireiks ir darbo, ir laiko. O gal kas nors jau anksčiau vykdė tokius bandymus? Nueikime į biblioteką ir pavartykime botanikos knygas...

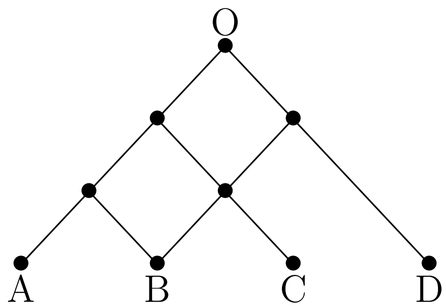
Uždaviniai

1. *Urnoje yra 5 balti, 4 juodi ir 3 raudoni rutuliai. Bandymas – dviejų rutulių traukimas. Tada baigtis – spalvų derinys, pavyzdžiui, {abi spalvos baltos}, {balta ir juoda}. Kiek baigčių yra bandymo baigčių aibėje? Tegu* $\omega = \{$*abi spalvos raudonos*$\}$ *Kaip reikėtų apibrėžti šios baigties tikimybę?*

2. *Bandymas – dviejų kauliukų metimas. Stebima baigtis – atvirtusių akučių suma. Apibrėžkite baigčių tikimybes.*

3. *Bandymas – dalyvavimas loterijoje. Galimos trys baigtys: nelaimėta nieko, laimėtas naujas loterijos bilietas, laimėtas prizas. Antroji baigtis pasitaiko dvigubai rečiau negu pirmoji, o trečioji – trigubai rečiau negu antroji. Suraskite baigčių tikimybes. Kokia tikimybė ką nors laimėti tokioje loterijoje?*

4. *Bandymas – kelionė iš taško* O *žemyn, kryžkelėse atsitiktinai renkantis kryptis.*



Bandymo baigčių aibė $\Omega = \{\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D\}$, *čia* ω_X *reiškia baigtį, kad keleivis atvyko į tašką* X. *Apibrėžkite baigčių tikimybes.*

5. *Kairėje ir dešinėje gatvės pusėje – po kavinę. Šeši svečiai renkasi kavinę atsitiktinai. Bandymo baigtis – svečių, pasirinkusių dešinės pusės kavinę, skaičius. Apibrėžkite bandymo baigčių tikimybes. Kokia tikimybė, kad dešinės pusės kavinę pasirinks daugiau svečių negu kairiąją? Kokia būtų šio įvykio tikimybė, jeigu būtų ne šeši, bet septyni svečiai?*

Atsakymai

1. *Iš viso yra 6 baigtys;* $P(\{$*abi spalvos raudonos*$\}) = C_3^2/C_{12}^2 = 1/22$.

2. *Pažymėkime* ω_j *baigtį, kad akučių suma lygi* $j, j = 2, 3, \ldots, 12$. *Tada* $P(\omega_2) = P(\omega_{12}) = 1/36, P(\omega_3) = P(\omega_{11}) = 2/36$ *ir t. t. Pagalvojus galima įsitikinti, kad* $P(\omega_i) = P(\omega_{14-i}), i = 2, \ldots, 12$.

3. *Baigčių tikimybės lygios* $6/10; 3/10; 1/10$. *Tikimybė laimėti lygi* $4/10$.

4. $P(\omega_A) = 1/7; P(\omega_B) = 3/7; P(\omega_C) = 2/7; P(\omega_D) = 1/7$.

5. *Pažymėkime* ω_i *baigtį, kad į dešinės gatvės pusės kavinę atėjo* i *svečių*, $i = 0, 1, \ldots, 6$. *Tada* $P(\omega_i) = C_6^i/2^6$. *Tikimybė, kad dešinės pusės kavinę pasirinks daugiau svečių, lygi* $11/32$. *Jeigu svečių būtų* 7, *ši tikimybė būtų* $1/2$.

2.7 Tikimybių savybės

Daugelio tikimybių teorijos uždavinių esmė tokia: žinodami vienų įvykių tikimybes, apskaičiuokite kitų. Tokius uždavinius sprendžiame naudodamiesi tikimybių savybėmis.

Norime įgyti žinių apie atsitiktinius įvykius? Vadinasi, reikalinga tikimybinė erdvė. Ar visada būtina ją konstruoti? Juk ne visos jos savybės yra mums rūpimam uždaviniui svarbios. Iš tikrųjų, dažnai galime manyti, kad tikimybinė erdvė jau sukurta, o mums reikia naudojantis žinomomis kelių įvykių tikimybėmis rasti nežinomas kitų įvykių tikimybes.

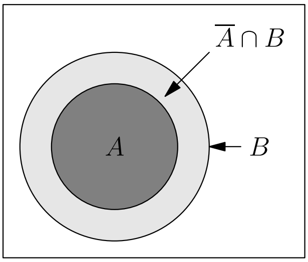
Pavyzdžiui, gali būti žinoma, kad vėlyvo rudens dieną lietaus tikimybė $\frac{2}{3}$, sniego – $\frac{1}{4}$, o ir lietaus, ir sniego – $\frac{1}{5}$. Kokia tikimybė, kad tą dieną apskritai bus kritulių? Atsakymą galime gauti naudodamiesi įvykių tikimybių savybėmis. Tad kokios gi jos yra?

7 teorema. *Jeigu* A, B *yra atsitiktiniai įvykiai,* $A \subset B$, *tai*

$$P(A) \leqslant P(B).$$

Įrodymas. Šis teiginys tvirtina: jeigu visos įvykio A baigtys yra palankios įvykiui B, tai įvykio B tikimybė ne mažesnė už įvykio A tikimybę.

Kad tai tiesa, vargu ar kas suabejos. Vis dėlto įrodykime ją naudodamiesi tikimybių savybėmis.



Iš brėžinio matyti, kad $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$. Kadangi įvykiai A ir $\overline{A} \cap B$ yra nesutaikomi, tai

$$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \geqslant P(A),$$

nes atmetus vieną neneigiamą dėmenį suma nepadidėja.

8 teorema. *Kiekvienam atsitiktiniam įvykiui A teisinga lygybė*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Ši savybė dažnai praverčia sprendžiant uždavinius: jeigu įvykis A yra sudėtingas, verta panagrinėti jam priešingą. Kartais priešingojo įvykio struktūra būna gerokai paprastesnė.

Įrodymas. Įvykiai A ir $\overline{A}$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga – būtinasis įvykis. Taigi

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega), \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

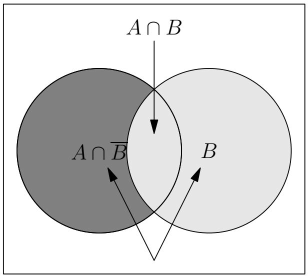
9 teorema. *Visiems įvykiams A, B teisinga lygybė*

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B). \tag{2.3}$$

Įrodymas.

Kadangi įvykiai $A \cap \overline{B}$ ir $A \cap B$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga lygi A, tai

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B).$$



Iš šios lygybės išplaukia teoremos tvirtinimas (2.3).

Įvykis $A \cap \overline{B}$ reiškia, kad A įvyko, o įvykis B – ne. Savo ruožtu, $B \cap \overline{A}$ reiškia, kad įvyko B, bet neįvyko A. Tada jų sąjunga reiškia įvykį, kad iš dviejų įvykių A, B įvyko tik vienas. Taigi

$$P(\text{įvyko tik vienas iš įvykių } A, B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}).$$

Pasinaudoję (2.3) gauname: jei $C = \{\text{įvyko tik vienas iš įvykių } A, B\}$, tai

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) \\ &= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B). \end{aligned}$$

Dažnai tenka skaičiuoti tikimybę, kad iš kelių įvykių įvyko bent vienas.

Įvykių sąjungos tikimybė

10 teorema. *Visiems įvykiams A, B teisinga lygybė*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Įrodymas. Iš brėžinio, kurį naudojome ankstesnei teoremai įrodyti, matyti, kad įvykiai $B, A \cap \overline{B}$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga lygi $A \cup B$. Taigi

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

čia tikimybei $P(A \cap \overline{B})$ reikšti pasinaudojome (2.3).

O kaip skaičiuoti įvykių sąjungos tikimybę, kai tų įvykių yra daugiau negu du? Tarkime, iš viso yra n įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pažymėkime visų tikimybių sumą

$$S_1 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$$

taip pat – įvykių porų sankirtų tikimybių, įvykių trejetų sankirtų tikimybių ir t. t. sumas:

$$S_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}), \quad S_3 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}), \quad \ldots,$$

$$S_m = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}), \quad \ldots, \quad S_n = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

Sumoje S_2 yra $C_n^2 = n(n-1)/2$ narių, sumoje S_3 dėmenų yra $C_n^3 = n(n-1)(n-2)/6$ ir t. t. Dydžiais S_i galime išreikšti įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sąjungos tikimybę.

11 teorema. *Visiems įvykiams $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teisinga lygybė*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n.$$

Kai $n = 2$, lygybę jau įrodėme. Lygybės bendrasis atvejis gali atrodyti mįslingai. Jį galima įrodyti matematinės indukcijos metodu. Tačiau gali būti, kad įrodymas neišsklaidys paslaptingumo ūko. Kad geriau suprastumėte šį ryšį pravartu panagrinėti trijų įvykių sąjungos atvejį. Nusibraižę brėžinį galvokite apie įvykius kaip apie plokštumos figūras, o apie jų tikimybes kaip apie plotus.

Įvykis $A \cup B$ reiškia, kad įvyko bent vienas iš įvykių A, B. Šio įvykio tikimybę galime išreikšti ir kitaip. Pasinaudoję sąjungos priešingojo įvykio išraiška gauname:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Analogiška lygybė teisinga ir tada, kai įvykių yra daugiau. Visiems įvykiams $A_1, A_2, \cdots, A_n$ teisinga lygybė

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}).$$

Įvykių sąjunga – gana paprastos struktūros įvykis. Panagrinėkime sudėtingesnius. Tarkime, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra atsitiktiniai įvykiai, o mums rūpi įvykis, kuris atsitinka, kai įvyksta **lygiai** m nagrinėjamos šeimos įvykių. Pažymėkime tokį įvykį $B_m, 0 \leqslant m \leqslant n$. Norime išreikšti tikimybę $P(B_m)$ įvykių A_i tikimybėmis. Nesunku tai atlikti įvykiams B_0, B_n. Tačiau kitoms m reikšmėms uždavinys sunkesnis. Tačiau dydžiai S_i, kuriuos naudojome įvykių sąjungai reikšti, padeda išspręsti ir šį uždavinį.

12 teorema. *Duota atsitiktinių įvykių seka $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Įvykis $B_m, 0 \leqslant m \leqslant n$ reiškia, kad įvyko lygiai m šios sekos įvykių. Tada*

$$P(B_m) = C_m^m S_m - C_{m+1}^m S_{m+1} + C_{m+2}^m S_{m+2} - \cdots + (-1)^{n-m} C_n^m S_n.$$

Ir šį teiginį geriau suprasite, jei naudodamiesi brėžiniu panagrinėsite, pavyzdžiui, atvejus $n = 3, m = 1, 2$.

18 pavyzdys. Lietus ir sniegas
Grįžkime prie skyrelio pradžioje minėtų įvykių. Žinomos įvykių tikimybės:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{rudens dieną lis}) = \frac{2}{3}, \\ P(B) &= P(\text{rudens dieną snigs}) = \frac{1}{4}, \\ P(A \cap B) &= P(\text{rudens dieną lis ir snigs}) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Kokia tikimybė, kad rudens dieną bus kritulių? Kad bus tik vienos rūšies kritulių?
Naudodamiesi tikimybių savybėmis galime apskaičiuoti:

$$\begin{aligned} P(\text{bus kritulių}) = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{43}{60}, \\ P(\text{bus vienos rūšies kritulių}) &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{31}{60}. \end{aligned}$$

19 pavyzdys. Nerūpestingas laiškininkas

Laiškininko krepšyje – n skirtingiems gavėjams adresuotų laiškų. Laiškininkas nusprendė perdaug nesivarginti skaitydamas, kas užrašyta ant vokų. Laiškus į dėžutes jis ketina sumėtyti visiškai atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad bent vienas žmogus gaus jam skirtą laišką? Kad lygiai m adresatų gaus jiems skirtus laiškus?

Įsivaizduokime, kad gavėjų pašto dėžutės yra vienoje eilėje ir sužymėtos skaičiais nuo 1 iki n. Laiškai irgi sužymėti tais pačiais numeriais. Laiškininkas eina paeiliui pro dėžutes ir atsitiktinai ištraukęs iš savo krepšio laiškus mėto juos į dėžutes. Pažymėkime A_i įvykį, kad i-asis gavėjas gaus jam skirtą laišką. Tai įvyks tuo atveju, kai i-uoju laiškininkas ištrauks laišką, kurio numeris taip pat i. Kiek pagalvoję turbūt sutiksite, kad $P(A_i) = 1/n$. Taigi

$$S_1 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Apskaičiuokime tikimybę, kad į i_1 ir i_2 dėžutes laiškai bus įmesti teisingai, t. y. kad įvyks įvykis $A_{i_1} \cap A_{i_2}$. Būdų atsitiktinai ištraukti du laiškus yra $n(n-1)$, o tinkamas tik vienas, taigi $P(A_{i_1} \cap A_{i_1}) = 1/(n(n-1))$ ir

$$S_2 = \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Analogiškai gauname, kad $S_m = 1/m!$, kai $m = 1, 2, \ldots, n$. Dabar jau galime skaičiuoti tikimybę, kad bent vienas gavėjas gaus jam skirtą laišką:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Palyginę gautą sumą su eksponentės funkcijos eilute

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

jei $x = -1$, galime padaryti išvadą: kai laiškų skaičius n yra didelis, tikimybė, kad bent vienas gavėjas gaus jam skirtą laišką $\approx 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$.

Savo ruožtu

$$P(B_m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} C_k^m S_k = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

Ir vėl galime padaryti išvadą, kad kai n didelis, $P(B_m) \approx \frac{1}{m!}\mathrm{e}^{-1}$.

Štai dar viena tikimybių savybė, kuri tikriausiai nieko nenustebins.

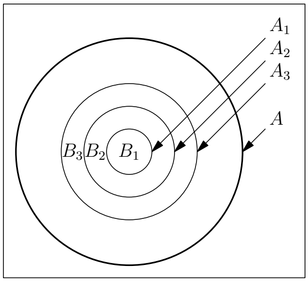
13 teorema. *Jeigu atsitiktiniai įvykiai A_i sudaro „didėjančią grandinę“*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, \qquad A = \bigcup_n A_n,$$

tai $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Apibrėžkime įvykius B_i. Tegu $B_1 = A_1$, ir $B_2 = A_2 \cap \overline{A_1}, B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}},\ n > 1$. Panagrinėkime brėžinį.

Įvykį $B_2 = A_2 \cap \overline{A_1}$ jame vaizduoja „žiedas“, sudarytas iš baigčių, kurios yra palankios A_2, bet nepalankios įvykiui A_1. Savo ruožtu $B_3 = A_3 \cap \overline{A_2}$ sudaro palankios A_3, bet ne A_2 baigtys. Įvykiai $B_1, B_2, \ldots$ yra nesutaikomi, o visų jų sąjunga lygi A. Taigi



$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Kadangi eilutė iš teigiamų skaičių $P(B_i)$ konverguoja (jos suma lygi $P(A)$), tai

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \to P(A), \quad n \to \infty.$$

Tačiau T_n reikšmė lygi įvykio A_n tikimybei. Iš tikrųjų iš brėžinio matyti, kad

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).$$

Taigi $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodytoji savybė vadinama tikimybės tolydumo savybe. Panašią savybę galime įrodyti ir „mažėjančioms“ įvykių grandinėms:

$$\text{jei } A_1 \supset A_2 \supset \ldots,\ A = \bigcap A_i, \text{ tai } P(A_n) \to P(A), \quad n \to \infty.$$

Uždaviniai

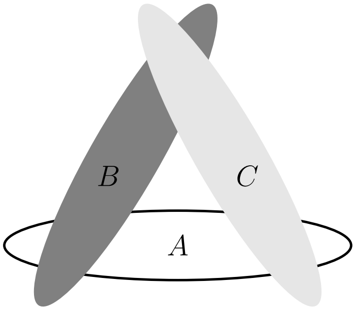
1. *Žinomos dviejų įvykių tikimybės: $P(A) = 4/5$ ir $P(B) = 7/10$. Be to, žinoma, kad $A \cup B$ visada įvyksta, t. y. yra būtinasis įvykis. Kokia tikimybė, kad abu įvykiai įvyks kartu?*

2. *Žinomos įvykių tikimybės: $P(A) = 1/3, P(B) = 1/2, P(A \cup B) = 3/4$. Apskaičiuokite tikimybes*

$$P(A \cap B),\ P(\overline{A} \cup \overline{B}),\ P(\overline{A} \cap \overline{B}), P(\overline{A} \cap B),\ P(A \cap \overline{B}).$$

3. *Žinome, kad* $P(A) = 3/4, P(B) = 1/3$*. Be to, žinome, kad jei įvyksta* B*, tai įvyksta ir* A*. Kokia tikimybė, kad* A *įvyks, o* B *– ne?*

4. *Brėžinyje pavaizduoti įvykiai* A, B, C*. Šie įvykiai negali įvykti kartu.*



Pasinaudokite brėžiniu ir užrašykite tikimybės $P(A \cup B \cup C)$ *formulę.*

5. *Įvykiai* A, B, C*. Visi kartu jie negali įvykti. Pasinaudokite brėžiniu ir užrašykite įvykio* $D = \{$*iš trijų įvykių* A, B, C *įvyko tik vienas*$\}$ *tikimybę.*

6. *Pažymėkime įvykius*

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{moksleivio matematikos pažymiai geri}\}, \\ B &= \{\textit{moksleivio užsienio kalbų pažymiai geri}\}. \end{aligned}$$

Peržiūrėjus duomenis buvo nustatyta, kad įvykiai $A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}$ *įvyko atitinkamai* $30\%, 35\%, 25\%, 10\%$ *atvejų. Raskite tikimybes* $P(A), P(B), P(A \cup B), P(\overline{A} \cup B), P(A \cup \overline{B}), P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Atsakymai

1. $1/2$. **2.** $1/12; 11/12; 1/4; 5/12; 1/4$. **3.** $5/12$.

4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$.

5. $P($*įvyko tik vienas iš įvykių* $A, B, C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(A \cap C) - 2P(B \cap C)$.

6. $65/100; 55/100; 90/100; 65/100; 75/100; 70/100$.

2.8 Sąlyginės tikimybės

Dažnai sakome: tai galima padaryti su sąlyga... Ir tikimybes kartais lengviau apskaičiuoti „su sąlyga“... Tačiau svarbu skirti, kas teisinga „su sąlyga“ ir kas – be jos.

Įsivaizduokite, kad jums ir dar dviem draugams reikia traukti burtus. Į urną įdedami trys rutuliai: juodas, mėlynas ir baltas. Kiekvienas dalyvis trauks po vieną rutulį. Laimės tas, kuriam atiteks baltas rutulys. Jums, žinoma, rūpi laimėti. Jeigu trauksite pirmas, tikimybė laimėti bus $\frac{1}{3}$. O gal verčiau traukti antram ar trečiam? Šiuo klausimu nuomonės kartais išsiskiria.

Taigi bandymas – trijų rutulių traukimas iš urnos. Mums rūpi įvykių $A_i = \{i\text{-asis ištrauktas rutulys baltas}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tikimybės. Aišku, kad $P(A_1) = \frac{1}{3}$. Kad kitų įvykių tikimybės yra tos pačios, tikriausiai irgi aišku. Vis dėlto dar patyrinėkime. Bandymas – trijų rutulių traukimas. Juos pažymėjus spalvų raidėmis J, M, B, bandymo baigtis galėsime užrašyti šių raidžių sekomis:

$$\Omega = \{JMB, JBM, BJM, BMJ, MBJ, MJB\}.$$

Akivaizdu, kad kiekvienas įvykis A_i turi po dvi palankias baigtis, todėl

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Taigi neverta gaišti laiko ginčijantis, kuriam pirmam traukti!

O dabar kiek pakeiskime burtų traukimo aplinkybes. Tegu urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vėl vienas po kito traukiami trys rutuliai. Kam dabar lygios įvykių $A_i = \{i\text{-asis ištrauktas rutulys baltas}\}$, $(i = 1, 2, 3)$ tikimybės? Ir šiuo atveju kiekvienas pasakys, kad $P(A_1) = \frac{4}{9}$. O kam lygios kitų įvykių tikimybės? Galime įsivaizduoti, kad juodi rutuliai sunumeruoti skaičiais $1, 2, 3, 4, 5$, o baltieji – $6, 7, 8, 9$. Tada bandymo baigtis yra trijų skirtingų skaičių gretinys:

$$\omega = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, 8, 9\}.$$

Taigi $|\Omega| = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7$. Tarkime, nusprendėte traukti rutulį antras. Prieš traukimą skaičiuojate palankias laimėjimo, t. y. įvykio A_2, baigtis. Baigtis $\langle i_1, i_2, i_3 \rangle$ palanki šiam įvykiui, jeigu $i_2 \in \{6, 7, 8, 9\}$. Galime jas visas išrašyti. Vidurinis skaičius gali įgyti keturias reikšmes; jeigu jį jau įrašėme, pirmą numerį galime parinkti iš 8 skaičių aibės; kai pirmieji du numeriai jau užrašyti, trečiąjį galima užrašyti 7 būdais. Taigi

$$|A_2| = 4 \cdot 8 \cdot 7, \quad P(A_2) = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{4}{9}.$$

Analogiškai samprotaudami gautume, kad $P(A_3) = \frac{4}{9}$. Todėl ir šiuo atveju dėl pirmumo teisės ginčytis neverta.

O dabar tarkime, kad nusprendėte traukti rutulį antras ir bandymas prasidėjo. Jeigu pirmasis ištrauktas rutulys buvo baltas, jau kitaip vertinsite savo galimybes laimėti. Tokiu atveju tikimybė, kad ištrauksite baltą rutulį, lygi $\frac{3}{8}$.

Kuo skiriasi šie to paties įvykio A_2 tikimybės skaičiavimai? Informacija apie bandymą, kuria pasinaudojome. Pirmoji tikimybė gauta prieš bandymą, taigi neturint jokių žinių apie jo eigą. Antroji – pasinaudojant žiniomis, kurias suteikė su bandymu susijęs įvykis A_1. Siekdami pabrėžti šį skirtumą pirmą tikimybę vadinsime **besąlygine**, o antrąją – **sąlygine** tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis A_1. Tikimybes žymėsime taip:

$$P(A_2) = \frac{4}{9}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}.$$

Besąlyginę tikimybę $P(A_2)$ skaičiavome naudodamiesi bandymo baigtimis – skaičių trejetais $\omega = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$. Jomis galime pasinaudoti ir skaičiuodami sąlyginę tikimybę $P(A_2|A_1)$. Iš tiesų, sužinoję, kad įvyko įvykis A_1, sužinome, kad bandymas gali baigtis tik tomis baigtimis, kurios palankios įvykiui A_1. Iš jų įvykiui A_2 palankių baigčių yra tiek, kiek yra palankių įvykiui $A_1 \cap A_2$ baigčių. Taigi gauname tokią sąlyginės tikimybės išraišką

$$P(A_2|A_1) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|A_1|} = \frac{|A_1 \cap A_2|/|\Omega|}{|A_1|/|\Omega|} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}.$$

Gautąja lygybe patogu pasinaudoti apibrėžiant sąlyginės tikimybės sąvoką bendruoju atveju.

Sąlyginė tikimybė

7 apibrėžimas. *Tegu A, B su tuo pačiu bandymu susiję atsitiktiniai įvykiai, $P(B) > 0$. Įvykio A sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis B, vadinsime skaičių*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.4}$$

Pagrindiniai teiginiai apie besąlygines tikimybes teisingi ir sąlyginėms tikimybėms.

14 teorema. *Tegu A, B, C yra atsitiktiniai įvykiai, $P(C) > 0$. Tada*

1. $P(\Omega|C) = 1,\ P(\emptyset|C) = 1;$
2. $P(A|C) = 1 - P(\overline{A}|C);$
3. *jei A, B yra nesutaikomi įvykiai, tai* $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C).$

Nagrinėdami burtų traukimo pavyzdį, sąlyginę tikimybę suradome labai lengvai. Tiesiog pasinaudojome žiniomis apie bandymo eigą. Taigi kartais sąlyginę tikimybę nesunku rasti ir nesinaudojant apibrėžimu. Tada apibrėžimo lygybe galime pasinaudoti kitam tikslui – įvykių sankirtos tikimybei rasti. Iš tiesų, padauginę lygybę (2.4) iš $P(B)$ gausime

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{2.5}$$

20 pavyzdys. Urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vienas po kito traukiami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu ištraukti rutuliai bus balti? Kad bent vienas rutulys bus baltas?

Pažymėkime A_i $(i = 1, 2)$ įvykį, kad i-asis rutulys bus baltas. Reikia apskaičiuoti tikimybes $P(A_1 \cap A_2), P(A_1 \cup A_2)$. Pritaikę (2.5) su $B = A_1, A = A_2$, gausime

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1), \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}.$$

Tikimybę $P(A_1 \cup A_2)$ apskaičiuosime dviem būdais:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}, \\ P(A_1 \cup A_2) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

Šiame pavyzdyje tikimybes $P(A_1 \cap A_2), P(A_1 \cup A_2)$ nesudėtinga apskaičiuoti ir tiesiogiai. Panagrinėkime sudėtingesnį bandymą.

21 pavyzdys. Urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vienas po kito traukiami du rutuliai. Ištraukus rutulį, į urną įdedami trys tos pačios spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai bus balti? Kad bent vienas rutulys bus baltas?

Reikia rasti tų pačių įvykių tikimybes. Skaičiuojant tinka tos pačios formulės:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{8}{33}, \\ P(A_1 \cup A_2) &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Įvykių sankirtos tikimybės formulę, kurią naudojome pavyzdžiuose, galima apibendrinti atvejui, kai įvykių yra daugiau nei du.

Tikimybių sandaugos formulė

15 teorema. *Tegu $A_1, A_2, \dots, A_n$ yra atsitiktiniai įvykiai, $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Teisinga lygybė*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \qquad (2.6)$$

Formulę (2.6) vadinsime tikimybių sandaugos formule.

Ankstesniame skyrelyje nustatėme formulę įvykių sąjungos tikimybei reikšti:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}).$$

Pritaikę tikimybių sandaugos formulę galime sąjungos tikimybę išreikšti taip:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_n}|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}).$$

22 pavyzdys. Nagrinėkime tą patį rutulių traukimo bandymą kaip ankstesniame pavyzdyje, tačiau dabar vienas po kito traukiami trys rutuliai. Kokia tikimybė, kad visi trys bus balti? Kad bent vienas iš jų bus baltas?

Naudodami tuos pačius žymėjimus gausime

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2), \\ P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}). \end{aligned}$$

Tikimybių $P(A_1), P(A_2|A_1), P(\overline{A_1}), P(\overline{A_2}|\overline{A_1})$ reikšmės tos pačios kaip ankstesniame pavyzdyje. Apskaičiuosime $P(A_3|A_1 \cap A_2)$. Kadangi pirmas ir antras rutuliai buvo balti, tai prieš traukiant trečiąjį urnoje buvo $9 - 1 + 3 - 1 + 3 = 13$ rutulių, o baltų – $4 - 1 + 3 - 1 + 3 = 8$. Taigi

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}, \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{13} = \frac{64}{429}.$$

Analogiškai gauname

$$P(\overline{A_3}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{9}{13}, \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} = \frac{35}{143}.$$

23 pavyzdys. Nutrauktas lošimas

Tarkime, du lošėjai į laimėjimų banką įdėjo po 5 eurus ir susitarė lošti mėtydami simetrišką monetą. Jeigu moneta atvirsta herbu (H), pirmasis gauna tašką, jeigu skaičiumi (S) – tašką gauna antrasis. Visą banką gauna tas, kuris pirmas surenka tris taškus. Pažymėkime A_1 įvykį, kad pirmasis laimės, ir A_2, kad laimės antrasis. Abiejų galimybės laimėti vienodos, t. y. $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Tarkime, per pirmą metimą atvirto herbas, taigi pirmas lošėjas pirmauja rezultatu 1 : 0. Jeigu dėl kokių nors aplinkybių reikėtų nutraukti lošimą, kaip teisingai pasidalyti laimėjimų banką, t. y. 10?

Tokio pobūdžio uždavinys paskatino tikimybių teorijos raidą. Minėjome, kad panašų uždavinį XVII amžiuje sprendė du šios teorijos pradininkai – B. Paskalis ir P. Ferma.

Taigi kaip pasidalyti laimėjimų sumą?

Pažymėkime $H_{1:0}$ įvykį, kad po pirmo metimo rezultatas tapo 1 : 0. Jei apskaičiuotume sąlygines tikimybes $P(A_1|H_{1:0}), P(A_2|H_{1:0})$, pamatytume, kad pirmoji tikimybė didesnė. Būtų protinga padalyti laimėjimą proporcingai šioms tikimybės, t. y. santykiu $P(A_1|H_{1:0}) : P(A_2|H_{1:0})$. Tačiau kam lygios šios tikimybės?

Jeigu lošimą tęstume, jis baigtųsi viena iš tokių baigčių (pirmojo metimo baigties H neberašome):

$$HH, HSH, SHH, HSSH, SHSH, HSSH, HSSS, SHSS, SSHS, SSS.$$

Pirmosios šešios baigtys palankios įvykiui A_1, likusios keturios – įvykiui A_2. Tačiau teigti, kad $P(A_1|H_{1:0}) = \frac{6}{10}, P(A_2|H_{1:0}) = \frac{4}{10}$ ir atiduoti pirmajam šešis, o antrajam keturis litus, būtų neteisinga, nes baigtys nėra vienodai galimos.

Šio keblumo išvengsime taip. Matome, kad lošimui baigti reikia daugiausiai keturių metimų. Nors laimėtojas gali paaiškėti jau po dviejų ar trijų metimų, įsivaizduokime, kad monetą vistiek metame keturis kartus. Tada baigčių aibė bus

$$\{HHHH, HHHS, HHSH, HHSS, HSHS, HSHH, SHHH, SHHS,$$
$$HSSH, SHSH, HSSH, HSSS, SHSS, SSHS, SSSH, SSSS\}.$$

Visos baigtys yra vienodai galimos, o pirmam lošėjui palankių yra net 11. Taigi

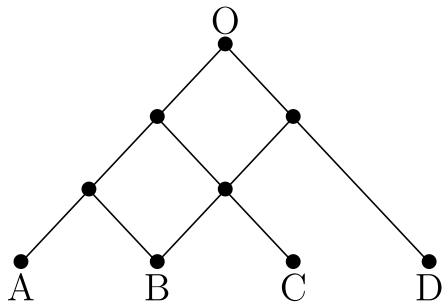
$$P(A_1|H_{1:0}) = \frac{11}{16}, \quad P(A_1|H_{1:0}) = \frac{5}{16}$$

ir teisingai dalijant pirmajam reikėtų duoti ne šešis, bet $6,875$ euro.

Uždaviniai

1. *Urnoje yra* 5 *balti rutuliai, pažymėti skaičiais* $12, 12, 13, 15, 18,$ *ir penki juodi, pažymėti skaičiais* $7, 10, 12, 12, 14.$ *Kokia tikimybė atsitiktinai traukiant ištraukti rutulį, pažymėtą didesniu už* 11 *skaičiumi? Kokia tikimybė, kad skaičius ant rutulio bus didesnis už* 11, *jeigu ištrauktas rutulys yra baltas? Jeigu juodas?*

2. *Keleivis keliauja iš taško O žemyn, kryžkelėse atsitiktinai rinkdamasis kryptis:*



Kokia tikimybė, kad jis pateks į tašką B, jeigu žinoma, kad įvyko įvykis: iš taško O keleivis pajudėjo link taško D?

3. *Kokia tikimybė, kad trys atsitiktinai susitikę žmonės yra gimę skirtingais metų mėnesiais? Kokia tikimybė, kad jie yra gimę skirtingais metų mėnesiais, jeigu žinoma, kad du iš jų yra gimę antroje metų pusėje (liepos–gruodžio mėnesiais), o vienas pirmoje?*

4. *Bandymas – dviejų simetriškų kauliukų metimas. Kokia tikimybė, kad ant bent vieno jų atvirs viena akutė? Kokia tikimybė, kad ant bent vieno jų atvirto viena akutė, jeigu žinoma, kad akučių suma yra didesnė už 3?*

5. *Tarkime, kad skyrelio pavyzdyje aprašytą lošimą teko nutraukti po dviejų metimų, kai rezultatas buvo $2:0$ pirmojo naudai. Kokiu santykiu reikėtų padalyti laimėjimų banką?*

6. *Įvykių A, B tikimybės vienodos ir nelygios nuliui: $P(A) = P(B)$. Įrodykite, kad $P(A|B) = P(B|A)$.*

Atsakymai

1. 8/10; 1 *ir* 6/10. **2.** 1/3. **3.** 55/72 *ir* 5/6. **4.** 11/36 *ir* 8/33. **5.** *Padalyti reikia santykiu* $7:1$.

2.9 Sąlyginių tikimybių savybės

Sudėtingo uždavinio skaidymas į keletą paprastesnių – matematinės veiklos kasdienybė. Įvykio tikimybės reiškimo sąlyginėmis tikimybėmis formulė – tokios veiklos įrankis.

Reikia atrakinti duris. Vienoje iš trijų kišenių yra trys vienodi, užraktui tinkami raktai, kitoje – vienas užraktui netinkamas raktas, trečioje – du, taip pat netinkami raktai. Atsitiktinai pasirinkę kišenę, išsitraukiame raktą ir bandome atrakinti duris. Kokia tikimybė, kad atrakinti pavyks pirmuoju bandymu?

Iš viso yra šeši raktai, trys iš jų tinka užraktui. Galbūt tikimybė lygi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$? Be abejo, ne! Teisingas atsakymas – $\frac{1}{3}$!

O dabar įsivaizduokime, kad raktai į kišenes sudėti kitaip. Vienoje kišenėje yra geras raktas, kitoje – vienas geras, o kitas netinkamas užraktui raktas, trečioje – vienas tinkamas, du ne. Kokia dabar tikimybė atrakinti duris pirmuoju bandymu? Sakysite, tai priklauso nuo to, kurią kišenę pasirinksime? Iš tikrųjų, pažymėję

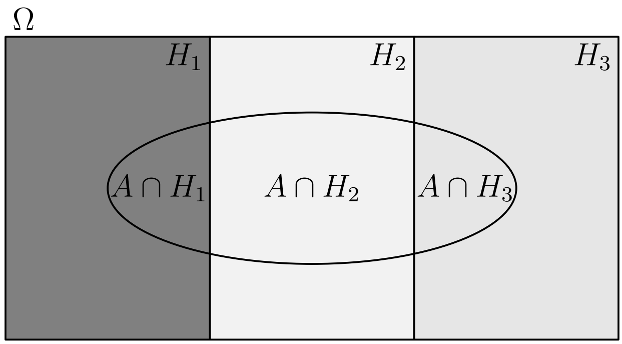
$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{pasirinkta pirmoji kišenė}\}, \\ H_2 &= \{\text{pasirinkta antroji kišenė}\}, \\ H_3 &= \{\text{pasirinkta trečioji kišenė}\}, \\ A &= \{\text{durys atrakintos pirmuoju bandymu}\}, \end{aligned}$$

gausime

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_3) = \frac{1}{3}.$$

Tačiau kokia mums nauda iš tų trijų skaičių? Juk mums reikia vieno!

Dar šiek tiek panagrinėkime šį paprastą bandymą. Be mums rūpimo įvykio A, apibrėžėme dar tris: H_1, H_2, H_3. Jie yra nesutaikomi, be to, vienas iš jų būtinai įvyksta.



Todėl galime užrašyti lygybę:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup H_3.$$

Taigi

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup (A \cap H_3), \\ P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3). \end{aligned}$$

Tikimybėms $P(A \cap H_i)$ skaičiuoti galime taikyti tikimybių sandaugos formulę. Tada $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$,

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3).$$

Galiausiai pasinaudoję tuo, kad $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$, gauname atsakymą:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}.$$

Įvykio A tikimybę apskaičiavome „dalimis“: radome tikimybes $P(A \cap H_1)$, $P(A \cap H_2), P(A \cap H_3)$ ir jas sudėjome. Toks metodas yra labai dažnai taikomas.

Pilnosios tikimybės formulė

16 teorema. *Jeigu atsitiktiniai įvykiai $H_1, H_2, \ldots$ yra nesutaikomi, jų tikimybės yra teigiamos ir $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots$, tai kiekvienam kitam įvykiui A teisinga lygybė*

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots \tag{2.7}$$

Formulė (2.7) vadinama pilnosios tikimybės formule – ji įvykio tikimybę „surenka iš dalių“. Įvykiai H_i dažnai vadinami hipotezėmis: atlikus bandymą vienas ir tik vienas iš jų būtinai įvyksta. Hipotezių skaičius gali būti netgi begalinis.

Įrodymas. Pilnosios tikimybės formulę (2.7) gauname lygiai taip pat kaip skyrelio pradžioje nagrinėtame pavyzdyje iš lygybių:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3) + \cdots, \\ P(A|H_i) &= P(H_i)P(A|H_i),\ i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

24 pavyzdys. Egzaminas

Egzamino bilietą sudaro keturi klausimai ir keturi atsakymai. Reikia sudaryti klausimų ir teisingų atsakymų į juos poras. Iš viso yra 25 bilietai. Studentas pasirengė egzaminui taip: išmoko teisingai atsakyti į pirmųjų dviejų bilietų tris klausimus, sužinojo teisingus atsakymus į pirmuosius du 3-5 bilietų klausimus, surado po vieną teisingą atsakymą į 6-19 bilietų klausimus, o kaip atsakyti į likusių bilietų klausimus, nesužinojo. Egzaminui išlaikyti būtina teisingai sudaryti visas keturias klausimų-atsakymų poras. Kokia tikimybė, kad studentui pavyks išlaikyti egzaminą?

Pažymėkime A įvykį, kad egzaminas bus išlaikytas. Egzamino bilietai sudaro keturias grupes. Pažymėkime H_1 įvykį, kad studentui teks pirmas arba antras bilietas, atitinkamai H_2, H_3, H_4, kad teks grupių 3-5, 6-19, 20-25 bilietai. Tada

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{2}{25},\ P(H_2) = \frac{3}{25},\ P(H_3) = \frac{14}{25},\ P(H_4) = \frac{6}{25}, \\ P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &+ P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4). \end{aligned}$$

Apskaičiuokime sąlygines tikimybes. Jeigu įvyko įvykis H_1, t. y. studentas gavo bilietą su trimis klausimais, į kuriuos jis moka atsakyti teisingai, tai jis teisingai sudarys visas keturias poras, taigi $P(A|H_1) = 1$. Jeigu įvyko įvykis H_2, studentas teisingai sudarys dvi klausimų-atsakymų poras, o kitas poras sudarys atsitiktinai. Yra dvi galimybės suporuoti du klausimus ir du atsakymus, taigi $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$. Analogiškai gauname $P(A|H_3) = \frac{1}{6}, P(A|H_4) = \frac{1}{24}$. Taigi

$$P(A) = \frac{2}{25} \cdot 1 + \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{14}{25} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{24} = \frac{73}{300}.$$

Tarkime, studentui iš mūsų pavyzdžio pavyko – jis išlaikė egzaminą. Įdomu, žinios padėjo ar sėkmė? Kitaip tariant, kuris iš įvykių H_1, H_2, H_3, H_4 įvyko? Žinoma, galėjo įvykti bet kuris iš jų. Tačiau kuris iš jų labiausiai tikėtinas? Kadangi

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + P(A \cap H_3) + P(A \cap H_4),$$

labiausiai tikėtinas bus tas įvykis, kurio įnašas $P(A \cap H_i)$ yra didžiausias. Patyrinėję skaičiavimus nustatysime, jog labiausiai tikėtina, kad studentas išlaikė egzaminą gavęs bilietą su tik vienu jam žinomu klausimu! Galime kiekybiškai išreikšti visų keturių hipotezių tikėtinumus sąlyginėmis tikimybėmis

$$P(H_1|A) = \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{24}{73}, \quad P(H_2|A) = \frac{P(A \cap H_2)}{P(A)} = \frac{18}{73},$$
$$P(H_3|A) = \frac{P(A \cap H_3)}{P(A)} = \frac{28}{73}, \quad P(H_4|A) = \frac{P(A \cap H_4)}{P(A)} = \frac{3}{73}.$$

Sužinoję, kad įvyko įvykis A, vertinome keturių hipotezių tikėtinumą. Tai įprasta kasdienio gyvenimo praktika, kuria remiamės planuodami savo veiksmus. Įsivaizduokime, pavyzdžiui, kad kambaryje užgeso šviesa. Galėjo būti kelios priežastys: tiesiog perdegė lemputė, o galbūt – saugikliai, gedimas elektros tinkluose, avarija elektrinėje... Ką pirmiausia darome? Skambiname kam nors ir klausiame, ar nesustabdytas atominės elektrinės reaktorius? Tikriausiai bandome pakeisti lemputę. Kodėl taip darome? Nes žinome, kad ši hipotezė labiausiai tikėtina...

Apibendrinkime formulę, kuria naudojome savo skaičiavimams.

Hipotezių tikrinimo formulė

17 teorema. *Tegu atsitiktiniai įvykiai $H_1, H_2, \ldots$ yra nesutaikomi, jų tikimybės yra teigiamos ir $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots$, o A koks nors įvykis, $P(A) > 0$. Tada kiekvienam įvykiui H_i teisinga lygybė*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \tag{2.8}$$

čia $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots$

25 pavyzdys. Pamestas raktas

Viename iš trijų kambarių pamestas raktas. Tikimybė, kad raktas pamestas pirmame, antrame ar trečiame kambaryje lygi atitinkamai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, čia $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$. Kambariai yra skirtingo dydžio ir nevienodai užpildyti. Jeigu raktas pamestas pirmame kambaryje, tikimybė apieškojus jį surasti raktą lygi p_1, jeigu raktas pamestas antrame ar trečiame kambaryje, tai radimo tikimybė atitinkamai lygi p_2, p_3. Tikriausiai rakto ieškojimą pradėsime pirmame kambaryje, nes labiausiai tikėtina, kad ten jį pametėme. Jeigu nesurasime – ieškosime antrame, po to – trečiame kambaryje. Tarkime, visus kambarius apieškojome, bet rakto neradome. Ką daryti? Kuriame kambaryje verta pradėti ieškoti iš naujo?

Pažymėkime $H_i, i = 1, 2, 3$, įvykį, kad raktas pamestas i-ajame kambaryje, o A – įvykį, kad, apieškoję visus tris kambarius, rakto nesuradome. Tada, pasinaudoję pilnosios tikimybės formule, rasime:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) \\ &= (1-p_1)\alpha_1 + (1-p_2)\alpha_2 + (1-p_3)\alpha_3. \end{aligned}$$

Nors rakto ir neradome, darbas nebuvo veltui: galime patikslinti tikimybes, kad raktas yra pirmame, antrame, trečiame kambariuose, t. y. suskaičiuoti sąlygines tikimybes $P(H_i|A)$ ir pakartotinai pradėti ieškoti tame kambaryje, kurį atitinkanti tikimybė didžiausia. Taigi

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)} = \frac{(1-p_i)\alpha_i}{(1-p_1)\alpha_1 + (1-p_2)\alpha_2 + (1-p_3)\alpha_3}.$$

Jeigu mums rūpi tik tai, nuo kurio kambario reikia pradėti pakartotinį ieškojimą, pakanka surasti, kuris iš dydžių $(1-p_i)\alpha_i$ yra didžiausias.

26 pavyzdys. Kur klystume?

Suklysti nesunku, ypač samprotaujant apie tikimybes. Tarkime, urnoje yra du rutuliai, jie gali būti balti ar juodi. Atsitiktinai trauksime vieną rutulį. Tarkime, sužinojome, kad tikimybė ištraukti baltą lygi 1/2. Tada nesuklysime teigdami, kad urnoje yra vienas baltas, kitas juodas rutulys.

O dabar įsivaizduokime, kad prieš mus vėl – urna su dviem rutuliais, kurie gali būti balti ar juodi. Galimi trys atvejai: abu balti, abu juodi, abu skirtingų spalvų. Pažymėkime juos atitinkamai H_1, H_2, H_3, visų jų tikimybės vienodos. Kokie rutuliai urnoje yra, pasakyti negalime. Ketiname traukti vieną rutulį, pažymėkime A įvykį, kad jis bus baltas. Naudodamiesi pilnosios tikimybės formule gausime:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3) = 1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Sužinojome, kad tikimybė ištraukti baltą rutulį kaip ir anksčiau lygi 1/2. Jeigu teigtume, kad urnoje buvo skirtingų spalvų rutuliai, ne visada būtume teisūs. Kodėl?

Uždaviniai

1. *Tegu B – bet koks įvykis, $0 < P(B) < 1$. Užrašykite pilnosios tikimybės formulę, kai yra tik dvi hipotezės: $H_1 = B$ ir $H_2 = \overline{B}$.*

2. *Įstatykite į pilnosios tikimybės formulę (2.7) $A = \Omega$ ir ją suprastinkite. Kokią lygybę gausite?*

3. *Vieno lošimo kauliuko sienelės sužymėtos skaičiais $1, 2, 3, 4, 6, 6$, kitų dviejų – $1, 2, 3, 3, 5, 6$. Kauliukai sudėti į urną. Bandymas: metamas iš urnos atsitiktinai ištrauktas kauliukas. Kokia tikimybė, kad atvirs 6?*

4. *Prieš jus – trys užklijuoti vokai. Du iš jų tušti, viename – pinigas. Galite pasirinkti vieną. Kai pasirenkate, žaidimo rengėjas paima ir atplėšia tuščią voką. Dabar ir jūs, ir jis turite po neatplėštą voką. Jeigu norite – galite pasikeisti vokais. Ar verta? Suraskite tikimybę, kad gausite voką su pinigu, jeigu nesikeisite ir – jeigu keisite.*

5. *Prieš jus – keturi užklijuoti vokai. Trys iš jų tušti, viename – pinigas. Galite pasirinkti vieną. Kai pasirenkate, žaidimo rengėjas paima ir atplėšia tuščią voką. Dabar jūs turite vieną, o jis du neatplėštus vokus. Jeigu norite – galite pakeisti savo voką į vieną iš jo vokų. Suraskite tikimybę, kad gausite voką su pinigu, jeigu nesikeisite ir – jeigu keisite.*

6. *Prieš jus – keturi užklijuoti vokai. Trys iš jų tušti, viename – pinigas. Galite pasirinkti du. Kai pasirenkate, žaidimo rengėjas paima ir atplėšia tuščią voką. Dabar jūs turite du, o jis vieną neatplėštą voką. Jeigu norite – galite pakeisti vieną savo voką į jo. Suraskite tikimybę, kad vienas iš jūsų pasirinktų vokų bus vokas su pinigu, jeigu voko nekeisite ir jei keisite.*

7. *Šalia vienas kito stovi trys kavos automatai. Žinome, kad vienas neveikia, kitas – maždaug 50 % atvejų praryja monetą, bet kavos neįpila, trečias visada veikia gerai. Atsitiktinai pasirenkame vieną iš jų ir bandome. Du bandymai iš eilės buvo sėkmingi – automatas veikė gerai. Kokia tikimybė, kad būtent šis automatas visada veikia gerai?*

8. *Ankstesniojo uždavinio neveikiantis automatas buvo pakeistas kitu, kuris gerai veikia 30 % atvejų. Jeigu atsitiktinai parinktas automatas du kartus iš eilės veiktų gerai, kokia tikimybė, kad jis yra tas, kuris veikia be priekaištų?*

9. *Ar alkoholio kiekis vairuotojo kraujyje viršija leistiną normą, policininkas sprendžia remdamasis alkotesterio skalės rodmenimis. Sprendimas būna teisingas su tikimybe $0,95$. Taigi jei*

$$A = \{\textit{alkoholio kiekis viršija normą}\},\ B = \{\textit{alkotesteris rodo: kiekis viršija normą}\},$$

tai

$$P(B|A) = P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,95.$$

Tarkime, 5 % tikrinamų vairuotojų yra iš tikrųjų perdaug išgėrę. Apskaičiuokite tikimybes $P(B), P(\overline{A}|B)$. Kiek apytiksliai procentų tikrintų vairuotojų bus apkaltinti pažeidę draudimą vairuoti neblaiviems? Kokia šių vairuotojų dalis bus apkaltinti nepelnytai?

10. *Urnoje yra keturi balti ir keturi juodi rutuliai. Lošiama taip: iš pradžių atsitiktinai ištraukiami trys rutuliai ir nustatoma, kokios spalvos rutulių daugiau. Tada trys ištrauktieji rutuliai sudedami į naują urną ir iš jos atsitiktinai traukiamas vienas rutulys. Jeigu ištraukiamas rutulys tos spalvos, kokios urnoje yra daugiau, laimima. Kokia tikimybė laimėti?*

11. *Urna su rutuliais ta pati kaip ankstesniajame uždavinyje, tačiau iš pradžių traukiami ne trys, bet keturi rutuliai. Jeigu ištraukta po lygiai juodų ir baltų rutulių, galima pasirinkti laimingų rutulių spalvą. Kokia tikimybė laimėti?*

Atsakymai

1. $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})(1 - P(B))$.

2. $1 = P(H_1) + P(H_2) + \ldots$ **3.** 2/9. **4.** 1/3 *ir* 2/3. **5.** 1/4 *ir* 3/8. **6.** 1/2 *ir* 3/4. **7.** 4/5. **8.** 50/67. **9.** $P(B) = 0{,}095; P(\overline{A}|B) = 0{,}5$. *Bus apkaltinta* 9,5% *tikrintų vairuotojų, pusė jų – nepelnytai.* **10.** 5/7. **11.** 22/35.

2.10 Nepriklausomi įvykiai

Kokius įvykius vadiname nepriklausomais? Kurie nepriklauso vienas nuo kito? O kokią spalvą vadiname balta? Kuri yra balta? Vargu ar tokį paaiškinimą laikysite pakankamu. Taigi ir įvykių nepriklausomumo sąvoką reikia apibrėžti tiksliau.

Urnoje yra du balti rutuliai ir vienas juodas. Du žaidėjai vienas po kito traukia po rutulį. Jei ištraukia baltą – laimi kokį nors prizą. Mus domina įvykiai $A_1 = \{\text{pirmasis laimėjo}\}$ ir $A_2 = \{\text{antrasis laimėjo}\}$. Prieš bandymą apskaičiuojame:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}.$$

Tarkime, pirmajam pasisekė, t. y. įvyko įvykis A_1. Tada prieš traukdamas savo rutulį antrasis iš naujo apskaičiuos laimėjimo tikimybę:

$$P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}.$$

Taigi $P(A_2) \neq P(A_2|A_1)$, kitaip tariant, įvykis A_2 priklauso nuo įvykio A_1.

O dabar pakeiskime bandymo sąlygas. Tegu pirmasis ištraukęs savo rutulį grąžina jį į urną. Akivaizdu, kad tokiu atveju

$$P(A_2) = P(A_2|A_1),$$

taigi įvykis A_2 nepriklauso nuo A_1. Lygybę $P(A_2) = P(A_2|A_1)$ perrašykime taip:

$$P(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = P(A_1|A_2).$$

Taigi, jei $P(A_2) = P(A_2|A_1)$, tai ir $P(A_1) = P(A_1|A_2)$. Kitaip tariant, jei A_2 nepriklauso nuo A_1, tai ir A_1 nepriklauso nuo A_2. Tačiau kokia prasmė sakyti, kad A_1 nepriklauso nuo įvykio A_2, apie kurį sužinome vėliau negu apie A_1? Galime įsivaizduoti, kad pirmasis žaidėjas ištraukęs savo rutulį mums nepasako spalvos, t. y. nesužinome, A_1 įvyko ar ne. Jo tikėtinumą vertiname naudodamiesi savo žiniomis apie A_2, panašiai kaip hipotezių tikėtinumą ankstesniame skyrelyje. Jeigu gauname tą pačią tikimybės reikšmę $P(A_1)$ kaip ir prieš pradedant bandymą, vadinasi, žinios apie A_2 mums nesuteikė galimybės patikslinti žinių apie A_1. Todėl galime sakyti, kad A_1 nepriklauso nuo A_2.

Kita vertus, dažnai klausimas, kuris įvykis pirmesnis, kuris paskesnis iš viso nekyla. Pavyzdžiui, galime nagrinėti dviejų lošimo kauliukų metimo bandymo įvykius

$$\begin{aligned} A &= \{\text{atvirtusių akučių suma lyginė}\}, \\ B &= \{\text{atvirtusių akučių suma didesnė už } 6\}. \end{aligned}$$

Ar šie įvykiai priklausomi?

Dviejų įvykių A_1, A_2 nepriklausomumo sąvoką galime apibrėžti pasinaudoję bet kuria iš šių trijų lygybių:

$$P(A_1|A_2) = P(A_1), \quad P(A_2|A_1) = P(A_2), \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Kurią geriausia pasirinkti? Trečiąją. Juk pirmoji lygybė turi prasmę tik tada, kai $P(A_2) > 0$, antroji – kai $P(A_1) > 0$, o trečiajai nereikia jokių papildomų sąlygų.

Nepriklausomi įvykiai

8 apibrėžimas. *Atsitiktinius įvykius A_1, A_2 vadinsime nepriklausomais, jeigu*

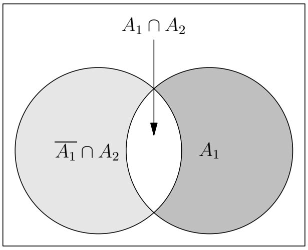
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Akivaizdu, kad ir būtinasis, ir negalimas įvykiai nepriklauso nuo bet kurio kito įvykio.

18 teorema. *Jei A_1 ir A_2 yra nepriklausomi įvykiai, tai $\overline{A_1}$ ir A_2, A_1 ir $\overline{A_2}$, $\overline{A_1}$ ir $\overline{A_2}$ taip pat yra nepriklausomų įvykių poros.*

Įrodymas. Užrašykime įvykį A_2 dviejų nesutaikomų įvykių sąjunga: $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$. Tada

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2), \\ P(\overline{A_1} \cap A_2) &= P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= (1 - P(A_1))P(A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2). \end{aligned}$$



Taigi įvykiai $\overline{A_1}$ ir A_2 yra nepriklausomi. Panašiai galime įsitikinti, kad ir kitas poras sudaro nepriklausomi įvykiai.

Šios teoremos tvirtinimą galime užrašyti trumpiau. Susitarkime bet kokiam įvykiui A žymėti $A^0 = A, A^1 = \overline{A}$. Tada teorema teigia: jeigu įvykiai A_1, A_2 yra nepriklausomi, tai su bet kokiomis reikšmėmis $i, j = 0, 1$, įvykiai A_1^i, A_2^j taip pat nepriklausomi. Kitaip tariant

$$P(A_1^i \cap A_2^j) = P(A_1^i)P(A_2^j). \tag{2.9}$$

O kokius įvykių trejetus, ketvertus, ... ar net begalines įvykių šeimas derėtų vadinti nepriklausomų įvykių trejetais, ketvertais ir t. t.? Natūrali mintis tokia: jeigu įvykių šeimą sudaro nepriklausomi įvykiai, tai kiekvienas iš jų turi nepriklausyti nuo visų kitų. O gal užtektų pareikalauti, kad bet kurie du šios šeimos įvykiai būtų nepriklausomi? Tačiau gali pasitaikyti, kad įvykis nepriklauso nuo bet kurio kito šeimos įvykio, tačiau priklauso, pavyzdžiui, nuo dviejų įvykių.

Štai paprastas pavyzdys. Tarkime, urnoje yra keturi skaičiais $0, 1, 2, 3$ pažymėti rutuliai. Yra trys žaidėjai. Traukiamas vienas rutulys. Jeigu jo numeris 0, visi trys laimi po prizą. Jeigu numeris 1, laimi tik pirmasis, jei 2, tik antrasis, jei 3, tik trečiasis. Pažymėkime įvykius $A_i = \{\text{laimėjo } i\text{-asis žaidėjas}\}$. Akivaizdu, kad

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},\ P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4},\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

jei $i \neq j$. Todėl įvykiai A_i ir A_j yra nepriklausomi. Pavyzdžiui, A_1 nepriklauso nei nuo A_2, nei nuo A_3. O nuo abiejų sykiu? Tarkime, abu įvykiai A_2, A_3 įvyko. Ką galime pasakyti apie A_1? Jis irgi įvyko! Taigi kiekvienas iš įvykių A_2, A_3 nesuteikia informacijos apie A_2, o abu kartu – jau suteikia.

Norėdami apibrėžti nepriklausomų įvykių sistemą galime pareikalauti, kad kiekvienas šios sistemos įvykis būtų nepriklausomas nuo bet kurios baigtinės kitų įvykių sistemos sankirtos. Kitas būdas – pasinaudoti lygybe, panašia į (2.9), kuri teisinga dviem nepriklausomiems įvykiams.

Nepriklausomų įvykių sistema

9 apibrėžimas. *Sakysime, kad įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sudaro nepriklausomų įvykių sistemą, jeigu lygybė $P(A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap \cdots \cap A_n^{i_n}) = P(A_1^{i_1}) \cdot P(A_2^{i_2}) \cdots P(A_n^{i_n})$ teisinga su visomis reikšmėmis $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$, čia $A_i^0 = A_i, A_i^1 = \overline{A_i}$.*
Begalinę įvykių sistemą $A_t, t \in T$, vadinsime nepriklausomų įvykių sistema, jeigu kiekviena baigtinė šios sistemos įvykių aibė sudaro nepriklausomų įvykių sistemą.

Šio apibrėžimo reikalaujamų lygybių skaičius lygus 2^n. Iš tiesų ne visos jos yra nepriklausomos, t. y. dalis jų išplaukia iš kitų. Nepriklausomų lygybių yra $2^n - n - 1$.

Dažnai išvadą apie įvykių nepriklausomumą galime daryti netikrindami apibrėžimo sąlygų, bet įvertinę bandymo aplinkybes. Pavyzdžiui, jeigu bandymas – dviejų lošimo kauliukų metimas, tai įvykis, kad ant pirmojo kauliuko atvirs šešetukas, žinoma, nepriklauso nuo įvykio, kad ant antrojo atvirs, pavyzdžiui, trejetas. Tačiau kartais tenka pasinaudoti apibrėžimu.

27 pavyzdys. Bandymas – dviejų simetriškų lošimo kauliukų metimas. Ar įvykiai

$$\begin{aligned} A &= \{\text{atvirtusių akučių suma lyginė}\}, \\ B &= \{\text{atvirtusių akučių suma didesnė už 6}\} \end{aligned}$$

yra nepriklausomi?

Iš viso yra 36 bandymo baigtys. Pavaizduokime jas lentele, kurios langeliuose įrašysime atvirtusių akučių sumą.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Iš lentelės matyti, kad $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$,

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)$$

Taigi įvykiai A, B yra priklausomi.

O ką manote apie įvykių

$$\begin{aligned} B &= \{\text{atvirtusių akučių suma} > 6\}, \\ C &= \{\text{ant pirmojo kauliuko atvirto 3 akutės}\} \end{aligned}$$

porą? Ar jie yra priklausomi? Pabandykite spėti, tačiau būtinai patikrinkite savo spėjimą!

28 pavyzdys. Atsitiktiniai tekstai

Žodį „tikimybė“ sudaro aštuonios raidės. Jei vieną raidę koduosime aštuoniais bitais, tai visam žodžiui prireiks 64 bitų. Pažymėkime šį 64 bitų ilgio žodį T.

Simetrišką monetą meskime 64 kartus ir rašykime rezultatus taip: jei atvirto herbas, rašykime „1“, jei skaičius – „0“. Bandymo pabaigoje gausime 64 bitų ilgio žodį X_1. Kokia tikimybė, kad $T = X_1$? Nesunku suvokti, kad

$$P(X_1 = T) = \frac{1}{2^{64}}.$$

Šis skaičius labai mažas, todėl iš pirmo karto „sudėti“ žodį T mėtant monetą reikštų tokį stebuklą, kokio mūsų Žemėje tikrai dar nebuvo.

Jei nepasiseks pirmą kartą – kartokime bandymus. Tegu $X_2, X_3, \ldots$ žymi 64 bitų ilgio žodžius, gautus iš 2-ojo, 3-iojo ir kitų bandymų. Koks turi būti bandymų skaičius n, kad būtų

$$P(\text{bent vienam } j, 1 \leqslant j \leqslant n,\ X_j = T) \geqslant \frac{1}{2}?$$

Pažymėkime įvykius $A_j = \{X_j = T\}$; jeigu A_j įvyks, tai žodį gausime iš j-ojo bandymo metimų. Įvykiai A_j yra nepriklausomi, $P(A_j) = 2^{-64}$,

$$P(\text{bent vienam } j, 1 \leqslant j \leqslant n,\ X_j = T) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \cdots \overline{A_n}).$$

Taigi norime nustatyti, su kokiais n teisinga nelygybė

$$1 - P(\overline{A_1} \cap \cdots \overline{A_n}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad t.\ y. \quad P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Kadangi įvykiai $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ taip pat yra nepriklausomi, tai

$$P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_n}) = \left(1 - 2^{-64}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}.$$

Šią nelygybę tenkina natūralieji skaičiai

$$n \geqslant \frac{\ln(2)}{-\ln(1 - 2^{-64})}.$$

Mažiausia n reikšmė yra labai didelė. Pabandykime ją įvertinti iš viršaus, t. y. rasti kitą skaičių, kuris yra už mums rūpimą didesnis. Pasinaudoję nelygybe $-\ln(1-x) > x,\ (0 < x < 1)$, kurią nesunku įrodyti, gausime:

$$\frac{\ln(2)}{-\ln(1 - 2^{-64})} < \frac{\ln(2)}{2^{-64}} < 0{,}7 \cdot 2^{64}.$$

Taigi jei atliksime maždaug 2^{64} bandymų, tikimybė nors kartą gauti žodį „tikimybė“ bus didesnė už 1/2.[9] Ar 2^{64} didelis skaičius? Spręskite patys. Jeigu vieną

[9] Skaičiuodami apytiksliai bandymų skaičių kiek padidinome. Pasinaudoję kompiuteriu nustatytume, kad mažiausias bandymų skaičius yra apytiksliai $2^{63{,}5}$. Taigi paklaida nėra didelė.

bandymą (64 monetos metimus) atliktume per vieną sekundę, prireiktų 2^{64} sekundžių. Dabartiniai astrofizikų skaičiavimai rodo, kad mūsų Visatos amžius yra maždaug 2^{61} sekundžių.

Uždaviniai

1. *Bandymas – tradicinės* 52 *kortų kaladės maišymas. Ar šie įvykiai nepriklausomi:*

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{pirmoji kaladės korta – karalius}\}, \\ B &= \{\textit{pirmoji kaladės korta – būgnų}\}? \end{aligned}$$

2. *Bandymas – dviejų simetriškų lošimo kauliukų metimas. Apibrėžkime įvykius:*

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{pirmasis kauliukas atvirto sienele su trimis arba keturiomis akutėmis}\}, \\ B &= \{\textit{atvirtusių akučių suma mažesnė už 8}\}. \end{aligned}$$

Įrodykite, kad šie įvykiai yra nepriklausomi. Ar įvykiai A, C*, čia* C *žymi įvykį, kad atvirtusių akučių suma mažesnė už* 6*, taip pat nepriklausomi?*

3. *Tegu* A, B *yra du su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai,* $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$. *Atsakykite į tokius klausimus:*

1. *Jeigu įvykiai* A, B *yra nesutaikomi, ar jie gali būti nepriklausomi?*
2. *Jeigu įvykiai* A, B *yra nepriklausomi, ar jie gali būti nesutaikomi?*
3. *Jeigu* $A \subset B$*, ar įvykiai gali būti nepriklausomi?*
4. *Jeigu* A, B *yra nepriklausomi, ar* A *ir* $A \cup B$ *gali būti nepriklausomi?*

4. *Bandymas – dviejų simetriškų monetų metimas. Įsitikinkite, kad įvykiai*

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{pirmoji moneta atvirto herbu}\}, \\ B &= \{\textit{antroji moneta atvirto herbu}\}, \\ C &= \{\textit{monetos atvirto skirtingomis pusėmis}\}, \end{aligned}$$

poromis yra nepriklausomi, tačiau nesudaro nepriklausomų įvykių trejeto.

5. *Sąrašą sudaro* 1024 *žodžiai, kiekviename iš jų yra* 5 *raidės. Raidei koduoti naudojame* 8 *bitus. Bandymas – simetriškos monetos* 40 *metimų serija, rezultatą užrašome* 40 *bitų ilgio bloku, kurį galima paversti* 5 *raidžių žodžiu. Per vieną sekundę galime atlikti* 1024 *metimus. Panašiai kaip skyrelio pavyzdyje įvertinkite, kiek laiko reikėtų mėtyti monetą, kad tikimybė gauti kurį nors sąrašo žodį būtų didesnė už* 1/2*? Didesnė už* 3/4*?*

Atsakymai

1. *Įvykiai yra nepriklausomi.* **2.** *Įvykiai A ir C yra priklausomi.* **3.** *1. Ne. 2. Ne. 3. Ne. 4. Ne. Kadangi $A \cap (A \cup B) = A$, tai iš $A, A \cup B$ nepriklausomumo gautume, kad $P(A) = P(A)P(A \cup B)$. Taigi turėtų būti $P(A \cup B) = 1$. Pasinaudoję lygybe $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ir įvykių A, B nepriklausomumu, gautume, kad turi būti teisinga lygybė $1 = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ ir $P(B) = 1$. Tai prieštarauja uždavinio sąlygai.* **4.** *Tai aišku jau iš pastebėjimo, kad visi trys įvykiai kartu negali įvykti, o bet kuri įvykių pora - gali.* **5.** *Pakaktų trijų ir šešių mėnesių.*

2.11 Nepriklausomi bandymai

Iš nedidelio kiekio prielaidų gauti daug išvadų – matematikos esmė. Jeigu sėkmingai keliausite tikimybių teorijos takais, tikrai nustebsite, kiek daug įdomių teiginių ir išvadų gaunama nagrinėjant paprasčiausius nepriklausomus bandymus – monetos metimų serijas.

Dažnai bandymą sudaro keli „smulkesni“ bandymai. Tokius bandymus jau nagrinėjome. Pavyzdžiui, dviejų rutulių traukimo iš urnos bandymą galime suvokti kaip dviejų bandymų porą. Jeigu ištraukus rutulį jis negrąžinamas į urną, tai įvykiai, susiję su antruoju bandymu, priklauso nuo pirmojo bandymo baigties. Jeigu ištrauktas rutulys grąžinamas – bandymai nepriklausomi. Tą pačią monetą ar lošimo kauliuką galime mesti kelis kartus – vėl gausime nepriklausomų bandymų seką.

Patys paprasčiausi bandymai turi tik dvi baigtis. Moneta gali atvirsti herbu arba skaičiumi. Loterijos bilietas gali būti laimingas arba ne. Kamuolio metimas į krepšį gali būti taiklus arba kamuolys skries pro šalį. Gyvenime atliekame daugybę tokių bandymų. Paprastai vieną baigtį suvokiame kaip sėkmę, kitą kaip nesėkmę.

Nagrinėkime bandymą su dviem baigtimis, kurias žymėsime 0 (nesėkmė) ir 1 (sėkmė). Pažymėkime sėkmės tikimybę p, o nesėkmės – $q = 1 - p$. Sudarėme labai paprastą tikimybinę erdvę:

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad P(1) = p, \quad P(0) = q, \quad 0 \leqslant p, q \leqslant 1, \quad p + q = 1. \tag{2.10}$$

O dabar tarkime, kad šį bandymą kartojame n kartų, be to, vieno bandymo baigtys nedaro įtakos kitų bandymų baigtims, t. y. bandymai yra nepriklausomi. Šio didelio bandymo baigčių aibę pažymėkime Ω_n, jos elementai – sėkmių ir nesėkmių sekos. Pavyzdžiui, kai $n = 3$, tai

$$\Omega_3 = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}.$$

Kadangi bandymai nepriklausomi, šių sekų tikimybes gausime sudauginę pavienių baigčių tikimybes:

$$P(000) = q \cdot q \cdot q = q^3,\ P(001) = q \cdot q \cdot p = pq^2,$$
$$P(010) = P(100) = pq^2,\ P(011) = P(101) = P(110) = p^2q,\ P(111) = p^3.$$

Trumpai šias tikimybes galime užrašyti viena formule:

$$P(\omega_1\omega_2\omega_3) = p^m q^{3-m}, \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

čia $m = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ yra sėkmių, gautų atlikus tris bandymus, skaičius. Kadangi baigčių tikimybės apibrėžtos, galime skaičiuoti kitų įvykių tikimybes. Pavyzdžiui,

$$P(\text{lygiai du bandymai pasibaigs sėkme}) = P(011) + P(101) + P(110) = 3p^2q.$$

Žinoma, tokį modelį galime sudaryti ne tik trijų nepriklausomų bandymų sekai. Tarkime, atliekama n nepriklausomų vienodų bandymų, t. y. bandymų su tikimybine erdve, apibrėžta (2.10). Šios bandymų sekos baigčių aibę pažymėkime Ω_n; ją sudaro n ilgio sėkmių–nesėkmių sekos:

$$\Omega_n = \{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n : \omega_i = 0, 1\}.$$

Vienos sekos (bandymų sekos baigties) $\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$ tikimybę apibrėšime lygybe

$$P(\omega) = p^m q^{n-m}, \quad m = \text{sėkmių skaičius} = \omega_1 + \cdots + \omega_n.$$

Kiekvieno kito įvykio, susijusio su bandymų seka, tikimybę skaičiuosime sumuodami tam įvykiui palankių baigčių tikimybes:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Sukonstravome tikimybinę erdvę nepriklausomų vienodų bandymų sekoms nagrinėti. Minint vieną iš tikimybių teorijos pradininkų – šveicarų matematiką Jakobą Bernulį – ši erdvė paprastai vadinama Bernulio schema.

Tegu m yra sėkmių skaičius, kurį gausime atlikę n Bernulio schemos bandymų. Mažiausia galima m reikšmė lygi nuliui, didžiausia – n. Kokios šių reikšmių tikimybės?

Sėkmių skaičiaus tikimybė

19 teorema. *Tegu sėkmės tikimybė viename Bernulio schemos bandyme lygi p $(0 < p < 1)$, n – bandymų skaičius, o S_n – gautų sėkmių skaičius. Tada*

$$P(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Įrodymas. Įvykiui $\{S_n = m\}$ palankios tos baigtys (nulių–vienetų sekos) $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$, kuriose sėkmės ženklas 1 pasitaiko lygiai m kartų. Kiekvienos tokios baigties tikimybė lygi $p^m q^{n-m}$. Kiek gi yra tokių baigčių? Jų yra tiek, kiek yra galimybių sudaryti n ilgio seką, kurioje vienetų būtų lygiai m, o kiti simboliai – nuliai. Pasižymėję vietas simboliams įrašyti

$$\underbrace{.\ .\ .\ .\ .\ .}_{n}$$

galime iš pradžių parinkti vietas vienetams, o juos įrašę – užpildyti tuščias vietas nuliais. Vienetų vietas galime parinkti C_n^m būdais, taigi tiek yra ir sekų. Todėl

$$P(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

29 pavyzdys. Tarkime, nuo baudų metimų linijos krepšininkas pataiko 60 % metimų. Jeigu jis ruošiasi mesti $n = 10$ kartų, kokia tikimybė, kad pataikys keturis kartus?

Vienas metimas – bandymas su dviem baigtimis: sėkme (taiklus metimas) ir nesėkme (metimas pro šalį). Sėkmės tikimybė $p = 0{,}6$, nesėkmės – $q = 0{,}4$. Galime padaryti prielaidą, kad metimų rezultatai nepriklauso vienas nuo kito. Taigi turime Bernulio schemą ir tikimybę galime skaičiuoti naudodamiesi (2.11) formule:

$$P(S_{10} = 4) = C_{10}^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^6 \approx 0,111.$$

Pažymėkime

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Kuri iš šių tikimybių didžiausia? Sėkmių skaičių m, kuriam $P_n(m)$ reikšmė didžiausia, vadinsime **labiausiai tikėtinu** sėkmių skaičiumi.

Palyginkime tikimybes $P_n(m)$ ir $P_n(m-1)$. Pasinaudoję (2.11) gausime:

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{C_n^m}{C_n^{m-1}} \cdot \frac{p}{q},$$
$$\frac{C_n^m}{C_n^{m-1}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(m-1)!}{n(n-1)\cdots(n-m+2)m!} = \frac{n-m+1}{m},$$
$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q}.$$

Tada $P_n(m) > P_n(m-1)$, jei

$$(n-m+1)p > mq, \quad (n-m+1)p > m(1-p), \quad (n+1)p > m.$$

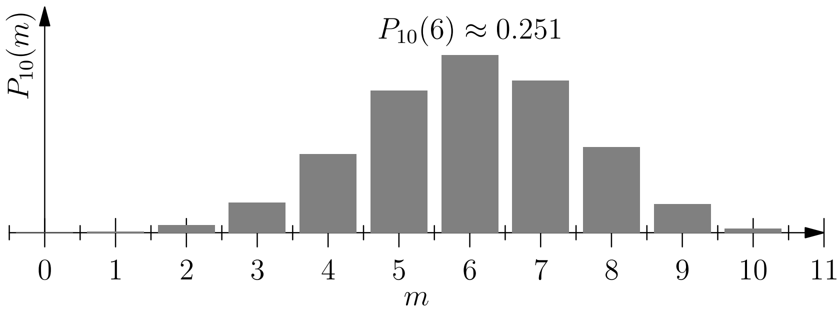
Taigi, jei $m < (p+1)n$, tai gauti m sėkmių labiau tikėtina negu $m-1$.

Tikėtiniausias sėkmių skaičius

20 teorema. *Didžiausias sveikasis skaičius* m, *tenkinantis nelygybę* $m \leqslant (n+1)p$, *yra labiausiai tikėtinas sėkmių skaičius. Jeigu* $(n+1)p$ *yra sveikasis skaičius, tai yra du labiausiai tikėtini sėkmių skaičiai* $m = (n+1)p$ *ir* $m = (n+1)p - 1$.

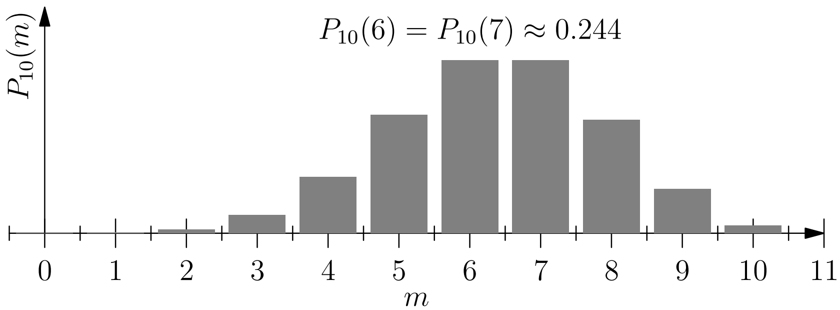
30 pavyzdys. Tarkime, krepšininkas pataiko 60 % metimų nuo baudos linijos. Jeigu jis ruošiasi mesti $n = 10$ kartų, koks labiausiai tikėtinas taiklių metimų skaičius?

Kadangi $(n+1)p = 6{,}6$ tai labiausiai tikėtina, kad bus 6 taiklūs metimai.



Sėkmių tikimybės $P_{10}(m)$, kai $p = 0.6$. Tikėtiniausias sėkmių skaičius $m = 6$.

Jeigu taiklaus metimo tikimybė $p = \frac{7}{11} \approx 0{,}636$, būtų du labiausiai tikėtini taiklių metimų skaičiai.



Sėkmių tikimybės $P_{10}(m)$, kai $p = 7/11$. Tikėtiniausi sėkmių skaičiai $m = 6$ ir $m = 7$.

Uždaviniai

1. *Jeigu bandymų skaičius Bernulio schemoje* $n = 6$, *kiek palankių baigčių turi įvykis* $\{$*atlikę bandymus gausime 3 sėkmes*$\}$*?*

2. *Viena moneta yra simetriška, kita atvirsta herbu su tikimybe* 0,4. *Lošėjas gali mesti monetą du kartus. Jeigu abu kartus moneta atvirsta ta pačia puse, jam išmokamas laimėjimas. Su kuria moneta – simetriška ar nesimetriška – lošėjui yra naudingiau lošti?*

3. *Urnoje yra vienas baltas rutulys ir du juodi. Traukiame su grąžinimu* 5 *rutulius. Kokia tikimybė, kad du kartus ištrauksime baltą rutulį?*

4. *Urnoje yra vienas baltas rutulys ir du juodi. Traukiame su grąžinimu* 5 *rutulius,* S_5 *– baltų rutulių skaičius. Kuri iš tikimybių* $P(S_5 = 0), P(S_5 = 5)$ *didesnė? Kiek kartų didesnė?*

5. *Penkis kartus metamas tas pats simetriškas lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad gausime lygiai* 2 *šešetukus?*

6. 2500 *šeimose yra po keturis vaikus. Koks tikėtiniausias šeimų, kuriose yra bent vienas berniukas ir bent viena mergaitė, skaičius?*

7. *Nuožulniu* 10 *cm pločio takeliu rieda* $n = 8$ *žirniai. Pakalnėje yra* 4 *cm skersmens duobė. Kokia tikimybė, kad į duobę įkris* $m = 3$ *žirniai? Koks labiausiai tikėtinas į duobę pateksiančių žirnių skaičius? Kiek žirnių turėtų riedėti, kad tikėtiniausias duobėje atsidursiančių žirnių skaičius būtų* 7*?*

8. *Keturis kartus metama moneta ir užrašoma rezultatų eilutė. Iš eilės užrašytų vienodų rezultatų seka vadinama bloku. Pavyzdžiui, eilutėje* $HHSH$ *pirmo bloko ilgis* 2*, antrojo –* 1*. Eilutėje* $SHSS$ *abiejų pirmųjų blokų ilgis lygus vienetui. Kuris įvykis labiau tikėtinas: keturių metimų rezultatų eilėje pirmo bloko ilgis bus* 2*; antrojo bloko ilgis lygus* 2*? Kodėl neduotos monetos pusių atvirtimo tikimybės? Pasižymėkite jas* p, q*. Kad būtų paprasčiau, pirmiausia panagrinėkite simetriškos monetos atvejį.*

Atsakymai

1. 20. **2.** *Naudingiau lošti su nesimetriška moneta.* **3.** 80/243. **4.** *Tikimybė* $P(S_5 = 0)$ *yra didesnė už* $P(S_5 = 5)$ 32 *kartus.* **5.** 625/3888. **6.** 2188. **7.** $\approx$ 0,279; 3; 17 *arba* 18. **8.** *Pirmasis įvykis ne mažiau kaip du kartus labiau tikėtinas.*

2.12 Polinominė schema

Nepriklausomų monetos mėtymų serijoms tirti tinkamą teoriją apibendrinkime taip, kad ji tiktų ir lošimo kauliukų mėtymo serijoms.

Yra du indai su baltais dažais ir trys su juodais. Reikia nudažyti penkias detales. Dažymo metodas toks: detalės atsitiktinai sumetamos į indus, o paskui ištraukiamos. Kokia tikimybė, kad lygiai dvi detalės bus nudažytos baltai? Atsakymą gausime pritaikę Bernulio schemą: bandymų skaičius lygus detalių skaičiui,

t. y. $n = 5$, jeigu sėkme pavadinsime baltai nudažytą detalę, tai sėkmės tikimybė $p = \frac{2}{5}$ ir

$$P(S_5 = 2) = C_5^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}3456.$$

O jeigu dar pridėtume, pavyzdžiui, indą su mėlynais dažais? Kokia būtų tikimybė gauti dvi baltas, dvi juodas ir vieną mėlyną detalę, jeigu dažymo metodas liktų tas pats?

Vienos detalės dažymas reikštų vieną bandymą su trimis galimomis baigtimis, kurių tikimybės atitinkamai lygios

$$p_1 = \frac{2}{6}, \quad p_2 = \frac{3}{6}, \quad p_3 = \frac{1}{6}.$$

Atliktume penkis nepriklausomus bandymus. Palankių mūsų įvykiui baigčių būtų daug. Jeigu baltą, juodą ir mėlyną spalvas žymėsime $1, 2, 3$, tai tokios baigtys

$$11223, \ 12123, \ 22113, \ 32211, \ \ldots$$

bus palankios mums rūpimam įvykiui. Visų jų tikimybės vienodos:

$$P(11223) = P(12123) = P(22113) = P(32211) = \ldots = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1.$$

Taigi reikėtų tik suskaičiuoti, kiek yra tų palankių baigčių.

Aptarkime, kaip sudaryti tikimybinę erdvę, tinkamą vienodų nepriklausomų bandymų sekai tirti, jeigu vieno bandymo baigčių aibę sudaro r baigčių. Baigtis žymėsime natūraliaisiais skaičiais $1, 2, \ldots, r$. Tarkime, žinomos vieno bandymo baigčių tikimybės

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}, \quad p_i = P(i), \quad 0 < p_i < 1, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1.$$

Jeigu atliekame n nepriklausomų bandymų, tokios sekos baigčių aibė yra

$$\Omega_n = \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n : \omega_i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Jeigu sekoje $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ baigtys $1, 2, \ldots, r$ pasitaikė atitinkamai $m_1, \ldots, m_r$ kartų, $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$, tai

$$P(\omega) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}. \tag{2.12}$$

Kitų su šia bandymų seka susijusių įvykių tikimybes gausime sumuodami jiems palankių baigčių tikimybes. Sudarėme tikimybinę erdvę nepriklausomų bandymų su r baigtimis sekai nagrinėti. Ji vadinama **polinomine schema**.

Pažymėkime $S_n^1, S_n^2, \ldots, S_n^r$ baigčių $1, 2, \ldots, r$ skaičius, gautus atlikus n bandymų. Jų suma lygi bandymų skaičiui, t. y.

$$S_n^1 + S_n^2 + \cdots + S_n^r = n.$$

Suformuluosime teoremos apie sėkmių skaičių Bernulio schemoje analogą polinominei schemai.

Baigčių rinkinio tikimybės polinominėje schemoje

21 teorema. *Jei* $\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}$ *yra vieno bandymo baigčių aibė,* $P(i) = p_i, p_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, r,$ *baigčių tikimybės,* S_n^i *– baigties* i *pasikartojimų, atlikus* n *nepriklausomų bandymų, skaičius, o* m_i *yra neneigiami sveikieji skaičiai,* $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$, *tai*

$$P(S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, \ldots, S_n^r = m_r) = \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_r!} p_1^{m_1} p_1^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

Jeigu $m_1 + m_2 + \cdots + m_r \neq n$, tai, žinoma,

$$P(S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, \ldots, S_n^r = m_r) = 0.$$

Įrodymas. Baigties ω, palankios įvykiui $\{S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, \ldots, S_n^r = m_r\}$ tikimybę jau žinome, žr. (2.12). Taigi belieka rasti palankių baigčių skaičių. Įsivaizduokime, kad parengėme n langelių bandymų baigčių ženklams užrašyti. Reikia užrašyti lygiai m_1 pirmosios baigties ženklų, vietas jiems galime parinkti $C_n^{m_1}$ būdais. Parinkę jas turėsime $n - m_1$ tuščių vietų, iš kurių turime parinkti m_2 vietas antrosios baigties ženklui. Taigi būdų įrašyti pirmųjų dviejų baigčių ženklus iš viso yra $C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}$. Šitaip samprotaudami gauname, kad iš viso yra

$$C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \cdots C_{n-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}$$

įvykiui $\{S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, \cdots, S_n^r = m_r\}$ palankių baigčių. Teorema įrodyta.

Dabar jau galime atsakyti ir į skyrelio pradžioje iškeltą klausimą apie spalvotas detales:

$$P(S_5^1 = 2, S_5^2 = 2, S_5^3 = 1) = \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{5}{36} \approx 0{,}14.$$

Uždaviniai

1. *Kokia tikimybė, kad metus simetrišką lošimo kauliuką* $n = 4$ *kartus, du kartus atvirs keturios ir po vieną kartą – penkios ir šešios akutės?*

2. *Urnoje yra* 3 *balti,* 2 *juodi ir* 4 *mėlyni rutuliai. Su grąžinimu traukiame* $n = 6$ *rutulius. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktųjų bus lygiai trys mėlyni ir bent du balti rutuliai?*

3. *Metamos dvi monetos. Viena atvirsta herbu su tikimybe* 0,4, *kita – su tikimybe* 0,6. *Kokia tikimybė, kad metus* $n = 6$ *kartus lygiai du kartus, atvirs du herbai ir lygiai du kartus – du skaičiai?*

4. *Taikinys yra skritulio formos, jo spindulys lygus 3. Skritulyje nubrėžti du apskritimai, vieno spindulys lygus 1, kito – 2. Apskritimų centrai sutampa su skritulio centru. Jeigu pataikoma į mažiausiuoju apskritimu apribotą sritį – pelnoma 10 taškų, jeigu į žiedą, kurį riboja mažesnieji apskritimai, – 5 taškai, jeigu į kitą žiedą, – 3 taškai. Į taikinį šaunama nesitaikant. Kokia tikimybė, kad keturiais taikliais šūviais bus pelnyti 28 taškai?*

5. *Stačiakampyje $ABCD$, kurio kraštinių ilgiai yra $AB = a, BC = b, a \geqslant b$, atsitiktinai parenkami $n = 5$ taškai. Kokia tikimybė, kad trys iš jų bus arčiau kraštinės AB negu kitų kraštinių, vienas – arčiau BC ir vienas – arčiau CD? Paprastumo dėlei pirmiausia panagrinėkite atvejį, kai $ABCD$ yra kvadratas.*

Atsakymai

1. 1/108. **2.** 1280/6561 ≈ 0,195. **3.** 0,0807 **4.** 20/729.
5. $\frac{5!}{3!2^6} \cdot \left(1 - \frac{b}{2a}\right)^4 \cdot \frac{b}{a}$.

2.13 Ribinės teoremos Bernulio schemoje

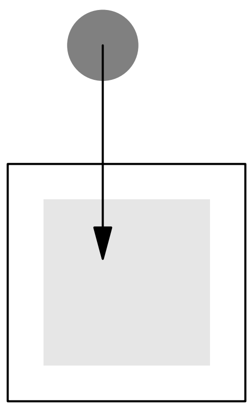
Kai yra daug monotoniško darbo, turime dvi galimybes: daug ir kruopščiai triūsti arba sukurti efektyvesnius darbo įrankius. Panagrinėkime, kaip galima išvengti varginančių skaičiavimų, kai nagrinėjame ilgas nepriklausomų bandymų sekas.

Tiksli Bernulio schemos sėkmių skaičiaus tikimybės formulė

$$P(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p, \tag{2.13}$$

kartais nėra labai patogi skaičiavimams. Panagrinėkime du pavyzdžius.

Lašelis nesubyrės!



31 pavyzdys. Maži lašeliai, stambus tinklas

Įsivaizduokime srautą iš $n = 1000$ lašelių, krintantį į tinklą, sudarytą iš $1\text{m} \times 1\text{m}$ dydžio kvadratų. Lašelis – rutuliuko su spinduliu $r = 0{,}1$ cm formos. Jeigu lašelis kliudo kvadrato kraštinę – subyra. Kokia tikimybė, kad subyrės lygiai $m = 5$ lašeliai?

Vienas lašelis – vienas Bernulio schemos bandymas. Galima įsivaizduoti šį bandymą taip: lašelis krinta į vieno kvadrato plokštumą taip, kad lašelio centras pataiko į kvadrato vidų arba ant kraštinės.

Lašelis nesubyrės, jeigu jo centras pataikys į kvadrato tašką, kurio atstumas nuo bet kurios kvadrato kraštinės didesnis už r. Taigi lašelis nesubyrės, jeigu jo centras pataikys į brėžinyje pilkai nudažytą sritį.

Pažymėję p tikimybę, kad vienas lašelis nesubyrės, o q, kad subyrės, gausime:

$$q = \frac{(100-2r)^2}{100^2} = 0{,}998^2 = 0{,}996004, \quad p = 1-q = 0{,}003996.$$

Taigi pritaikę (2.13) formulę gautume

$$P(S_{1000}=5) = C_{1000}^5 \cdot 0{,}003996^5 \cdot 0{,}996004^{995}. \tag{2.14}$$

Žinoma, pasinaudoję kompiuteriu apskaičiuosime ir tokio reiškinio reikšmę. Tačiau jeigu turėtume tik skaičiuoklį su aritmetinių veiksmų mygtukais, kažin ar pavyktų tikimybę apskaičiuoti bent apytiksliai.

32 pavyzdys. Dideli lašai, smulkus tinklas

O dabar įsivaizduokime, kad lašeliai yra rutuliuko su spinduliu $r = 0{,}5$ cm formos, lašelių yra $n = 10\,000$, o tinklą sudaro 10 cm $\times$ 10 cm dydžio kvadratėliai. Dabar subyrės daug lašelių. Kokia tikimybė, kad subyrėjusių lašelių skaičius bus tarp 1900 ir 2000?

Vėl pažymėję raidėmis p, q vieno lašelio subyrėjimo ir nesubyrėjimo tikimybes gausime

$$q = \frac{(10-2r)^2}{10^2} = 0{,}9^2 = 0{,}81, \quad p = 1-q = 0{,}19.$$

Naudotis (2.13) formule šiuo atveju dar nepatogiau:

$$P(1900 < S_n < 2000) = \sum_{m=1901}^{1999} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.15}$$

Taigi turėtume apskaičiuoti net 199 dėmenis!

Kuo panašūs ir kuo skiriasi abu pavyzdžiai? Panašūs visų pirma tuo, kad bandymų skaičius abiem atvejais didelis. O skiriasi sėkmės tikimybės reikšmėmis. Pirmajame pavyzdyje bandymų daug, o sėkmės tikimybė maža. Antrajame – bandymų daug, bet sėkmės tikimybė nėra maža. Kai bandymų daug, skaičiuojant Bernulio schemos tikimybes, galima pasinaudoti apytikslėmis formulėmis, kurias pateikia ribinės teoremos – teiginiai apie tikimybių elgesį, kai bandymų skaičius didėja. Vieną iš jų įrodė S. Puasonas.

22 teorema. *Tegu n yra bandymų skaičius Bernulio schemoje, sėkmės tikimybė viename bandyme priklauso nuo bandymų skaičiaus, žymėsime ją p_n. Jei n neaprėžtai didėjant p_n artėja prie nulio, tačiau egzistuoja skaičius $\lambda > 0$, kad $np_n \to \lambda$, tai bet kokiam m*

$$P(S_n=m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad n \to \infty, \tag{2.16}$$

čia $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$ *yra natūrinių logaritmų pagrindas.*

Šia teorema galime pasinaudoti apytiksliai skaičiuodami tikimybes. Kai n reikšmė didelė, o p maža, galima tikimybę skaičiuoti taip:

$$P(S_n = m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Kokia paklaida atsiranda šitaip skaičiuojant? Įrodyta, kad paklaida neviršija dydžio $\lambda p = np^2$.

Panaudokime šią formulę ir apskaičiuokime tikimybę (2.14):

$$\lambda = np = 3{,}996, \quad P(S_{1000} = 5) \approx \frac{\lambda^5}{5!}\mathrm{e}^{-\lambda} \approx 0{,}15614.$$

Galime būti tikri, kad paklaida nėra didesnė už $np^2 \approx 0,02$. Tačiau kokia gi ji iš tiesų? Kompiuteriu apskaičiavę (2.14) gautume

$$P(S_{1000} = 5) \approx 0{,}15645.$$

Taigi paklaida yra tik 0,0003.

Puasono teoremos įrodymas. Pagrindinis matematinis įrankis, kuriuo pasinaudosime, toks: jei z_n yra skaičių seka ir $z_n \to z$, kai $n \to \infty$, tai

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right) \to \mathrm{e}^z, \quad n \to \infty. \tag{2.17}$$

Užrašykime sėkmių skaičiaus tikimybę ir pertvarkykime reiškinį:

$$\begin{aligned} P(S_n = m) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(np_n)^m}{n^m}\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-m} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot (np_n)^m \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-m}. \end{aligned}$$

Panagrinėkime daugiklių elgesį, kai $n \to \infty$. Akivaizdu, kad $1 - j/n \to 1$, kai $n \to \infty$. Iš teoremos sąlygų gauname, kad $np_n \to \lambda$; pažymėję $z_n = -np_n$ ir pasirėmę (2.17) gausime, kad

$$\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Paskutinis daugiklis taip pat artėja prie 1. Taigi

$$P(S_n = m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

Teorema įrodyta.

Puasono teorema antrojo pavyzdžio tikimybei apskaičiuoti netinka. Tačiau yra ir kitokių teiginių.

Muavro ir Laplaso teorema

23 teorema. *Tegu p yra sėkmės tikimybė viename Bernulio schemos bandyme, n bandymų skaičius, S_n – sėkmių skaičius, gautas atlikus n bandymų, $a < b$ – bet kokie skaičiai. Jeigu p nesikeičia, o n neaprėžtai auga, tai*

$$P\Big(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2.18}$$

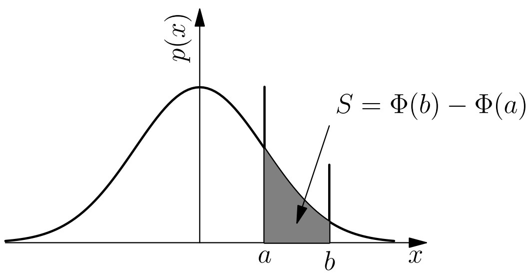
čia

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Skirtumas $\Phi(b) - \Phi(a)$ turi paprastą geometrinę prasmę – jis lygus plotui po funkcijos

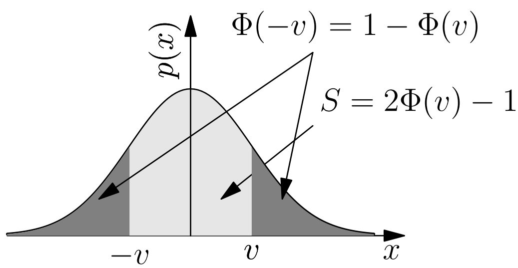
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

grafiku, kurį riboja tiesės $y = 0, x = a, x = b$, žr. brėžinį.



Savo ruožtu $\Phi(v)$ reikšmė lygi plotui po šiuo grafiku į kairę nuo tiesės $x = v$. Visas plotas po grafiku virš tiesės $y = 0$ lygus 1. Kadangi funkcija $p(x)$ yra lyginė, tai jos grafikas yra simetriškas tiesės $x = 0$ atžvilgiu, todėl $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Iš šios simetrijos išplaukia, kad plotas po grafiku į kairę nuo tiesės $x = -v$ $(v > 0)$ yra lygus plotui po grafiku į dešinę nuo tiesės $x = v$. Taigi

$$\Phi(-v) = 1 - \Phi(v). \tag{2.19}$$



Tačiau kaipgi prireikus rasti šios funkcijos reikšmes? Iš (2.19) matyti, kad pakanka mokėti rasti reikšmes, kai v teigiamas. Funkcija $\Phi(v)$ yra labai svarbi tikimybių teorijoje, todėl gerai ištirta. Tikimybių teorijos knygose galite rasti jos reikšmių lenteles, jos reikšmių skaičiavimo komandas rasite kiekvienoje kompiuterinėje skaičiuoklėje, turinčioje statistinių funkcijų rinkinį (pvz., Excel ar OpenOffice skaičiuoklėje), taip pat įvairių programavimo kalbų bibliotekose.

Muavro ir Laplaso teorema apytiksliams skaičiavimams taikoma taip. Jei bandymų skaičius n yra didelis, galime naudotis lygybėmis

$$P\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\Big) \approx \Phi(b), \; P\Big(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \approx 1 - \Phi(a),$$
$$P\Big(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\Big) \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

O dabar apskaičiuokime (2.15). Kadangi $np = 1900$, $\sqrt{np(1-p)} \approx 39,23$, tai

$$P(1900 < S_n < 2000) = P\Big(\frac{1900-1900}{39{,}23} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{2000-1900}{39{,}23}\Big) =$$
$$P\Big(0 < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < 2{,}549\Big) \approx \Phi(2{,}549) - \Phi(0) \approx 0{,}4946 \approx 0,5.$$

Muavro-Laplaso teorema yra atskiras centrinės ribinės teoremos atvejis. Ši teorema – tikra tikimybių teorijos viršukalnė. Baigti tikimybių teorijos studijas jos nepasiekus, kone tas pats kaip keliauti po Italiją, bet neaplankyti Romos.

Uždaviniai

1. *Tikimybė, kad pacientas yra alergiškas vaistui V, lygi* 0,003, *t. y. iš tūkstanties žmonių vaistas netinka maždaug trims. Kokia tikimybė, kad iš* $n = 2357$ *pacientų, kuriems išrašytas šis vaistas, alergiški jam bus* 4. *Kokia tikimybė, kad tokių pacientų bus ne daugiau kaip* 4*?*

2. *Alaus gamykla skelbia loteriją: kas pateiks du specialiai pažymėtus alaus butelių kamštelius – laimės prizą. Gamykloje pažymima* 4 % *visų kamštelių. Kokia tikimybė laimėti, jeigu nusipirksime* $n = 100$ *alaus butelių?*

3. *Egzamino užduotį sudaro* 10 *klausimų. Atsakant į klausimą reikia pasirinkti vieną iš trijų pateiktų atsakymų, iš kurių tik vienas teisingas. Egzamino pažymys lygus teisingai atsakytų klausimų skaičiui. Studentai laiko egzaminą „tikimybiniu metodu": į kiekvieną klausimą atsakymą renkasi atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad iš* $n = 700$ *šiuo metodu laikančių egzaminą studentų aštuntukais bus įvertinti trys studentai?*

4. *Tikimybė, kad į fakultetą įstojęs moksleivis sėkmingai baigs studijas, lygi* 0,6. *Kiek mažiausiai reikėtų priimti studentų, kad tikimybė, jog studijas sėkmingai baigs ne mažiau kaip* 200 *studentų, būtų apytiksliai lygi* 0,8*?*

5. *Kiek mažiausiai kartų reikėtų mesti simetrišką lošimo kauliuką, kad tikimybė, jog šešetukas atvirs ne mažiau kaip* 100 *kartų būtų didesnė už* 0,7*?*

6. *Keleivis žygiuoja keliu taip: prieš žengdamas meta monetą, jeigu atvirsta herbas – žengia žingsnį į dešinę, jeigu skaičius – į kairę. Moneta atvirsta herbu su tikimybe* $p = 0{,}55$. *Kokia tikimybė, kad žengęs* $n = 100$ *žingsnių jis atsidurs toliau nei už penkių žingsnių į dešinę nuo kelionės pradžios taško? Kokia tikimybė, kad žengęs* $n = 100$ *žingsnių jis atsidurs toliau nei už penkių žingsnių į kairę nuo kelionės pradžios taško? Kokia tikimybė, kad jis nuo pradžios taško bus nutolęs ne daugiau kaip per penkis žingsnius?*

Atsakymai

1. $\approx 0{,}088$ *ir* $\approx 0{,}167$. **2.** $\approx 0{,}908$. **3.** $\approx 0{,}192$. **4.** ≈ 347. **5.** ≈ 630. **6.** $\approx 0{,}692; \approx 0{,}066; \approx 0{,}242;$

3 skyrius

Atsitiktiniai dydžiai

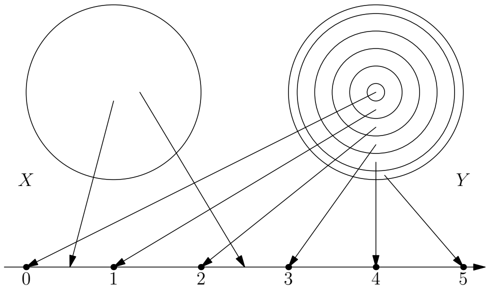
3.1 Atsitiktinio dydžio sąvoka

Nagrinėjant tikrovėje vykstančius bandymus, kartais būna sudėtinga nusakyti baigtis, tačiau lengva – tam tikras tų baigčių charakteristikas. Pavyzdžiui, sunku nusakyti, kokia baigtis lėmė, kad šiandien šalta, tačiau išmatuoti temperatūrą galime.

Dažnai mums rūpi ne tiek pati bandymo baigtis, kiek tam tikra skaitinė jos charakteristika. Pavyzdžiui, loterijos dalyviui svarbus laimėjimo dydis, besiruošiančiam išeiti iš namų – oro temperatūra... Prieš bandymą tokių dydžių reikšmių neįspėsi, taigi tai – atsitiktiniai dydžiai.

33 pavyzdys. Atsitiktinis skritulio taškas

Tarkime, skritulyje, kurio spindulio ilgis $r = 5$, atsitiktinai parenkamas taškas. Tegu X yra pasirinkto taško atstumas iki skritulio centro. Kadangi X reikšmės iš anksto nuspėti negalime, tai X – atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes iš skaičių intervalo $[0; 5]$. Jeigu matuosime atstumą iki centro ir apvalinsime iki sveikojo skaičiaus, gausime dydį Y, įgyjantį reikšmes iš skaičių aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.



Akivaizdu, kad

$$P(X<3)=\frac{\pi\cdot 3^2}{\pi\cdot 5^2}=0{,}36,\quad P(Y<3)=\frac{\pi\cdot 3{,}5^2}{\pi\cdot 5^2}=0{,}49,$$
$$P(X=3)=0,\quad P(Y=3)=\frac{\pi\cdot(3{,}5^2-2{,}5^2)}{\pi\cdot 5^2}=0{,}24.$$

Kad galėtume plėtoti atsitiktinių dydžių teoriją, pirmiausia turime juos griežtai matematiškai apibrėžti. Tarkime, kad tikimybinė erdvė $\langle\Omega,\mathcal{A},P\rangle$ yra jau sudaryta.

Atsitiktinis dydis

10 apibrėžimas. *Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė. Atsitiktiniu dydžiu vadiname taisyklę, priskiriančią baigtims skaičius, t. y. funkciją*

$$X:\Omega\to\mathbb{R},$$

apibrėžtą baigčių aibėje ir įgyjančią skaitines reikšmes bei tenkinančią sąlygą: bet kokiam x tikimybė $P(X<x)$ yra apibrėžta.

Tikimybė $P(X<x)$ bus apibrėžta tik tada, kai baigčių aibė $\{\omega : X(\omega)<x\}$ priklausys pasirinktai įvykių σ-algebrai $\mathcal{A}$. Taigi atsitiktinis dydis yra funkcija, kuri yra „suderinta“ su mūsų įvykių σ-algebra $\mathcal{A}$. Jeigu šios sąlygos nebūtų, ne visų įvykių, susijusių su dydžiu, tikimybes galėtume apskaičiuoti[1]. Mūsų požiūris į atsitiktinius dydžius yra pragmatiškas – atsitiktiniais dydžiais vadiname tik tas funkcijas, kurias galime tirti savo tikimybinėje erdvėje.

Iš dviejų atsitiktinių dydžių X_1,X_2 galime sudaryti porą $\langle X_1,X_2\rangle$, kurią vadinsime **dvimačiu atsitiktiniu vektorium**, iš trijų dydžių galime sudaryti trimatį atsitiktinį vektorių ir t. t.

Atsitiktinis vektorius

11 apibrėžimas. *Tegu $X_1,X_2,\ldots,X_n$ yra toje pačioje tikimybinėje erdvėje apibrėžti atsitiktiniai dydžiai. Jų rinkinį $X=\langle X_1,X_2,\ldots,X_n\rangle$ vadinsime n-mačiu atsitiktiniu vektoriumi.*

[1] Kritiškai nusiteikęs skaitytojas bus teisėtai nepatenkintas šiuo pernelyg bendru sakiniu. Kokiuos gi įvykius galime sieti su atsitiktiniu dydžiu X? Atsakymas toks: tai įvykiai $X^{-1}(B)=\{\omega : X(\omega)\in B\}$, čia B yra Borelio aibė. Tuomet kyla kitas klausimas: jeigu X yra atsitiktinis, ar įvykių $X^{-1}(B)$ tikimybės bus apibrėžtos? Iš pateiktojo apibrėžimo tai tiesiogiai neseka, tačiau galima įrodyti. Deja, tektų įsigilinti į gana subtilią matematinę mato teoriją. Mano patarimas: jeigu tai jums rūpi, baigę skaityti šią knygą imkitės išsamesnės, kurioje tikimybių teorija dėstoma nepraleidžiant nei vieno įrodymo.

Su atsitiktiniu dydžiu X galime susieti daug įvykių, pavyzdžiui,

$$\{X = 3\}, \quad \{X < 3\}, \quad \{2 < X < 3\}$$

ir t. t. Būtų gerai turėti „įrankį“, kuriuo naudodamiesi galėtume reikšti tokių įvykių tikimybes. Tas įrankis – pasiskirstymo funkcija.

Pasiskirstymo funkcija

12 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją F_X, apibrėžtą lygybe*

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Atsitiktinio vektoriaus $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją

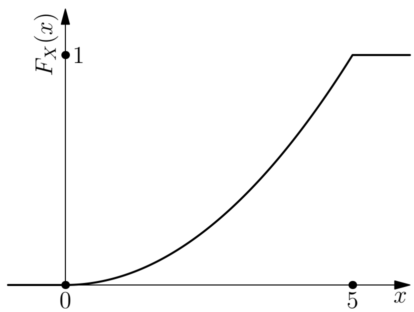
$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

34 pavyzdys. Atsitiktinis skritulio taškas

Tarkime, skritulyje, kurio spindulio ilgis $r = 5$, atsitiktinai parenkamas taškas. Tegu X yra pasirinkto taško atstumas iki centro. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes iš skaičių intervalo $[0; 5]$.

Surasime jo pasiskirstymo funkciją. Kadangi dydis įgyja tik teigiamas reikšmes, kai $x \leqslant 0$, gausime $F_X(x) = 0$. Taip pat akivaizdu, kad kai $x \geqslant 5$, teisinga lygybė $F_X(x) = 1$. Kai $0 < x < 5$, gauname $F_X(x) = \pi x^2/\pi 5^2 = x^2/25$. Taigi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{25}, & \text{jei } 0 < x < 5, \\ 1, & \text{jei } x \geqslant 5. \end{cases}$$



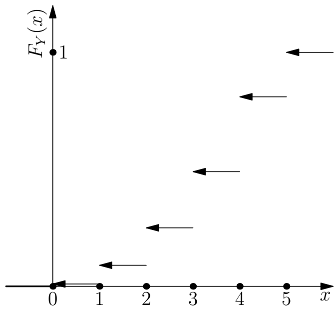
Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcijos $F_X(x)$ grafikas

35 pavyzdys. Atsitiktinis skritulio taškas

O dabar tarkime, kad parinkę skritulio tašką ir išmatavę jo atstumą iki centro, apvaliname atstumą iki sveikojo skaičiaus. Šitaip gausime atsitiktinį dydį Y, kuris gali įgyti šešias reikšmes.

Nesunku apskaičiuoti tikimybes $P(Y = m),\ m = 0, 1, \ldots, 5$. Surašykime jas į lentelę:

$y =$	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y) =$	0,01	0,08	0,16	0,24	0,32	0,19



Atsitiktinio dydžio Y pasiskirstymo funkcijos $F_Y(x)$ grafikas

Naudodamiesi šiomis tikimybėmis galime apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos reikšmę bet kuriame taške. Pavyzdžiui,

$$F_Y(2{,}5) = P(Y < 2{,}5) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}25.$$

Šią reikšmę pasiskirstymo funkcija $F_Y(y)$ įgyja su visais y iš intervalo $[2; 3)$. Funkcijos grafikas sudarytas iš „laiptelių“.

Nagrinėtų pavyzdžiuose atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų grafikai rodo visas svarbiausias pasiskirstymo funkcijų savybes. Suformuluokime jas.

24 teorema. *Kiekvieno atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ turi šias savybes:*

1. *funkcija įgyja reikšmes intervale $[0; 1]$ ir yra nemažėjanti: jei $x_1 < x_2$, tai $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$;*
2. *jei $x \to \infty$, tai $F_X(x) \to 1$; jei $x \to -\infty$, tai $F_X(x) \to 0$;*
3. *jei x artėja prie skaičiaus x_0 iš kairės, t. y. teisinga nelygybė $x < x_0$, tai $F_X(x) \to F_X(x_0)$. Ši savybė vadinama funkcijos tolydumo iš kairės savybe.*

Įrodymas. Kadangi $F_X(x) = P(X < x)$, tai funkcija, kaip ir tikimybė, įgyja reikšmes tik iš intervalo $[0; 1]$.

Pažymėkime $A_x = \{\omega : X(\omega) < x\}$, t. y. įvykį A_x sudaro tos baigtys, kurioms priskiriamos reikšmės yra mažesnės už x. Jei $x_1 < x_2$, tai baigčių, kurioms priskiriamos reikšmės mažesnės už x_2, yra ne mažiau negu baigčių, kurioms priskiriamos reikšmės mažesnės už x_1. Taigi $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. Tačiau tada $P(A_{x_1}) \leqslant P(A_{x_2})$, ir $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$.

Antroji ir trečioji savybės išplaukia iš tikimybės tolydumo. Įrodykime teiginį $F_X(x) \to 1$, kai $x \to \infty$. Tegu x_n yra neaprėžtai didėjanti seka, t. y. $x_1 < x_2 < \ldots$ ir $x_n \to \infty$. Tada

$$A_{x_1} \subset A_{x_2} \subset A_{x_3} \subset \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x_n} = \Omega.$$

Iš tikimybės monotoniškumo savybės gauname $P(A_{x_n}) \to 1$ arba $F_X(x_n) \to 1$, kai $x_n \to +\infty$.

Panašiai galima įrodyti ir kitus teoremos teiginius.

Naudodamiesi pasiskirstymo funkcija galime užrašyti įvairias su atsitiktiniu dydžiu susijusių įvykių tikimybes. Pavyzdžiui,

$$P(X \geqslant 2) = 1 - F_X(2), \quad P(2 \leqslant Y < 3) = F_X(3) - F_X(2).$$

Tarkime, X yra atsitiktinis dydis, o $f(x)$ kokia nors funkcija, įgyjanti reikšmes iš realiųjų skaičių aibės. Ar dydis $Y = f(X)$ irgi bus atsitiktinis, t. y. suderintas su nagrinėjamų įvykių σ-algebra? Kad taip būtų, funkcija f turi tenkinti vieną sąlygą.

13 apibrėžimas. *Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija, o $B \subset \mathbb{R}$ – Borelio aibė. Jeigu $\{x : f(x) \in B\}$ taip pat yra Borelio aibė, tai funkcija B vadinama Borelio funkcija.*

Visos funkcijos, su kuriomis susiduriame praktiniuose taikymuose, yra Borelio funkcijos. Taigi tikrinti, ar funkcija tenkina apibrėžimo sąlygą, mums neprireiks. Pasinaudoję Borelio funkcijomis iš vieno atsitiktinio dydžio galime gauti kitų atsitiktinių dydžių.

Borelio funkcijos ir atsitiktiniai dydžiai

25 teorema. *Jeigu X yra atsitiktinis dydis, o f – Borelio funkcija, tai $Y = f(X)$ irgi yra atsitiktinis dydis.*

Uždaviniai

1. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, nagrinėtas šio skyrelio pavyzdžiuose. Pasinaudokite pasiskirstymo funkcijos išraiška ir apskaičiuokite tikimybę $P(2 < X < 3)$.*

2. *Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 5. Kvadrate atsitiktinai parenkamas taškas, X yra parinkto taško atstumas iki kraštinės AB. Apskaičiuokite tikimybes $P(X < 3), P(X > 1)$. Nubraižykite pasiskirstymo funkcijos $F_X(x)$ grafiką.*

3. *Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 5. Kvadrate atsitiktinai parenkamas taškas, X_1 yra parinkto taško atstumas iki kraštinės AB, X_2 – parinkto taško atstumas iki kraštinės AD, $Y = min(X_1, X_2), Z = max(X_1, X_2)$. Apskaičiuokite tikimybes $P(Y < 3), P(Y > 1), P(Z < 3), P(Z > 1)$. Nubraižykite pasiskirstymo funkcijos $F_Y(x)$ grafiką.*

4. *Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 5. Kvadrate atsitiktinai parenkamas taškas, X_1 yra parinktojo taško atstumas iki kraštinės AB, X_2 – parinkto taško atstumas iki kraštinės BC, X_3, X_4 atstumai iki kraštinių CD ir AD. Tegu $Y = min(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Apskaičiuokite tikimybes $P(Y < 3), P(Y < 2), P(Y > 1)$. Nubraižykite pasiskirstymo funkcijos $F_Y(x)$ grafiką.*

Atsakymai

1. 1/5. **2.** 3/5; 4/5. **3.** 21/25; 16/25; 9/25; 24/25. **4.** 1; 24/25; 9/25.

3.2 Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Dauguma šiame skyrelyje nagrinėjamų atsitiktinių dydžių – vienaip ar kitaip susiję su bandymų, turinčių tik dvi baigtis, sekomis.

Aibę, kurios elementus galima sunumeruoti, vadiname diskrečiąja. Nagrinėsime atsitiktinius dydžius, kurie įgyja reikšmes iš diskrečiųjų aibių.

Diskretusis atsitiktinis dydis

14 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinio dydžio reikšmių aibė yra diskrečioji, dydį vadinsime diskrečiuoju.*

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X reikšmes galima sunumeruoti: $x_1, x_2, \ldots$ Gali būti baigtinis kiekis reikšmių, tačiau gali būti ir begalinis. Jeigu atsitiktinio dydžio X reikšmių skaičius yra baigtinis, kartais jas kartu su tikimybėmis patogu susirašyti į lentelę, kaip jau darėme anksčiau:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x = & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ \hline P(X = x) = & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{array}, \quad p_i = P(X = x_i).$$

Visų dydžio X reikšmių tikimybių suma lygi 1, t. y.

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

Mažiausias galimas dydžio reikšmių skaičius lygus 1. Tada su visomis baigtimis dydis įgyja tą pačią reikšmę (nesvarbu, kiek akučių atvirto metus kauliuką, jūsų laimėjimas tas pats). Tokio atsitiktinio dydžio galėtume ir nevadinti atsitiktiniu, nes jo reikšmę visada galima pasakyti iš anksto. Vis dėlto prasminga ir tokius dydžius priimti į atsitiktinių dydžių šeimą.

Išsigimęs atsitiktinis dydis

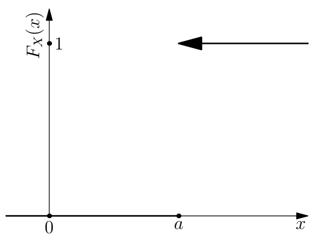
15 apibrėžimas. *Jeigu yra reikšmė a, su kuria atsitiktiniam dydžiui X teisinga lygybė $P(X = a) = 1$, tai tokį dydį vadinsime išsigimusiu atsitiktiniu dydžiu.*

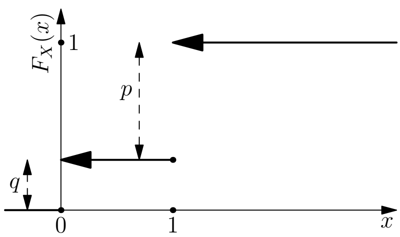
Išsigimusio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas labai paprastas, žr. brėžinį. Grafikas sutrūkęs viename taške $x = a$, trūkio dydis lygus 1.

Galimos tik dvi Bernulio schemos bandymų baigtys: nesėkmė ir sėkmė. Jeigu nesėkmės atvejį žymėsime skaičiumi 0, o sėkmės – 1, gausime atsitiktinį dydį X, įgyjantį tik dvi reikšmes:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Tokio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas turi du trūkius, kurių dydžiai lygūs reikšmių tikimybėms p ir q.





Išsigimusio atsitiktinio dydžio ir Bernulio dydžio pasiskirstymo funkcijų grafikai

O dabar nagrinėkime atsitiktinį dydį X, kurio reikšmė lygi sėkmių skaičiui Bernulio schemoje, kai vieno bandymo sėkmės tikimybė lygi p, o bandymų skaičius – n. Toks dydis gali įgyti reikšmes $0, 1, 2, \ldots, n$. Žinome šio dydžio tikimybes:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p.$$

Binominis atsitiktinis dydis

16 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį X, įgyjantį reikšmes su tikimybėmis*

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

vadinsime binominiu atsitiktiniu dydžiu; žymėsime $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Šį dydį gana išsamiai nagrinėjome Bernulio schemai skirtame skyrelyje. Jį galima išreikšti dydžių, įgyjančių tik dvi reikšmes, suma. Iš tikrųjų, su i-uoju Bernulio schemos bandymu ($i = 1, 2, \ldots, n$) susiekime atsitiktinį dydį taip:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme sėkmė,} \\ 0, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme nesėkmė.} \end{cases}$$

Tada

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Hipergeometrinis atsitiktinis dydis

Tegu urnoje yra u baltų ir v juodų rutulių. Atsitiktinai su grąžinimu traukiame n rutulių, X – baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų. Nesunku suvokti, kad X yra binominis dydis: $X \sim \mathcal{B}(n, u/(u+v))$. O jeigu ištrauktųjų rutulių nebegrąžintume? Didžiausia galima tokio dydžio reikšmė yra $\max(u, n)$ (negalime ištraukti daugiau baltų rutulių negu traukiame arba daugiau nei urnoje yra). Mažiausioji – $\max(n-v, 0)$ (jeigu traukiame daugiau rutulių negu urnoje yra juodų, tai $n-v$ baltų rutulių tikrai ištrauksime).

Dydis X – diskretusis atsitiktinis dydis, jo reikšmių tikimybes surasime pasinaudoję klasikiniu tikimybės apibrėžimu. Tai hipergeometrinis atsitiktinis dydis.

Hipergeometrinis atsitiktinis dydis

17 apibrėžimas. *Tegu u, v, n natūralieji skaičiai, $n \leqslant u + v$. Diskretųjį atsitiktinį dydį su reikšmių tikimybėmis*

$$P(X = m) = \frac{C_u^m C_v^{n-m}}{C_{u+v}^n}, \quad \max(n-v, 0) \leqslant m \leqslant \max(u, n)$$

vadinsime hipergeometriniu atsitiktiniu dydžiu.

Panašiai kaip binominį dydį, hipergeometrinį dydį galima užrašyti paprastų atsitiktinių dydžių suma:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

dydis X_i „signalizuoja“, ar i-asis rutulys yra baltas ($X_i = 1$), ar juodas ($X_i = 0$).

Pastebėkime, kad visų dydžių X_i reikšmių tikimybės yra vienodos:

$$P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = \ldots = P(X_n = 0) = \frac{v}{u+v},$$
$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \ldots = P(X_n = 1) = \frac{u}{u+v}.$$

Galbūt nustebote: kaip čia yra – baltų rutulių skaičius reiškiamas tokių pat dydžių suma tiek traukiant su grąžinimu, tiek be grąžinimo, tačiau gaunami skirtingi atsitiktiniai dydžiai? Priežastis ta, kad sumos savybės priklauso ne tik nuo dėmenų tikimybių, bet ir nuo jų tarpusavio ryšių arba, kitaip tariant, nuo tarpusavio priklausomybės. Traukimo su grąžinimu atveju įvykiai $\{X_1 = 1\}, \{X_2 = 1\}$ yra nepriklausomi, o traukiant be grąžinimo – priklausomi.

Bernulio schema – tikras atsitiktinių dydžių lobynas. Panagrinėkime ją dar kartą. Įsivaizduokime, kad Bernulio schemos bandymai kartojami iki pirmos sėkmės, o X reiškia atliktų bandymų skaičių. Tada mažiausia atsitiktinio dydžio X reikšmė lygi 1, o didžiausios nėra iš viso. Jei sėkmę žymėsime S, o nesėkmę N raide, tai tokio bandymo baigtis galėsime užrašyti taip:

$$S,\ NS,\ NNS,\ NNNS,\ \ldots$$

Jeigu vieno bandymo sėkmės tikimybė lygi p, tai šio dydžio reikšmių tikimybės

$$\begin{aligned}&P(X=1) = P(S) = p,\ P(X=2) = P(NS) = qp,\\ &P(X=3) = P(NNS) = q^2p,\ \ldots,\\ &P(X=m) = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

čia $q = 1 - p$ yra vieno bandymo nesėkmės tikimybė.

Geometrinis atsitiktinis dydis

18 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį X, įgyjantį reikšmes $m = 1, 2, \ldots$ su tikimybėmis*

$$P(X=m) = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p,$$

vadinsime geometriniu. Žymėsime $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Taigi geometrinio dydžio reikšmė – bandymų skaičius, kurį teko atlikti, kol gavome pirmą sėkmę. Reikšmių tikimybės sudaro geometrinę progresiją, todėl dydis ir vadinamas geometriniu.

Apskaičiuosime tikimybę, kad teks atlikti daugiau kaip n bandymų, kol gausime pirmą sėkmę:

$$\begin{aligned}P(X > n) &= P(X = n+1) + P(X = n+2) + \cdots\\ &= q^n p + q^{n+1} p + \cdots = q^n p(1 + q + q^2 + \cdots) = \frac{q^n p}{1-q} = q^n,\end{aligned}$$

čia pasinaudojome geometrinės progresijos narių sumos formule:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Įsivaizduokime, kad atlikome jau m bandymų, bet visi baigėsi nesėkmėmis. Taigi įvyko įvykis $\{X > m\}$. Kokia tikimybė, kad atliksime dar ne mažiau kaip n nesėkmingų bandymų, t. y. kam lygi sąlyginė tikimybė

$$P(X > n + m | X > m)?$$

Jeigu atlikome m nesėkmingų bandymų, tai galime manyti, kad viskas prasideda iš naujo. Taigi tikimybė, kad nepasiseks dar ne mažiau kaip n kartų, lygi prieš bandymą apskaičiuotajai tikimybei $P(X > n)$. Todėl

$$P(X > n + m | X > m) = P(X > n) = q^n.$$

Geometrinis dydis X – tai atliktų iki pirmos sėkmės bandymų skaičius. Tada $X - 1$ yra iki pirmos sėkmės patirtų nesėkmių skaičius. Pasirinkime dabar kokį nors sveikąjį skaičių $n \geqslant 1$. Bernulio schemos bandymus atliksime tol, kol gausime n sėkmių. Pažymėkime Y_n atliekant bandymus patirtų nesėkmių skaičių. Tada Y_n yra atsitiktinis dydis, įgyjantis sveikas neneigiamas reikšmes. Įvykiui $\{Y_n = m\}$ palanki baigtis – seka $\langle \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+m-1}, 1\rangle$, čia reikšmė $\omega_i = 0$ reiškia nesėkmę, o $\omega_i = 1$ – sėkmę; $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n+m-1} + 1 = n$. Tokios baigties tikimybė $P(\omega) = p^n q^m$. Kiek yra baigčių, kurios palankios įvykiui $\{Y = m\}$? Tiek, kiek yra būdų parinkti baigties sekoje lygiai m ženklų $\omega_i = 0$. Taigi palankių baigčių skaičius yra C^m_{m+n-1} ir

$$P(Y_n = m) = C^m_{m+n-1} p^n q^m.$$

Paskalio atsitiktinis dydis

19 apibrėžimas. *Diskretų atsitiktinį dydį X, įgyjantį sveikas neneigiamas reikšmes su tikimybėmis*

$$P(X = m) = C^m_{m+n-1} p^n q^m$$

vadinsime Paskalio atsitiktiniu dydžiu ir žymėsime $X \sim \mathcal{B}^-(n, p)$.

Paskalio atsitiktinį dydį $Y \sim \mathcal{B}^-(n, p)$ galime išreikšti geometriniais dydžiais. Pažymėkime Y_1 nesėkmių, patirtų iki pirmos sėkmės, skaičių. Tada $X_1 = Y_1 + 1 \sim \mathcal{G}(p)$. Jei Y_2 yra nesėkmių, patirtų po pirmos sėkmės iki antros sėkmės, skaičius, tai $X_2 = Y_2 + 1 \sim \mathcal{G}(p)$. Analogiškai apibrėžiame ir dydžius $X_3, Y_3, \ldots, X_n, Y_n$. Akivaizdu, kad

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = X_1 + \cdots + X_n - n, \quad X_j \sim \mathcal{G}(p).$$

Ir dar kartą sugrįžkime prie Bernulio schemos. Kai vieno bandymo sėkmės tikimybė yra maža, o bandymų skaičius didelis, tai sėkmių skaičiaus tikimybę galime skaičiuoti pagal tokią apytikslę formulę:

$$P(S_n = m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \lambda = np, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Tai reiškia kad binominis dydis „supanašėja“ su kitos šeimos dydžiu.

Puasono atsitiktinis dydis

20 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X įgyja sveikas neneigiamas reikšmes su tikimybėmis*

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

jį vadinsime Puasono dydžiu ir žymėsime $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Apibrėžėme dar vieną atsitiktinių dydžių šeimą. Kiekvienas šios šeimos dydis turi savo parametrą λ, kuriuo naudojantis reiškiamos dydžio reikšmių tikimybės.

Tokie dydžiai pasirodo bandymuose, kuriuos galima suvokti kaip ilgas vienodų ir nepriklausomų bandymų su mažomis sėkmės tikimybėmis sekas.

Tarkime, išsiruošėte grybauti, nors orai grybams augti nėra labai palankūs. Kiek grybų surasite nuėję, pavyzdžiui, 1 000 m miško takais? Kadangi iš anksto to pasakyti negalime, grybų skaičius – atsitiktinis dydis. Tarkime, 1 m ilgio kelyje galima rasti tik vieną grybą (žinoma, tai netiesa, tačiau jeigu radę daugiau grybų nupjausime tik vieną, tokia sąlyga bus patenkinta). Tada visą grybavimo bandymą galime įsivaizduoti sudarytą iš 1 000 atskirų bandymų su mažomis sėkmės tikimybėmis. Taigi rastų grybų skaičius – beveik Puasono dydis.

Gali pasitaikyti tokių atsitiktinių dydžių, kurie netenkina diskrečiojo atsitiktinio dydžio apibrėžimo, tačiau turi tokią pat pasiskirstymo funkciją kaip ir diskretusis atsitiktinis dydis. Panagrinėkime tokį pavyzdį. Kvadrate, kurio kraštinė lygi 2, atsitiktinai pasirenkame tašką. Jeigu tašką parinkome ant kvadrato kraštinės – matuojame jo atstumą iki centro ir gauname atsitiktinio dydžio X reikšmę. Šitaip galime gauti bet kurį intervalo $[1; \sqrt{2}]$ skaičių. Jeigu pasirinktas taškas yra kvadrato viduje, tada apibrėžiame dydį lygybe $X = 1$. Taigi atsitiktinis dydis X gali įgyti visas reikšmes iš intervalo $[1; \sqrt{2}]$. Visų dydžio X reikšmių negalime sunumeruoti, tačiau taikydami geometrinį tikimybės apibrėžimą gauname, kad $P(X \neq 1) = 0, P(X = 1) = 1$. Taigi savo tikimybinėmis savybėmis dydis X nesiskiria nuo išsigimusiuo dydžio, įgyjančio vienintelę reikšmę $X = 1$. Jeigu ir tuo atveju, kai parinktas taškas nėra kvadrato viduje, apibrėšime dydį lygybe $X = 1$, gausime „tikrą“ diskretųjį atsitiktinį dydį.

Uždaviniai

1. *Metami du simetriški lošimo kauliukai. Tegu X_1 – akučių, atvirtusių ant pirmo kauliuko skaičius, X_2 – ant antrojo. Kokias reikšmes įgyja atsitiktinis dydis $X = X_1 - X_2$? Kokiame taške funkcijos $F_X(x)$ trūkis yra didžiausias? Koks šio trūkio dydis?*

2. *Dešimt egzamino bilietų sunumeruoti skaičiais $1, 2, \ldots, 10$ ir sudėti į urną. Penki studentai vienas po kito atsitiktinai traukia po egzamino bilietą. Parinktas bilietas grąžinamas atgal. Atsitiktinio dydžio X reikšmė – didžiausias bilieto numeris iš ištrauktųjų. Apskaičiuokite pasiskirstymo funkcijos reikšmę $F_X(5{,}5)$ ir tikimybę $P(X = 5)$.*

3. *Dešimt egzamino bilietų sunumeruoti skaičiais* $1, 2, \ldots, 10$ *ir sudėti į urną. Trys studentai vienas po kito atsitiktinai traukia po egzamino bilietą. Parinktas bilietas atgal negrąžinamas. Atsitiktinio dydžio* X *reikšmė – didžiausias bilieto numeris iš ištrauktųjų. Apskaičiuokite pasiskirstymo funkcijos reikšmę* $F_X(4{,}5)$ *ir tikimybę* $P(X = 5)$.

4. *Bandymo įrankiai: moneta ir du simetriški lošimo kauliukai – mėlynas ir raudonas. Metus monetą herbas atvirsta su tikimybe* $p = 0{,}6$. *Mėlyno kauliuko sienelės pažymėtos skaičiais* $1, 1, 2, 4, 5, 6$, *raudonojo –* $1, 2, 2, 3, 4, 5$. *Pirmiausia metama moneta. Jeigu ji atvirsta herbu – metamas mėlynas kauliukas, jeigu skaičiumi – raudonas. Atsitiktinio dydžio* X *reikšmė – skaičius ant atvirtusios kauliuko sienelės. Apskaičiuokite pasiskirstymo funkcijos reikšmę* $F_X(3{,}5)$.

5. *Lošiama mėtant monetą, kuri atvirsta herbu su tikimybe* $p = 0{,}3$. *Jeigu atvirsta herbas – lošėjas laimi 2 Lt*[2], *jeigu skaičius – sumoka 1 Lt (kitaip tariant, – laimi* -1 *Lt.) Kokia tikimybė, kad po penkių metimų lošėjo įgytas laimėjimas bus 1 Lt? Kokia tikimybė, kad bus sumokėta dviem litais daugiau negu gauta (t. y. įgytas laimėjimas lygus* -2 *Lt? Kokia tikimybė, kad po penkių metimų įgytas laimėjimas bus teigiamas?*

6. *Loterijos bilietas kainuoja* 2 *Lt, tikimybė, kad jis bus laimingas, lygi* $0{,}4$, *laimėjimo dydis –* 5 *Lt. Jeigu pirksime po vieną bilietą iki pirmojo laimėjimo, kokia tikimybė, kad nepatirsime nuostolio?*

7. *Rugpjūčio naktį filmuojame dangų, tikėdamiesi užfiksuoti krintančius meteorus. Meteorų, patenkančių į filmavimo kameros akiratį per pusvalandį, skaičius – atsitiktinis dydis* $X \sim \mathcal{P}(3)$. *Kokia tikimybė, kad per pusvalandį kamera užfiksuos ne mažiau kaip penkis krintančius meteorus?*

Atsakymai

1. *Dydžio* X *reikšmių aibė* $\{-5; -4; \ldots 4; 5\}$. *Funkcijos* $F_X(x)$ *grafiko trūkis didžiausias taške* $x = 0$; *trūkio dydis* $P(X = 0) = 1/6$. **2.** $1/32$; $0{,}2101$. **3.** $1/30; 1/20$. **4.** $17/30$. **5.** $0{,}3087$; $0{,}36015$; $0{,}4717$. **6.** $16/25$. **7.** $\approx 0{,}185$.

3.3 Tolydieji atsitiktiniai dydžiai

Kiek šio skyriaus eilučių perskaitysite? Eilučių skaičius – diskretusis atsitiktinis dydis. O kiek laiko sugaišite skaityti? Tai – tolydusis atsitiktinis dydis.

Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų grafikai yra sutrūkę. Jei X yra diskretusis atsitiktinis dydis, o a yra jo reikšmė, $P(X = a) = p$, tai taške $x = a$ pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ turės trūkį, kurio dydis yra p, t. y.

$$F_X(a + \epsilon) - F_X(a - \epsilon) \to p, \quad \text{kai} \quad \epsilon > 0,\ \epsilon \to 0.$$

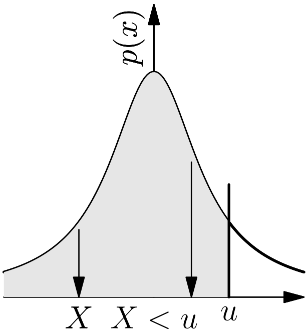
[2]Litas – Lietuvos valiuta, naudota 1922 10 1–1941 03 25 ir 1993 06 25–2014 12 31.

Tačiau jau nagrinėjome ir tokius atsitiktinius dydžius, kurių pasiskirstymo funkcijų grafikai neturi trūkio taškų.

21 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija yra visuose taškuose tolydžioji, tokį atsitiktinį dydį vadinsime tolydžiuoju.*

Tarkime, neneigiamos funkcijos $p(x)$ grafiku ir koordinačių sistemos ašimi $y = 0$ apribotos srities plotas lygus vienetui, žr. brėžinį.

Panagrinėkime tokį bandymą: atsitiktinai parenkame šios srities tašką ir nustatome jo abscisę (x koordinatę). Tegu X – šitaip gautas skaičius. Tada X – atsitiktinis dydis. Surasime jo pasiskirstymo funkciją.



Pasinaudoję geometriniu tikimybės apibrėžimu gauname,

$$F_X(u) = P(X < u) = \frac{S_u}{S} = \int_{-\infty}^{u} p(x)\mathrm{d}x,$$

čia $S = 1$ yra srities, apribotos funkcijos $p(x)$ grafiku ir tiese $y = 0$, plotas, o S_u – šios srities plotas į kairę nuo tiesės $x = u$.

Kai u kinta, plotas S_u kinta be šuolių, t. y. tolydžiai. Taigi gauname tolydųjį atsitiktinį dydį. Jo pasiskirstymo funkciją išreiškėme naudodami kitą funkciją $p(x)$, ji suteikia galimybę interpretuoti tikimybes, susijusias su atsitiktiniu dydžiu X, kaip atitinkamų sričių plotus. Pavyzdžiui, tikimybė $P(a < X < b)$ lygi srities, kurią riboja tiesės $x = a, x = b, y = 0$ ir funkcijos $p(x)$ grafikas, plotui.

Absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai

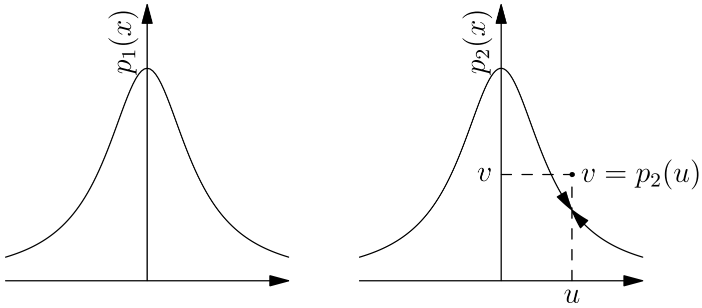
22 apibrėžimas. *Jeigu egzistuoja neneigiama funkcija $p(x)$, kad atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija užrašoma lygybe*

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} p(x)\mathrm{d}x,$$

tai dydį X vadinsime absoliučiai tolydžiuoju atsitiktiniu dydžiu, o funkciją $p(x)$ jo tikimybių tankiu (arba tiesiog tankiu).

Srities, kurią apriboja atsitiktinio dydžio tankio grafikas ir tiesė $y = a$, plotas nepasikeis, jeigu pakeisime tankio funkcijos reikšmę viename ar keliuose taškuose.

Pavyzdžiui, funkcijos $p_1(x)$ ir $p_2(x)$ gali būti naudojamos kaip to paties atsitiktinio dydžio tankiai, žr. brėžinį.



Tačiau visada geriau rinktis tokias funkcijas, kurių grafikai yra kiek galima mažiau „sutrūkinėję“. Jeigu tankio funkcija $p_X(x)$ yra tolydi, kai $x = x_0$, tai pasiskirstymo funkcija šiame taške turės išvestinę:

Pasiskirstymo funkcija ir tankis

jei $p_X(x)$ tolydi, kai $x = x_0$, tai $F'_X(x_0) = p_X(x_0)$.

Taigi, žinodami pasiskirstymo funkciją, tankio funkciją galime rasti diferencijuodami. Tačiau gali būti keletas taškų, kuriuose pasiskirstymo funkcija išvestinės neturės. Šiuose taškuose tankio funkcijos reikšmių rasti diferencijuojant nepavyks. Tokiuose taškuose tankio funkcijos reikšmę galime apibrėžti bet kaip, plotai, kurių reikšmės lygios atitinkamoms tikimybėms, nepasikeis.

Kai $x \to \infty$, tai $F_X(x) \to 1$. Jeigu atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydus, ir $u \to \infty$, tai

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} p_X(x)\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x,$$

taigi

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Naudodamiesi tankio sąvoka galime įvykių tikimybes susieti su tam tikrų sričių plotais. Pavyzdžiui, jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį $p_X(x)$, tai tikimybę $P(X \in [a;b))$ $(a < b)$ galime išreikšti taip;

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b)) &= P(a \leqslant X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} p_x(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} p_x(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} p_x(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Savo ruožtu šis integralas reiškia figūros, kurią riboja tiesės $x = a, x = b, y = 0$ ir tankio $p_X(x)$ grafikas, plotą.

Tankio reikšmės parodo, kur atsitiktinio dydžio reikšmės linkusios dažniau, kur rečiau „pasirodyti“. Tegu, pavyzdžiui, $p_X(x_1) > p_X(x_2)$. Palyginkime tikimybes, kad atsitiktinis dydis X įgis reikšmes arti x_1 ir x_2, t. y. tikimybes $P(X \in [x_1 - \epsilon; x_1 + \epsilon))$ ir $P(X \in [x_2 - \epsilon; x_2 + \epsilon))$. Kai $\epsilon > 0$ yra mažas skaičius, šios tikimybės apytiksliai lygios stačiakampių su vienodo ilgio pagrindais plotams, t. y. dydžiams $2\epsilon p_X(x_1)$ ir $2\epsilon p_X(x_2)$. Taigi atsitiktinio dydžio reikšmės dažniau „pasirodo“ arti to taško, kuriame tankio reikšmė yra didesnė.

Panagrinėkime kelias svarbias absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių šeimas.

36 pavyzdys. Tolygiai pasiskirstę dydžiai

Tarkime, atsitiktinio dydžio X reikšmė – atsitiktinai parinktas intervalo $[a, b]$, $a < b$, skaičius. Jeigu visi skaičiai turi vienodas galimybes būti parinkti, pasiskirstymo funkciją rasime pasinaudoję geometriniu tikimybių apibrėžimu:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jei } a < x < b, \\ 1, & \text{jei } x \geqslant b. \end{cases}$$

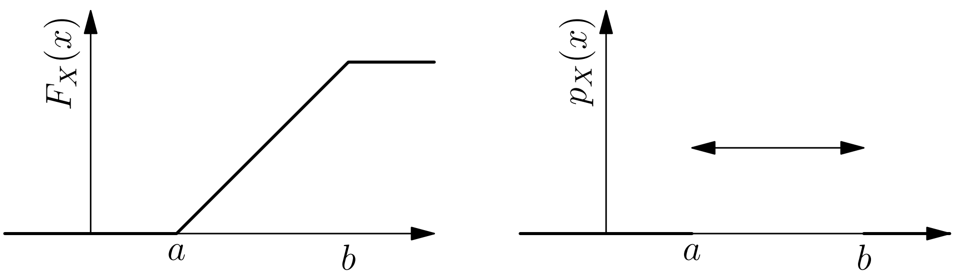
Kai $x \neq a, b$ pasiskirstymo funkcija turi išvestinę. Kai $x \notin [a; b]$, tai $F'_X(x) = 0$; kai $x \in (a; b)$, tai $F'_X(x) = 1/(b - a)$.

Tolygiai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai

Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } x \notin [a; b], \\ \frac{1}{b-a}, & \textit{jei } x \in (a; b), \end{cases}$$

tai sakysime, kad dydis tolygiai pasiskirstęs intervale $[a; b]$ ir žymėsime $X \sim \mathcal{T}([a; b])$.



Tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcijos ir tankio grafikai

37 pavyzdys. Eksponentiniai dydžiai

Įsivaizduokime, kad pro pravirą langelį į kambarį įskrido bitė ir išsigandusi pradėjo blaškytis, ieškodama kelio ištrūkti. Tegu X yra laikas, kurį bitė praleis kambaryje ieškodama atviro lango. Kokia tikimybė, kad jai prireiks ne mažiau kaip t sekundžių, t. y. kam lygi tikimybė $P(X \geqslant t)$?

Tarkime, kad laikas padalytas į $1/n$ sekundžių trukmės intervalus $I_1, I_2, \ldots$. Įsivaizduokime, kad bitė atlieka bandymus iki pirmos sėkmės. Pirmas bandymas vyksta laiko intervale I_1, jeigu atvirą langelį rado – sėkmė, jeigu nerado – atlieka antrą bandymą laiko intervale I_2. Pažymėkime vieno bandymo sėkmės tikimybę p_n , t. y. tikimybę, kad bitė ras išeitį per $1/n$ sekundžių. Tada bitės atliktų bandymų (laiko intervalų I_j, kurių prireiks kelio paieškai) skaičius X_n yra geometrinis atsitiktinis dydis, $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$. Žinome, kad

$$P(X_n > N) = q_n^N, \quad q_n = 1 - p_n.$$

Tačiau mes norime apskaičiuoti tikimybę $P(X \geqslant t)$! Kadangi laikotarpyje $[0, t]$ telpa maždaug $N = t/(1/n) = nt$ intervalų, tai

$$P(X \geqslant t) \approx P(X_n > N) = q_n^N = (1 - p_n)^{nt}.$$

Ši apytikslė lygybė tuo tikslesnė, kuo didesnis n. Radę ribą, kai $n \to \infty$, gausime $P(X > t)$.

Kai $n \to \infty$, intervalų I_j ilgiai ir sėkmės tikimybė p_n mažėja. Tarkime, kad sėkmės tikimybė mažėja tiesiog proporcingai laiko intervalų ilgiui, t. y. egzistuoja toks skaičius $\lambda > 0$, kad $p_n/(1/n) = np_n \to \lambda$. Pasinaudosime vienu svarbiu teiginiu apie sekų ribas: jei $z_n \to z$, kai $n \to \infty$, tai

$$\Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)^n \to \mathrm{e}^z.$$

Kai $n \to \infty$, tai

$$(1 - p_n)^{nt} = \bigg(\Big(1 + \frac{-np_n}{n}\Big)^n\bigg)^t \to \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \text{nes } -np_n \to -\lambda.$$

Taigi galime teigti

$$P(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad F_X(x) = 1 - P(X \geqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

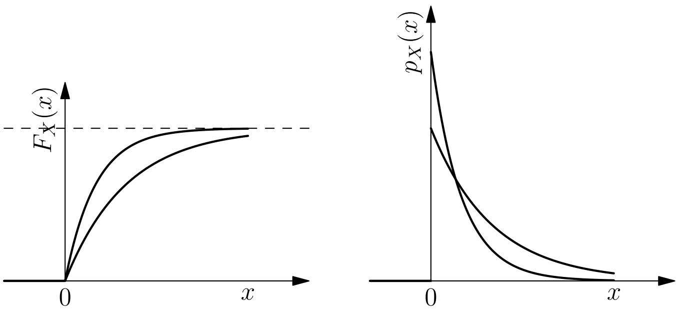
Apskaičiavę išvestinę rasime tankį: $p_X(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, kai $t > 0$.

Eksponentiniai dydžiai

23 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{jei } x > 0, \end{cases}$$

čia $\lambda > 0$, X vadinsime eksponentiniu atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Dydžių, pasiskirsčiusių pagal eksponentinius dėsnius $\mathcal{E}(\lambda_1)$ ir $\mathcal{E}(\lambda_2)$, pasiskirstymo funkcijų ir tankių grafikai. Tarkime, $\lambda_1 > \lambda_2$. Nustatykite, kurie grafikai atitinka dėsnį $\mathcal{E}(\lambda_1)$.

38 pavyzdys. Puasono procesas, eksponentiniai ir gama dydžiai

Įjungėte savo mobilųjį telefoną ir laukiate pirmosios SMS žinutės. Tegu T_1 yra laukimo trukmė. Kokia tikimybės $P(T_1 \geqslant t)$ reikšmė, t. y. kokia tikimybė, kad teks laukti ne trumpiau kaip t laiko vienetų?

Dalydami laiko intervalą $[0; t]$ į mažus intervalus, kaip darėme nagrinėdami pasiklydusios bitės rūpesčius, ir padarę prielaidą, kad trumpame $1/n$ ilgio intervale mūsų telefonas gali priimti tik vieną žinutę, o tikimybė, kad ji atklys, lygi p_n, $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, gausime, kad

$$P(T_1 \geqslant t) = e^{-\lambda t}, \quad \text{t. y.} \quad T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

Tačiau laikotarpiu $[0; t]$ žinutę galime gauti, ir ne vieną! Pažymėkime X_t žinučių, gautų šiuo laikotarpiu skaičių. Tada X_t yra diskretusis atsitiktinis dydis. Kol kas žinome tik vienos jo reikšmės tikimybę:

$$P(X_t = 0) = P(T_1 \geqslant t) = e^{-\lambda t}.$$

Kam lygios kitų šio dydžio reikšmių tikimybės? Atsakymą galime gauti tokiu pat būdu kaip anksčiau. Padalykime laikotarpį $[0; t]$ į mažus $1/n$ ilgio intervalus $I_1, I_2, \ldots, I_N$ ir tarkime, kad kiekviename laiko intervale su tikimybe p_n galime gauti tik vieną žinutę, o žinučių gavimai skirtingais laiko intervalais yra nepriklausomi įvykiai. Tada žinučių skaičius X_t yra (beveik) sėkmių skaičius Bernulio schemoje su sėkmės tikimybe p_n, o bandymų skaičiumi N. Taigi

$$P(X_t = m) \approx C_N^m p_n^m q_n^{N-m}.$$

Tikrąją $P(X_t = m)$ reikšmę gausime perėję prie ribos, kai $n \to \infty$. Tačiau $N \approx t/(1/n) = nt$, o $Np_n \approx p_n nt \to \lambda t$, taigi ribinę reikšmę gausime iš Puasono teoremos:

$$P(X_t = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Taigi $X_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Gavome begalinę Puasono dydžių šeimą, ją vadinsime Puasono procesu.

Nagrinėjome T_1 – pirmosios žinutės gavimo momentą. Tegu dabar $k \geqslant 1$, o T_k – k-osios žinutės gavimo momentas. Akivaizdu, kad

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant T_3 \leqslant \ldots \leqslant T_{k-1} \leqslant T_k.$$

Suraskime tikimybę $P(T_k \geqslant t)$, t. y. tikimybę, kad k-osios žinutės teks laukti ne trumpiau kaip t? Atsakymą gausime labai greitai:

$$\begin{aligned} P(T_k \geqslant t) &= P(X_t < k) = P(X_t = 0) + \cdots + P(X_t = k-1) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Taigi T_k yra atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{T_k}(t) = 1 - P(T_k \geqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} - \cdots - \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Akivaizdu, kad dydis T_k yra absoliučiai tolydusis. Šiek tiek pasidarbavę (būtų naudinga atlikti skaičiavimus bent jau, kai $k = 2$ ar $k = 3$), gautume

$$p_{T_k}(t) = F'_{T_k}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Gama dydžiai

24 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{jei } t < 0, \\ \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{jei } t > 0, \end{cases}$$

čia $\lambda > 0, k \geqslant 1$, X vadinsime gama atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \Gamma(k, \lambda)$.

Taigi T_k yra gama dydis. Jis yra gana sudėtingas. Dydį galime išreikšti paprastesniais.

Pažymėkime $T_{0|1}$ laikotarpio nuo laukimo pradžios iki pirmos žinutės trukmę, $T_{1|2}$ – laikotarpio nuo pirmos iki antros žinutės trukmę ir t. t. Tada

$$T_k = T_{0|1} + T_{1|2} + \cdots + T_{k-1|k}.$$

Žinome, kad $T_{0|1} = T_1$ yra eksponentinis dydis, t. y. $T_{0|1} \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Gavę pirmą žinutę, laukiame antrosios, t. y. viskas prasideda tarsi nuo pradžių. Nesuklysime teigdami, kad $T_{1|2} \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Apskritai $T_{i|i+1} \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Taigi gama dydis T_k yra k eksponentinių dydžių suma!

39 pavyzdys. Pareto dydžiai

Maždaug prieš šimtą metų ekonomistas Vilfredas Pareto[3] nustatė, kad, parinkus tam tikrus skaičius $C > 0$, $\alpha > 0$, gyventojų, kurių metinės pajamos ne mažesnės kaip x, dalį galima gana tiksliai vertinti dydžiu C/x^α. Tikimybių teorijos kalba tai reikštų štai ką: jeigu X yra atsitiktinai parinkto gyventojo pajamas reiškiantis dydis, tai $P(X \geqslant x) \approx \frac{C}{x^\alpha}$, kai $x \geqslant x_0$, čia x_0 tam tikras fiksuotas skaičius. Kad būtų paprasčiau, tarkime, kad $C = 1, x_0 = 1$, ir rašykime tikslias lygybes. Taigi

$$P(X \geqslant x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad F_X(x) = 1 - P(X \geqslant x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}.$$

Akivaizdu, kad dydis turi tankį; kai $x > 1$, $p_X(x) = \alpha/x^{\alpha+1}$.

Pareto atsitiktiniai dydžiai

25 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 1, \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{jei } x \geqslant 1, \end{cases}$$

čia $\alpha > 0$, X vadinsime Pareto atsitiktiniu dydžiu.
Žymėsime $X \sim \mathcal{P}ar(\alpha)$.

O dabar kone pati svarbiausia tolydžiųjų atsitiktinių dydžių šeima.

Jeigu p yra sėkmės tikimybė viename Bernulio schemos bandyme, n – bandymų, o S_n sėkmių skaičius, tai Muavro ir Laplaso teorema teigia, kad su dideliais n teisinga lygybė

$$P(Y_n < u) \approx \Phi(u), \quad Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$$

Šio teiginio esmė tokia: kai n didelis, tai dydis Y_n supanašėja su tolydžiuoju atsitiktiniu dydžiu, kurio pasiskirstymo funkcija yra $\Phi(u)$.

[3]Vilfredo Federico Damaso Pareto, 1848–1923.

Standartinis normalusis dydis

26 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį X, kurio tankis yra*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

vadinsime standartiniu normaliuoju dydžiu, žymėsime $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Standartinio normaliojo dydžio pasiskirstymo funkcija yra $\Phi(u)$, ją jau naudojome tirdami Bernulio schemą.

Tegu X yra standartinis normalusis dydis, o $\sigma > 0$ ir μ – realieji skaičiai. Sudarykime naują atsitiktinį dydį $Y = \sigma X + \mu$. Rasime jo pasiskirstymo funkciją:

$$F_Y(u) = P(\sigma X + \mu < u) = P\Big(X < \frac{u-\mu}{\sigma}\Big) =$$
$$F_X\Big(\frac{u-\mu}{\sigma}\Big) = \int_{-\infty}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x, \quad v = \frac{u-\mu}{\sigma}.$$

Paskutinįjį integralą kintamojo keitimu galime pertvarkyti taip:

$$F_Y(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x.$$

Iš gautos lygybės išplaukia, kad atsitiktinio dydžio Y tankis yra

$$p_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Normalusis dydis

27 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį X, kurio tankis yra*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

vadinsime normaliuoju dydžiu, žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Taigi normalieji atsitiktiniai dydžiai sudaro didelę šeimą. Standartinis normalusis dydis – tik vienas iš šios šeimos atstovų.

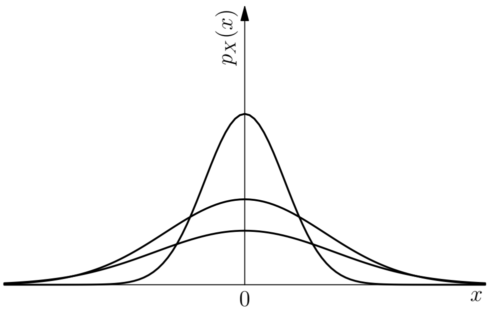
Nustatėme, kad tiesiškai transformuojant dydį $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ gautasis dydis $Y = \sigma X + \mu$ yra normalusis. Nagrinėjome atvejį $\sigma > 0$, tačiau panašiai galima įsitikinti, kad dydis yra normalusis ir tuo atveju, kai $\sigma < 0$. Jei $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, panašiai galime įsitikinti, kad dydis $X = (Y - \mu)/\sigma$ yra standartinis normalusis.

Tankio

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

grafikas yra simetriškas tiesės $x = \mu$ atžvilgiu. Jeigu μ fiksuosime, o σ mažinsime, tankio kreivė darysis statesnė, jeigu σ didinsime – kreivė lėkštės.

Kodėl taip yra, suprasime prisiminę, kaip tankio reikšmė taške x_0 susijusi su atsitiktinio dydžio reiškmių pasitaikymo arti x_0 dažnumu. Jei sąryšyje $Y = \sigma X + \mu$ σ mažinsime, Y vis dažniau įgis reikšmes arti μ, t. y. tankio reikšmės taške $x = \mu$ didės.



Atsitiktinių dydžių, pasiskirsčiusių pagal normaliuosius dėsnius $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$, $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$, $\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ tankių grafikai.

Uždaviniai

1. *Vieno metro ilgio strypas atsitiktinai sulaužomas į dvi dalis. Atsitiktinio dydžio* X *reikšmė – ilgesniosios dalies ilgis. Raskite tikimybę* $P(X < 3/4)$ *ir dydžio pasiskirstymo funkciją* $F_X(x)$ *bei tankį* $p_X(x)$.

2. *Stačiakampio* $ABCD$ *kraštinių ilgiai yra tokie:* $AB = 2, AC = 1$. *Stačiakampyje atsitiktinai parenkamas taškas,* X_1 *– parinkto taško atstumas iki kraštinės* AB, X_2 *– parinkto taško atstumas iki kraštinės* AC. *Raskite atsitiktinių dydžių* $X_1, X_2, Y = X_1 + X_2$ *pasiskirstymo funkcijas ir tankius.*

3. *Lygiašonio stačiojo trikampio* ABC *statinių ilgiai lygūs* a. *Stačiajame trikampyje atsitiktinai parenkamas tašas. Dydžio* X_1 *reikšmė – parinkto taško atstumas iki statinio* AB, *dydžio* X_2 *– reikšmė lygi parinkto taško atstumui iki įžambinės* BC. *Raskite atsitiktinių dydžių* X_1, X_2 *pasiskirstymo funkcijas ir tankius.*

4. *Du draugai susitarė susitikti tarp* 12 *ir* 13 *valandos. Pirmasis atėjęs lauks, kol ateis antrasis. Laukimo laikas – atsitiktinis dydis* X. *Raskite tikimybę* $P(X < 1/2)$. *Raskite atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją* $F_X(x)$ *ir tankį* $p_X(x)$.

5. *Muilo burbulo „gyvavimo“ trukmė – atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį. Atliktas bandymas: išpūsta* 1 000 *muilo burbulų ir nustatyta, kiek iš jų ištvėrė nesprogę* 1 *minutę. Tokių buvo* 450. *Kokia tikimybė, kad išpūstas muilo burbulas* *ištvers nesprogęs dvi minutes? Kiek reikia vienu metu išpūsti muilo burbulų, kad po trijų minučių su tikimybe* 0,9 *dar būtų likę ne mažiau kaip* 300 *nesusprogusių? Pasinaudokite Muavro ir Laplaso teorema.*

6. *Atsitiktinis dydis* X *yra pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį* $X \sim \mathcal{E}(2)$. *Raskite atsitiktinio dydžio* $Y = X^2$ *pasiskirstymo funkciją ir tankį.*

7. *Atsitiktinis dydis* X *yra pasiskirstęs pagal Pareto dėsnį* $X \sim \mathcal{P}ar(3)$. *Pagal kokius dėsnius pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai* $Y_1 = \sqrt{X}, Y_2 = X^2, Y_3 = X^3$*?*

8. *Dydis* X *pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį,* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. *Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis* $Y = 3 - 2X$*?*

9. *Dydis* X *pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį,* $X \sim \mathcal{N}(-1,2)$. *Pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis* $Y = 3 - 2X$*?*

Atsakymai

1. $P(X < 3/4) = 1/2; F_X(x) = 0,$ *kai* $x \leqslant 1/2; F_X(x) = 2x - 1,$ *kai* $1/2 \leqslant x \leq 1;$ $F_X(x) = 1,$ *kai* $x > 1;$ $p_X(x) = 0,$ *kai* $x \notin [1/2;1];$ $p_X(x) = 2,$ *kai* $x \in [1/2;1].$

2. $p_{X_1}(x) = 0,$ *kai* $x \notin [0;1]; p_{X_1} = 1,$ *kai* $x \in [0;1]; p_{X_2}(x) = 0,$ *kai* $x \notin [0;2]; p_{X_2}(x) = 1/2,$ *kai* $x \in [0;2];$ $p_Y(x) = 0,$ *kai* $x \notin [0;3];$ $p_Y(x) = x/2,$ *kai* $x \in [0;1];$ $p_Y(x) = 1/2,$ *kai* $x \in [1;2];$ $p_Y(x) = 3/2 - x/2,$ *kai* $x \in [2;3].$

3. $p_{X_1}(x) = 0,$ *kai* $x \notin [0;a];$ $p_{X_1}(x) = 2/a - 2x/a^2,$ *kai* $x \in [0;a];$ $p_{X_2}(x) = 0,$ *kai* $x \notin [0; a/\sqrt{2}];$ $p_{X_2}(x) = 2\sqrt{2}/a - 4x/a^2,$ *kai* $x \in [0; a/\sqrt{2}].$

4. $P(X < 1/2) = 3/4; F_X(x) = 0,$ *kai* $x \leqslant 0;$ $F_X(x) = 2x - x^2,$ *kai* $0 < x \leqslant 1; F_X(x) = 1,$ *kai* $x > 1.$

5. $0{,}45^2 = 0{,}2025$; *išpūsti reikia daugiau kaip* 3 293 *burbulų. Tikėtina, kad po* 3 *minučių nesprogusių bus daugiau kaip* 300. *Tačiau garantuoti, kad taip tikrai bus, negalima.*

6. $F_Y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}, p_Y(x) = 1/\sqrt{x},$ *kai* $x > 0.$

7. $Y_1 \sim \mathcal{P}ar(6), Y_2 \sim \mathcal{P}ar(3/2), Y_2 \sim \mathcal{P}ar(1).$

8. $Y \sim \mathcal{N}(3;4).$ **9.** $Y \sim \mathcal{N}(5;8).$

3.4 Kvantiliai ir kritinės reikšmės

Šitaip įmantriai pavadinome lygčių $F_X(x) = \alpha$ *sprendinius. Teikti vardus – tai nurodyti ryšius. Vėliau sužinosime, kaip šiais sprendiniais naudojamasi priimant tam tikrus sprendimus.*

Įsivaizduokime eksperimentą, kurio tikslas – nustatyti tam tikros rūšies siūlų stiprumą. Pakabiname ant siūlo svorį ir palengva ilginame siūlą. Tegu X yra siūlo ilgis tuo metu, kai jis, neišlaikęs svorio, nutrūko. Dydis X yra atsitiktinis.

Samprotaudami panašiai kaip pavyzdyje apie į kambarį įskridusią bitę, prieitume prie išvados, kad X turėtų būti eksponentinis dydis, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, čia $\lambda > 0$ yra X pasiskirstymą „valdantis“ parametras. Taigi

$$P(X \geqslant x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad P(X < x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Dabar įsivaizduokime, kad bandome didelį tokių siūlų skaičių. Pažymėkime siūlų skaičių n. Galime manyti, kad ruošiamės n kartų fiksuoti atsitiktinio dydžio X reikšmę. Jeigu m siūlų nutrūktų būdami trumpesni nei u, galėtume padaryti išvadą, kad $P(X < u) \approx m/n$.

Panagrinėkime tokį klausimą: jeigu atmestume, pavyzdžiui, dešimtadalį pačių ilgiausių siūlų, kokio didžiausio ilgio siūlų rastume tarp likusiųjų? Pažymėkime šį maksimalų ilgį u. Kadangi devyni dešimtadaliai siūlų nutrūks būdami trumpesni už u, tai

$$P(X < u) = 0{,}9, \quad \text{arba} \quad F_X(u) = 0{,}9.$$

Pasiskirstymo funkcijos išraišką žinome, tad šią lygtį išspręsti nesunku:

$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda u} = 0{,}9, \quad u = \frac{\ln 10}{\lambda}.$$

Jei nubraižytume pasiskirstymo funkcijos $F_X(u)$ grafiką, šis sprendinys būtų lygus pasiskirstymo funkcijos ir tiesės $y = 0{,}9$ susikirtimo taško absicisei. Gautąją reikšmę galima interpretuoti šitaip: tai tas kritinis ilgis, kurį sėkmingai „pasiekia“ tik dešimtadalis bandomų siūlų.

Spręsti lygtį $F_X(x) = \alpha$, kai $0 < \alpha < 1$, tenka nagrinėjant įvairius tikimybių teorijos ir statistikos uždavinius. Jeigu pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ yra tolydi ir monotoniškai didėjanti, sprendinys visada egzistuoja ir yra vienintelis. Jeigu funkcija nėra griežtai monotoniškai didėjanti, tačiau tolydi, su kai kuriomis α reikšmėmis sprendinių gali būti be galo daug. Tačiau tada visada galima imti mažiausiąjį.

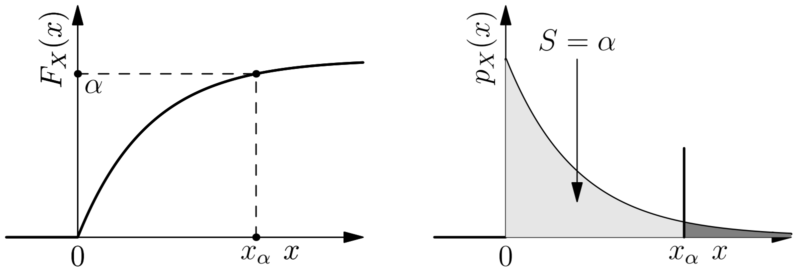
Kvantiliai ir kritinės reikšmės

28 apibrėžimas. *Tegu atsitiktinis dydis X yra tolydusis, $0 < \alpha < 1$. Dydžio X α lygio kvantiliu vadinsime mažiausiąjį lygties*

$$F_X(x) = \alpha$$

sprendinį; jį žymėsime u_α. Dydį u_α taip pat vadinsime $1 - \alpha$ lygio kritine reikšme.

Jeigu dydis X turi tankį $p(x)$, o u_α yra dydžio α lygio kvantilis, tai plotas po tankio grafiku į kairę nuo tiesės $x = u_\alpha$ lygus α, o į dešinę – $1 - \alpha$.



Atsitiktinio dydžio X α lygio kvantilis yra lygties $F_X(x) = \alpha$ sprendinys

Uždaviniai

1. *Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[1; 4]$. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}8$ lygio kvantilį.*

2. *Stačiakampyje, kurio matmenys yra $4\text{cm} \times 6\text{cm}$ atsitiktinai parenkamas taškas. Dydžio X reikšmė – parinkto taško atstumas iki ilgesnės pagrindo kraštinės. Raskite šio dydžio $\alpha = 0{,}9$ lygio kvantilį.*

3. *Raskite eksponentinio dydžio $X \sim \mathcal{E}(3)$ $0{,}5$ lygio kvantilį ir $0{,}2$ lygio kritinę reikšmę.*

4. *Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Jo $0{,}5$ lygio kvantilis lygus 3. Raskite λ reikšmę.*

5. *Raskite Pareto dydžio $X \sim \mathcal{P}ar(3)$ $0{,}5$ lygio kvantilį ir $0{,}2$ lygio kritinę reikšmę.*

6. *Atsitiktinis dydis X yra standartinis normalusis, $F_X(0{,}5244) = \Phi(0{,}5244) = 0{,}7$. Kokia turi būti a reikšmė, kad atsitiktinio dydžio $Y = 2X + a$ $\alpha = 0{,}7$ lygio kvantilis būtų lygus 3?*

Atsakymai

1. $u_\alpha = 3{,}4$. **2.** $u_\alpha = 3{,}6$. **3.** $\approx 0{,}231$ *ir* $\approx 0{,}536$. **4.** $\approx 0{,}231$. **5.** $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}266$; $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$. **6.** $a = 1{,}9512$.

3.5 Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Nurodyti nepriklausomų atsitiktinių dydžių pavyzdžių tikrovėje nesunku: sniego dangos storis sausio 30 dieną ir jūsų piniginės storis liepos 25 dieną tikriausiai yra nepriklausomi dydžiai. Tačiau nagrinėti tokias dydžių poras nelabai prasminga. Kompanijos pelno pokytis dėl žaliavų kainos svyravimų ir pokytis dėl efektyvesnės reklamos taip pat nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Jų sumą ne tik prasminga, bet ir būtina nagrinėti.

Iš patirties visi žinome, kokie dydžiai yra priklausomi, kokie nepriklausomi. Ekonomistai, pavyzdžiui, prognozuoja, kad, padidėjus naftos kainoms, pakils ir vartojimo prekių kainos. Tai priklausomi dydžiai. Kiekvienas suvokiame, kad per vasarą obels subrandintų obuolių kiekis nepriklauso nuo naujametiniam fejerverkui išleistų pinigų sumos. Tai – nepriklausomi dydžiai.

Tačiau kaip gi matematiškai apibrėžti nepriklausomus atsitiktinius dydžius? Prisiminkime nepriklausomų įvykių apibrėžimą. Įvykiai A, B yra nepriklausomi, jei

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jeigu X, Y yra du atsitiktiniai dydžiai, su kiekvienu iš jų galime susieti daug įvykių. Pavyzdžiui, galime nagrinėti su atsitiktiniu dydžiu X susijusius įvykius

$$\{X < 2\}, \quad \{X > 2\}, \quad \{X \in [2; 3]\},$$

ir t. t. Analogiškus įvykius galime susieti ir su dydžiu Y. Jeigu kiekvienas įvykis, susijęs su dydžiu X, nepriklauso nuo įvykio, susijusio su dydžiu Y, tai, matyt, ir dydžius derėtų vadinti nepriklausomais. Tačiau tų įvykių yra labai daug ir įvairių. Kad dydžiai būtų nepriklausomi, pakanka, kad bet kuris įvykis $\{X < x\}$ nepriklausytų nuo bet kurio įvykio $\{Y < y\}$.

Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

29 apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius X, Y vadinsime nepriklausomais, jeigu su bet kokiais skaičiais x, y teisinga lygybė*

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y).$$

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių apibrėžimo sąlygą galime suformuluoti taip: jei $B_1 = (-\infty; x), B_2 = (-\infty; y)$, tai

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2). \qquad (3.1)$$

Galima įrodyti, kad (3.1) lygybė teisinga ne tik su intervalais, bet su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2. Taigi atsitiktiniai dydžiai X, Y yra nepriklausomi tik tada, kai su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2 įvykiai $\{\omega : X(\omega) \in B_1\}$ ir $\{\omega : Y(\omega) \in B_2\}$ yra nepriklausomi. Apibrėžimą paprasta apibendrinti, kai atsitiktinių dydžių daugiau nei du.

30 apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vadinsime nepriklausomais, jeigu su bet kokiais skaičiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teisinga lygybė*

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1)P(X_2 < x_2)\cdots P(X_n < x_n).$$

Jeigu atsitiktinių dydžių sistema begalinė, juos vadinsime nepriklausomais, jeigu bet kuris baigtinis šios sistemos dydžių rinkinys sudaro nepriklausomų dydžių seką.

Šie apibrėžimai tinka visų rūšių atsitiktiniams dydžiams. Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių nepriklausomumą galima tikrinti naudojantis paprastesne sąlyga.

26 teorema. *Jeigu X, Y yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai, jie yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai su visomis reikšmėmis x, y*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

40 pavyzdys. Metami du simetriški lošimo kauliukai, X_1 – akučių skaičius, atvirtęs ant pirmojo, X_2 – ant antrojo kauliuko. Ir be jokių tikrinimų galime daryti išvadą, kad dydžiai X_1, X_2 yra nepriklausomi. Tegu $X = X_1 + X_2, Y = X_1 - X_2$. Ar dydžiai X, Y priklausomi?

Kad įrodytume, jog dydžiai priklausomi, pakanka rasti bent vieną skaičių porą x, y, su kuria lygybė $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ yra neteisinga. Imkime, pavyzdžiui, $x = 12, y = 0$. Gausime

$$P(X = 12) = 1/36, \quad P(Y = 0) = 1/6, \quad P(X = x, Y = y) = 1/36.$$

Taigi $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y)$, ir dydžiai yra priklausomi.

Jeigu tektų įrodinėti, kad du diskretieji dydžiai yra nepriklausomi, tai darbo būtų gerokai daugiau – reikėtų įrodyti, kad su visomis x, y reikšmėmis apibrėžimo lygybės yra teisingos.

Jei X yra atsitiktinis dydis, tai ir $X^2, X^3, \sin(X), |X|$ yra atsitiktiniai dydžiai. Apskritai su bet kokia Borelio funkcija f dydis $f(X)$ irgi atsitiktinis. Pritaikę Borelio funkcijas dviem nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, vėl gausime nepriklausomų dydžių porą.

27 teorema. *Jei X, Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o f, g – bet kokios Borelio funkcijos, tai dydžiai $X_1 = f(X), Y_1 = g(Y)$ taip pat yra nepriklausomi.*

41 pavyzdys. Balti ir juodi rutuliai

Urnoje yra du balti ir du juodi rutuliai. Balti rutuliai pažymėti skaičiais $0, 1$. Tokiais pat skaičiais pažymėti juodieji rutuliai. Iš eilės su grąžinimu traukiami du rutuliai. Pažymėkime X – baltų rutulių skaičių, o Y – skaičių, užrašytų ant ištrauktų rutulių sumą. Ar dydžiai X ir Y yra nepriklausomi?

Kiek pasvarstę, tikriausiai pamanysime, kad tai tiesa. Tačiau tai reikia matematiškai įrodyti, t. y. reikia įsitikinti, kad su visomis reikšmėmis x, y teisingos lygybės

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Visas tikimybes $P(X = x, Y = y)$ surašysime į lentelę. Jas skaičiuoti galime taip. Pažymėkime baltus rutulius B_0, B_1; čia B_i žymi baltą rutulį, ant kurio užrašytas skaičius i. Juodus rutulius pažymėkime J_0, J_1. Traukiame du rutulius su grąžinimu, taigi iš viso yra 16 baigčių. Išrašykime įvykio $\{X = 1, Y = 1\}$ palankias baigtis:

$$B_0J_1,\ B_1J_0,\ J_1B_0,\ J_0B_1 \text{ taigi } P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{16}.$$

Panašiai apskaičiuosime ir kitas tikimybes. Surašę tikimybes į lentelės langelius, susumuokime skaičius, surašytus eilutėse ir stulpeliuose:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	
$Y = 0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$Y = 1$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{2}$
$Y = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Ką reiškia, pavyzdžiui, skaičius, kurį gavome susumavę pirmo stulpelio skaičius? Šis skaičius yra tikimybių suma:

$$P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = P(X = 0).$$

Taigi paskutinėje eilutėje surašytos atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybės. O paskutiniame stulpelyje – atitinkamų dydžio Y reikšmių tikimybės. Tikrinant, ar dydžiai yra nepriklausomi, reikia patikrinti, ar kiekviename lentelės langelyje įrašyta reikšmė lygi šio langelio eilutės paskutinio ir šio langelio stulpelio apatinio skaičių sandaugai. Pavyzdžiui,

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Mūsų atveju matome, kad visiems langeliams lygybės yra teisingos ir dydžiai nepriklausomi.

Dažnai tenka sumuoti nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Pavyzdžiui, norėdami tiksliau išmatuoti kokį nors dydį, kartojame matavimus, o jų rezultatus sumuojame. Šitaip gauname naują atsitiktinį dydį.

42 pavyzdys. Lošimas su dviem kauliukais

Tarkime, simetriško lošimo kauliuko sienelės sužymėtos skaičiais $0, 0, 1, 1, 1, 2$, o kito kauliuko – skaičiais $0, 1, 1, 1, 2, 2$. Metami abu kauliukai iš karto, laimėjimas X lygus atvirtusių akučių skaičių sumai. Taigi X – atsitiktinis dydis, kuris gali įgyti reikšmes $0, 1, 2, 3, 4$. Su kokiomis tikimybėmis?

Pažymėkime X_1 akučių skaičių, atvirtusį ant pirmo kauliuko, X_2 – ant antrojo. Tada $X = X_1+X_2$, o dydžiai X_1, X_2 yra nepriklausomi. Naudodamiesi šia savybe gausime:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36},\\
P(X=1) &= P(X_1=0, X_2=1) + P(X_1=1, X_2=0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{36},\\
P(X=2) &= P(X_1=0, X_2=2) + P(X_1=1, X_2=1) + P(X_1=0, X_2=2)\\
&= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{14}{36},\\
P(X=3) &= P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36},\\
P(X=4) &= P(X_1=2, X_2=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{36}.
\end{aligned}
$$

Toks nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos tikimybių skaičiavimo būdas tinka visiems diskretiesiems dydžiams.

Nepriklausomų diskrečiųjų dydžių suma

28 teorema. *Tegu X, Y yra nepriklausomi diskretieji atsitiktiniai dydžiai, $Z = X + Y$. Tada kiekvienai dydžio Z reikšmei z*

$$P(Z = z) = \sum_{x+y=z} P(X = x)P(Y = y),$$

čia sumuojama pagal visas reikšmių poras x, y, kurių suma lygi z.

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos tikimybių teorijos modeliuose pasitaiko labai dažnai. Tokias sumas naudojome jau ne kartą. Pavyzdžiui, Bernulio atsitiktinį dydį $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ reiškėme atsitiktinių dydžių X_i suma:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

čia $X_i = 1$, jei i-ajame bandyme pasirodė sėkmė, ir $X_i = 0$, jei nesėkmė. Šie dydžiai susiję su nepriklausomais bandymais, taigi ir patys yra nepriklausomi.

Nagrinėdami Puasono procesą atsitiktinį dydį T_k, kurio reikšmė lygi laikotarpio nuo stebėjimo pradžios iki k-ojo įvykio (žinutės, meteoro kritimo ir pan.) trukmei, išreiškėme eksponentinių dydžių suma:

$$T_k = T_{0|1} + T_{1|2} + \cdots + T_{k-1|k},$$

čia $T_{i|i+1}$ yra laikotarpio tarp i-ojo ir $i+1$-ojo įvykių pasirodymų trukmė. Dydžiai $T_{i|i+1}$ yra vienodai pasiskirstę ir nepriklausomi.

Kartais naujus atsitiktinius dydžius gauname atlikdami ir kitus veiksmus.

43 pavyzdys. Iki pirmos sėkmės

Tarkime, du krepšininkai mėto į krepšį tol, kol pataiko. Tikimybė, kad pirmo krepšininko metimas bus taiklus, yra p_1, antrojo – p_2. Tada abiejų krepšininkų metimų skaičiai yra nepriklausomi geometriniai atsitiktiniai dydžiai $X_1 \sim \mathcal{G}(p_1), X_2 \sim \mathcal{G}(p_2)$. Tarkime, jie mėto į krepšį vienu metu, o mums rūpi, kuriuo bandymu bent vienas kamuolys įkris į krepšį. To bandymo numeris – atsitiktinis dydis $X = \min(X_1, X_2)$. Koks tai dydis?

Metimų porą galime suvokti kaip bandymą su dviem baigtimis: nesėkmė, jeigu abu metimai netaiklūs; sėkmė, jei taiklus bent vienas. Tada $q = (1-p_1)(1-p_2)$ nesėkmės tikimybė šiame bandyme, o $p = 1-q$ – sėkmės. Taigi X – vėl geometrinis atsitiktinis dydis: $X \sim \mathcal{G}(p)$.

44 pavyzdys. Laukimo laikas

Klientai aptarnaujami prie dviejų langelių. Aptarnavimo laikas – eksponentiniai dydžiai $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ ir $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Šie dydžiai nepriklausomi. Kai atvykote, abu langeliai buvo užimti. Kiek laiko teks laukti, kol kuris nors atsilaisvins? Akivaizdu, kad laukimo laikas X yra atsitiktinis dydis, $X = \min(X_1, X_2)$. Suraskime tikimybę $P(X > t)$. Kad įvykis $\{X > t\}$ įvyktų, turi įvykti abu įvykiai $\{X_1 > t\}, \{X_2 > t\}$. Taigi

$$P(X > t) = P(X_1 > t, X_2 > t) = P(X_1 > t)\cdot P(X_2 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

Todėl laukimo laikas X yra eksponentinis dydis, $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Uždaviniai

1. *Urnoje yra du balti ir du juodi rutuliai. Balti rutuliai pažymėti skaičiais* $0, 1$. *Tokiais pat skaičiais pažymėti juodi rutuliai. Iš eilės be grąžinimo traukiami du rutuliai. Įrodykite, kad baltų rutulių skaičius X ir skaičių, užrašytų ant ištrauktųjų rutulių, suma Y yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

2. *Urnoje yra du balti ir du juodi rutuliai. Balti rutuliai pažymėti skaičiais* $0, 1$. *Abu juodi rutuliai pažymėti nuliu. Iš eilės su grąžinimu traukiami du rutuliai. Nustatykite,* *baltų rutulių skaičius X ir skaičių, užrašytų ant ištrauktų rutulių, suma Y yra priklausomi ar nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

3. *Simetriška moneta metama tris kartus. Apibrėžkime du atsitiktinius dydžius X, Y. Jeigu per pirmają ar antrą metimuos moneta atvirto ta pačia puse, dydžio X reikšmė lygi vienetui, jeigu atvirto skirtingomis pusėmis – nuliui. Jeigu per pirmą ir trečią metimuose moneta atvirto ta pačia puse, dydžio Y reikšmė lygi vienetui, priešingu atveju – nuliui. Įsitikinkite, kad dydžiai X, Y yra nepriklausomi. Ar jie būtų nepriklausomi, jeigu moneta būtų nesimetriška, pavyzdžiui, tikimybė, kad moneta atvirstų herbu su tikimybe būtų $1/3$?*

4. *Tikimybės, kad mestas lošimo kauliukas atvirs sienelėmis, pažymėtomis* $1, 2, 3, 4, 5$ *akutėmis, yra vienodos. Tikimybė, kad šis kauliukas atvirs sienele, pažymėta* 6 *akutėmis, yra* 10 % *didesnė. Kitas lošimo kauliukas atvirsta sienelėmis, pažymėtomis* $1, 2, 3, 4, 5$ *irgi su vienodomis tikimybėmis, tačiau tikimybė, kad jis atvirs sienele, pažymėta* 6*, yra* 10 % *mažesnė. Kokia tikimybė, kad metus abu kauliukus iš karto, atvirtusių akučių suma bus lygi* 10?

5. *Rugpjūčio naktį filmuojame dangų dviem į skirtingas puses nukreiptomis kameromis, tikėdamiesi užfiksuoti krintančius meteorus. Meteorų, patenkančių į filmavimo kamerų akiratį per pusvalandį, skaičiai – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1 \sim \mathcal{P}(3), X_2 \sim \mathcal{P}(3)$. Kokia tikimybė, kad per pusvalandį kameros užfiksuos nemažiau kaip penkis krintančius meteorus?*

Atsakymai

1. *Pavyzdžiui,* $P(X = 0) = (1/2)\cdot(1/3) = 1/6, P(Y = 2) = (1/2)\cdot(1/3) = 1/6, P(X = 0, Y = 2) \neq P(X = 0)P(Y = 2)$.

2. *Priklausomi. Pavyzdžiui,* $P(X = 0) = 1/4, P(Y = 0) = 9/16; P(X = 0, Y = 0) = 1/4$, $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$.

3. *Dydžiai būtų priklausomi. Pavyzdžiui, tada būtų*
$P(X = 1) = P(Y = 1) = (1/3)^2 + (2/3)^2 = 5/9; P(X = 1, Y = 1) = (1/3)^3 + (2/3)^3 = 1/9$; *t. y.* $P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$.

4. $300/3599 \approx 0{,}0834$. **5.** $\approx 0{,}715$.

3.6 Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai

Tarkime, dietos besilaikantis erelis žuvininkas per dieną suėda, jeigu pagauna, tik vieną žuvį. Dienų, kai ereliui žvejyba pavyksta, pasitaiko dvigubai daugiau negu dienų, kai ereliui tenka badauti. Kiek žuvų vidutiniškai tenka erelio vienos dienos pietums?

Panagrinėkime tokį lošimą. Sumokėjęs vieno euro mokestį, lošėjas traukia du rutulius iš urnos, kurioje yra du balti ir trys juodi rutuliai. Lošėjui išmokama tiek eurų, kiek baltų rutulių jis ištraukė. Taigi jeigu jam pavyko ištraukti tik vieną baltą rutulį, jis atgauna įmokėtą eurą, jeigu du – gauna du. Kam naudingas toks lošimas: lošėjams ar lošimo organizatoriams?

Įsivaizduokime, kad tokioje loterijoje dalyvauja didelis lošėjų skaičius n. Vadinasi, jie organizatoriams užmoka n eurų. Apskaičiuokime, kiek vidutiniškai eurų atgauna vienas lošėjas.

Tegu X yra baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų, kartu ir lošėjo laimėjimas. Tada

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0{,}3,\ P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0{,}6,\ P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0{,}1.$$

Taigi maždaug $P(X=0)\cdot n=0{,}3\cdot n$ lošėjų nieko nelaimės, $P(X=1)\cdot n=0{,}6\cdot n$ lošėjų susigrąžins savo įmoką ir $P(X=2)\cdot n=0{,}1\cdot n$ lošėjų gaus po 2 eurus. Jeigu S_n yra lošėjams išmokėta suma, tai S_n/n bus išlošio vidurkis:

$$S_n\approx 0\cdot P(X=0)\cdot n+1\cdot P(X=1)\cdot n+2\cdot P(X=2)\cdot n,$$
$$\frac{S_n}{n}\approx 0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=0{,}8.$$

Matome, kad, sulaukę $n=100$, lošėjų organizatoriai gali tikėtis maždaug 20 eurų pelno. Reiškinys, kurį panaudojome skaičiuodami S_n/n, nusako atsitiktinio dydžio X vidutinę reikšmę, t. y. vidurkį.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

31 apibrėžimas. *Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X, įgyjančio reikšmes x_i, vidurkiu vadinsime skaičių*

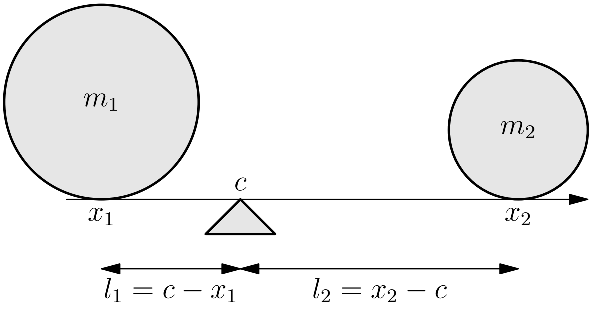
$$\mathbf{E}[X]=\sum_i x_iP(X=x_i).$$

Norėdami, kad apibrėžimas būtų trumpas, nepaminėjome vienos aplinkybės. Kai diskretusis dydis įgyja be galo daug reikšmių, tai begalinio dėmenų kiekio suma gali būti neapibrėžta, todėl atsitiktinis dydis gali neturėti vidurkio. Atsitiktinis dydis turi vidurkį tada ir tik tada, kai sumos

$$\sum_i |x_i|P(X=x_i)$$

reikšmė yra baigtinė. Dydžiams, kuriuos nagrinėsime, ši sąlyga bus visada patenkinta.

Galime atsitiktinio dydžio vidurkį suvokti pasinaudoję tam tikrais geometriniais-mechaniniais samprotavimais. Prisiminkime įžymiąją Archimedo sverto taisyklę: jeigu ant strypo galų padėti m_1 ir m_2 svorio kūnai, kad svertas būtų pusiausvyroje, reikia jį atremti taške C, kuriame būtų patenkinta lygybė $l_1m_1 = l_2m_2$ (žr. brėžinį).



Taškas c yra sistemos, sudarytos iš dviejų kūnų, svorio centras. O dabar tarkime, kad šie kūnai padėti ant skaičių tiesės taškų, kurių koordinatės yra x_1, x_2. Tegu c yra svorio centro koordinatė.

Tada

$$m_1(c - x_1) = m_2(x_2 - c), \quad (x_1 - c)m_1 + (x_2 - c)m_2 = 0, \quad c = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Jeigu skaičių tiesės taškuose su koordinatėmis $x_1, x_2, \ldots$ padėti kūnai, kurių masė lygi $m_1, m_2, \ldots$, tokios sistemos svorio centro koordinatės ieškotume iš lygybės

$$(x_1 - c)m_1 + (x_2 - c)m_2 + \cdots = 0. \tag{3.2}$$

Tegu dabar diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \ldots$ su tikimybėmis $p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \ldots$ Įsivaizduokime, kad tiesės taškuose su koordinatėmis $x_1, x_2, \ldots$ padėjome kūnus, kurių masė lygi $p_1, p_2, \ldots$. Naudodamiesi (3.2) ieškokime šios sistemos svorio centro. Ir gausime vidurkį: $c = \mathbf{E}[X]$!

Prieš pradėdami skaičiuoti svarbių atsitiktinių dydžių vidurkius, panagrinėkime vidurkio savybes.

29 teorema. *Jeigu X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes x_i, o $Y = f(X)$ kitas atsitiktinis dydis, tai jo vidurkis (jeigu tik jis egzistuoja) lygus*

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_i f(x_i)P(X = x_i). \tag{3.3}$$

Iš tikrųjų, dydis Y įgyja reikšmes $y_i = f(x_i)$, o šių reikšmių tikimybės $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Tiesa, yra nedidelis tokio samprotavimo netikslumas: juk skirtingoms reikšmėms x_i, x_j dydžio Y reikšmės gali sutapti: $f(x_i) = f(x_j)$. Tačiau vidurkio skaičiavimo formulė teisinga ir tokiais atvejais.

Jeigu $f(x) = ax$, tai $Y = aX$. Pritaikę teiginį šiam atvejui, gauname paprastą, tačiau dažnai taikomą konstantos iškėlimo taisyklę.

Konstantos iškėlimo taisyklė

30 teorema. *Jei X yra diskretusis dydis, turintis vidurkį, o a bet koks skaičius, tai dydis $Y = aX$ irgi turi vidurkį:*

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[aX] = a \cdot \mathbf{E}[X].$$

Suformuluosime labai svarbią vidurkio adityvumo savybę.

Vidurkio adityvumo savybė

31 teorema. *Jeigu X ir Y yra diskretieji dydžiai, turintys vidurkius, jų suma $X + Y$ taip pat yra diskretusis dydis turintis vidurkį:*

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

Įrodymas. Paprastumo dėlei tarkime, kad atsitiktinis dydis X įgyja tik dvi reikšmes x_1, x_2, o dydis Y taip pat dvi – y_1, y_2. Tada dydis Z įgyja keturias reikšmes, jas pažymėkime taip:

$$z_{11} = x_1 + y_1, z_{12} = x_1 + y_2, z_{21} = x_2 + y_1, z_{22} = x_2 + y_2.$$

Tiesa, šios keturios reikšmės nebūtinai yra skirtingos.

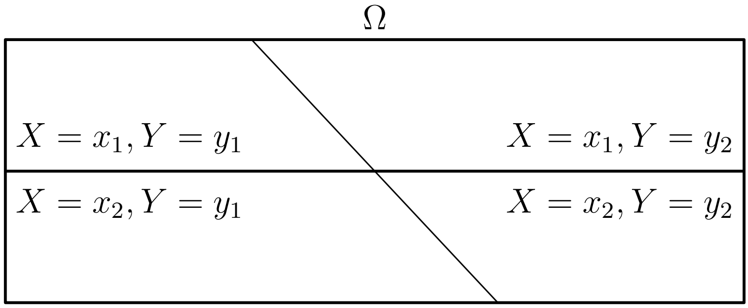
Tada

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[Z] = (x_1 + y_1)P(X = x_1, Y = y_1) + (x_1 + y_2)P(X = x_1, Y = y_2) + \\ &(x_2 + y_1)P(X = x_2, Y = y_1) + (x_2 + y_2)P(X = x_2, Y = y_2).\end{aligned}$$

Sumos dėmenis sutvarkykime taip:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z] \quad = \quad & x_1(P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_1, Y = y_2)) + \\ & x_2(P(X = x_2, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_2)) + \\ & y_1(P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_1)) + \\ & y_2(P(X = x_1, Y = y_2) + P(X = x_2, Y = y_2)).\end{aligned}$$

Įvykiai $\{X = x_i, Y = y_j\}$ yra nesutaikomi. Pavaizduokime juos brėžiniu.



Pažiūrėję į brėžinį įsitikinsime, kad

$$\begin{aligned}
P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_1, Y = y_2) &= P(X = x_1),\\
P(X = x_2, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_2) &= P(X = x_2),\\
P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_1) &= P(Y = y_1),\\
P(X = x_1, Y = y_2) + P(X = x_2, Y = y_2) &= P(Y = y_2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z] &= x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2)\\
&= \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].
\end{aligned}$$

Įrodymo idėjos bendruoju atveju yra tos pačios. Šį teiginį galime apibendrinti.

Vidurkio adityvumo savybė

32 teorema. *Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, jų suma taip pat yra diskretusis atsitiktinis dydis, turintis vidurkį:*

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \cdots + \mathbf{E}[X_n].$$

Jeigu X, Y yra du diskretieji atsitiktiniai dydžiai turintys vidurkius, ir pirmasis visada įgyja mažesnes reikšmes, t. y. $X \leqslant Y$, tai $Z = Y - X$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis tik neneigiamas reikšmes, $Z \geqslant 0$. Tada ir jo vidurkis neneigiamas, $\mathbf{E}[Z] \geqslant 0$. Tačiau $Y = X + Z$, todėl

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X + Z] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Z] \geqslant \mathbf{E}[X].$$

Įrodėme kone akivaizdžią vidurkio savybę: jeigu vienas dydis visada įgyja ne didesnes reikšmes negu kitas, tai ir jo vidurkis yra ne didesnis. Pasinaudoję šia savybe galime įrodyti tokį teiginį.

33 teorema. *Tegu f ir g yra dvi funkcijos, $f(x) \leqslant g(x)$, o X – diskretusis atsitiktinis dydis, ir atsitiktinių dydžių $f(X), g(X)$ vidurkiai egzistuoja. Tada*

$$\mathbf{E}[f(X)] \leqslant \mathbf{E}[g(X)].$$

Suformuluosime dar vieną svarbią savybę, kurią turi tik nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Nepriklausomų dydžių sandaugos vidurkis

34 teorema. *Jeigu X ir Y yra nepriklausomi diskretieji atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, tai jų sandauga $X \cdot Y$ taip pat yra diskretusis dydis, turintis vidurkį:*

$$\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

Įrodymas. Vėl tarkime, kad atsitiktinis dydis X įgyja tik dvi reikšmes x_1, x_2, o dydis Y irgi dvi – y_1, y_2. Tada dydis Z įgis keturias reikšmes: $z_{11} = x_1 \cdot y_1, z_{12} = x_1 \cdot y_2, z_{21} = x_2 \cdot y_1, z_{22} = x_2 \cdot y_2$. Gauname, kad

$$\mathbf{E}[Z] = (x_1 \cdot y_1)P(X = x_1, Y = y_1) + (x_1 \cdot y_2)P(X = x_1, Y = y_2) + \\ (x_2 \cdot y_1)P(X = x_2, Y = y_1) + (x_2 \cdot y_2)P(X = x_2, Y = y_2).$$

Pasinaudokime tuo, kad dydžiai yra nepriklausomi, t. y.

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Tada

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z] = \quad & x_1 P(X = x_1)(y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2)) + \\ & x_2 P(X = x_2)(y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2)) = \\ & x_1(P(X = x_1)\mathbf{E}[Y] + x_2(P(X = x_2)\mathbf{E}[Y].\end{aligned}$$

Taigi

$$\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

Uždaviniai

1. *Tegu X – akučių skaičius, atvirtęs ant simetriško lošimo kauliuko. Raskite* $\mathbf{E}[X], \mathbf{E}[|X - 3|]$.

2. *Lošimo kauliukas nesimetriškas: sienelių su akučių skaičiais* $1, 2, 3, 4, 5$ *tikimybės vienodos, o sienelės su šešiomis akutėmis tikimybė* 20 % *didesnė už kitas. Atsitiktinio dydžio* X *reikšmė lygi atvirtusių akučių skaičiui. Raskite* $\mathbf{E}[X]$.

3. *Loterijai parengta* 100 *bilietų, iš jų –* 15 *bilietų su* 5 *eurų laimėjimu ir* 10 *– su* 10 *eurų laimėjimu. Jeigu lošėjas perka vieną bilietą, koks jo išlošio vidurkis? Koks būtų išlošio vidurkis, jeigu lošėjas pirktų* 2 *bilietus? Koks būtų lošėjo išlošio vidurkis, jeigu jis įsigytų* $m, 1 \leqslant m \leqslant 100$, *bilietų?*

4. *Loterija tokia pati kaip ankstesniame uždavinyje:* 100 *bilietų,* 15 *laimi po* 5 *eurų ir* 10 *laimi po* 10 *eurų. Tačiau lošimo taisyklės pasikeitė: jeigu lošėjas nusipirko bilietą be laimėjimo, jam nemokamai leidžiama pasirinkti dar vieną bilietą iš likusiųjų. Koks dabar vieną bilietą įsigijusio lošėjo išlošio vidurkis?*

5. *Urnoje* 3 *balti ir* 4 *juodi rutuliai. Lošėjai* A, B, C *vienas po kito traukia po rutulį nesugrąžindami jo atgal. Tačiau laimėjimas –* 10 *eurų išmokamas tik tam, kuris pirmas ištraukia baltą rutulį. Tegu* X_A, X_B, X_C *yra atsitiktiniai dydžiai, reiškiantys lošėjų laimėjimus. Raskite* $\mathbf{E}[X_A], \mathbf{E}[X_B], \mathbf{E}[X_C]$.

6. *Urna su rutuliais tokia pat kaip ankstesniame pavyzdyje:* 3 *balti ir* 4 *juodi rutuliai. Lošėjai* A, B, C *vienas po kito traukia po rutulį nesugrąžindami jo atgal. Laimėjimas išmokamas ištraukusiems baltus rutulius. Už pirmą baltą rutulį –* 10 *eurų, už antrąjį –* 8 *eurai, už trečiąjį –* 6 *eurai. Tegu* X_A, X_B, X_C *yra atsitiktiniai dydžiai, reiškiantys lošėjų laimėjimus. Raskite* $\mathbf{E}[X_A], \mathbf{E}[X_B], \mathbf{E}[X_C]$.

7. *Mesta moneta atvirsta herbu su tikimybe* $p = 0{,}6$. *Ji mėtoma tol, kol iš eilės atvirsta du herbai arba du skaičiai. Metimų skaičius yra atsitiktinis dydis. Jeigu metimų skaičius lygus* 2, *laimėjimas –* 2 *eurai, jeigu prireiks trijų metimų – laimėsite* 3 *eurus, jeigu keturių –* 4 *eurus, jeigu penkių ar daugiau – laimėjimas* 5 *eurai. Apskaičiuokite laimėjimo vidurkį.*

8. *Yra dvi monetos: viena simetriška, kita ne. Nesimetriška moneta ją metus atvirsta herbu su tikimybe* 0,4. *Vieną lošimą sudaro du monetos metimai. Jeigu abu kartus moneta atvirsta ta pačia puse, laimimas vienas euras. Lošėjas gali abu kartus mesti tą pačią monetą, gali vieną kartą mesti simetrišką, kitą kartą nesimetrišką monetą. Lošėjas ketina lošti* $n = 100$ *kartų. Koks būtų jo laimėjimo vidurkis, jeigu jis mėtytų simetrišką monetą? Jeigu mėtytų nesimetrišką monetą? Jeigu vieną kartą mestų simetrišką, o kitą – nesimetrišką monetą?*

Atsakymai

1. $\mathbf{E}[X] = 7/2, \mathbf{E}[|X - 3|] = 3/2.$ **2.** $\mathbf{E}[X] = 111/31.$

3. *Pažymėkime* X_1 *– laimėjimo, tekusio pirmam nupirktam bilietui dydį. Tada* $P(X_1 = 5) = 15/100; P(X_1 = 10) = 10/100; \mathbf{E}[X] = 1{,}75$. *Tegu* X_2 *– antram bilietui tekęs laimėjimas; tada* $X_1 + X_2$ *– laimėjimo dydis, jei perkami du bilietai. Dydis* X_2 *įgyja* *tas pačias reikšmes su tomis pat tikimybėmis kaip* X_1. *Todėl* $\mathbf{E}[X_1+X_2] = 2\cdot 1{,}75 = 3{,}5$. *Jeigu perkama* m *bilietų, tai laimėjimo vidurkis* $1{,}75\ m$.

4. *Laimėjimo vidurkis, kai perkamas vienas bilietas, yra dydžiu* $13125/9900 \approx 1{,}326$ *didesnis nei ankstesniame uždavinyje.*

5. $\mathbf{E}[X_A] = 30/7, \mathbf{E}[X_B] = 20/7, \mathbf{E}[X_C] = 12/7.$

6. $\mathbf{E}[X_A] = 30/7, \mathbf{E}[X_B] = 28/7, \mathbf{E}[X_C] = 160/35.$

7. $1772/625 = 2{,}8352$. **8.** 50 *Lt*, 52 *Lt*.

3.7 Diskrečiųjų dydžių vidurkių skaičiavimas

Tai dažnai pasitaiko matematikoje: apibrėžimuose nurodomas ilgas kelias prie tikslo, o teoremose – būdai, jo išvengti. Šiame skyrelyje rasite daug tokių pavyzdžių. Taigi neprotinga mokytis vien apibrėžimų!

Apskaičiuosime svarbiausių diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkius. Paprasčiausiais atvejais ir skaičiuoti nėra ko – atsakymas akivaizdus. Pavyzdžiui, jeigu atsitiktinis dydis X yra išsigimęs, t. y. su tikimybe 1 įgyja reikšmę a, $P(X = a) = 1$, tai ir vidurkis, žinoma, lygus $a : \mathbf{E}[X] = a$.

Jeigu dydis X su tikimybe p įgyja reikšmę 1 ir su tikimybe $q = 1 - p$ reikšmę 0, tai

$$\mathbf{E}[X] = 0\cdot q + 1\cdot p = p.$$

Panagrinėkime įdomesnių pavyzdžių. Tegu X yra binominis atsitiktinis dydis, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Dydį X galima suvokti kaip sėkmių skaičių S_n, kuris gaunamas atlikus n Bernulio schemos bandymų. Apskaičiuosime $\mathbf{E}[X]$. Pasinaudoję vidurkio apibrėžimu gautume

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p.$$

Apskaičiuosime šios sumos reikšmę netiesiogiai, pasinaudodami paprastais atsitiktiniais dydžiais

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{jei } j\text{-asis bandymas baigėsi sėkme,} \\ 0, & \text{jei } j\text{-asis bandymas baigėsi nesėkme,} \end{cases}$$

čia $j = 1, 2, \ldots, n$.

Kadangi $P(X_j = 1) = p, P(X_j = 0) = 1 - p$, tai $\mathbf{E}[X_j] = p$. Tačiau $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, taigi

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n] = np.$$

Binominio dydžio vidurkis

> *Jei* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, *tai* $\mathbf{E}[X] = np$.

Pasinaudoję ta pačia sudėtingo atsitiktinio dydžio reiškimo paprastesniais idėja apskaičiuosime hipergeometrinio dydžio vidurkį.

Tegu urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių, atsitiktinai traukiame u ($u \leqslant m + n$). rutulių. Atsitiktinio dydžio X reikšmė – baltų rutulių kiekis tarp ištrauktųjų. Surasime šio dydžio vidurkį. Dydžio reikšmių tikimybes apskaičiavome jau ankstesniame skyrelyje, taigi

$$\mathbf{E}[X] = \sum_v v \cdot \frac{C_m^v C_n^{u-v}}{C_{m+n}^u},$$

čia sumuojama pagal visas galimas dydžio reikšmes v. Užuot skaičiavę šią sumą tiesiogiai, bandykime vėl išsisukti. Galime įsivaizduoti, kad rutuliai traukiami ne visi iš karto, bet vienas po kito. Pasinaudosime dydžiais $X_1, X_2, \ldots, X_u$:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{jei } j\text{-asis rutulys baltas,} \\ 0, & \text{jei } j\text{-asis rutulys juodas.} \end{cases}$$

Tada $\mathbf{E}[X] = X_1 + X_2 + \cdots + X_u$, be to

$$P(X_j = 1) = \frac{m}{m+n}, \quad P(X_j = 0) = \frac{n}{m+n},$$
$$\mathbf{E}[X_j] = 1 \cdot \frac{m}{m+n} + 0 \cdot \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n}.$$

Taigi

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_u] = u \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Šis pavyzdys dar kartą rodo, kokia svarbi yra vidurkio adityvumo savybė. Ja pasinaudoję netiesiogiai suskaičiavome gana sudėtingą sumą.

Apskaičiuosime Puasono dydžio vidurkį. Puasono teorema teigia: jeigu Bernulio schemose bandymų skaičius n neaprėžtai auga, vieno bandymo sėkmės tikimybė p_n artėja prie nulio ir $np_n \to \lambda$, tai atsitiktinis dydis S_n „supanašėja“ su Puasono dydžiu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, t. y.

$$P(S_n = m) \to P(X = m), \quad P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad n \to \infty.$$

Galima tikėtis, kad tada $\mathbf{E}[S_n] \to \mathbf{E}[X]$. Tačiau $\mathbf{E}[S_n] = np_n \to \lambda$, taigi šitaip samprotaudami gauname prielaidą, kad $\mathbf{E}[X] = \lambda$. Įsitikinsime, kad tai tiesa, skaičiuodami vidurkį pagal apibrėžimą.

Tegu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tada

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!},$$

čia pažymėjome $k = m - 1$. Tačiau

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda},$$

taigi $\mathbf{E}[X] = \lambda$.

Puasono dydžio vidurkis

Jei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, *tai* $\mathbf{E}[X] = \lambda$.

Jeigu Bernulio schemos bandymus su sėkmės tikimybe p atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius X bus geometrinis atsitiktinis dydis, t. y.

$$X \sim \mathcal{G}(p), \quad P(X = m) = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Apskaičiuosime šio dydžio vidurkį $\mathbf{E}[X]$. Kokia turėtų būti vidurkio reikšmė, galime spėti taip. Jeigu pirmas bandymas baigėsi sėkme, tai $X = 1$; jeigu nesėkme – viskas tarsi prasideda nuo pradžių ir vidutiniškai iš viso teks atlikti (įskaitant pirmąjį) $1 + \mathbf{E}[X]$ bandymų. Taigi

$$\mathbf{E}[X] = 1 \cdot p + (1 + \mathbf{E}[X])q, \quad (1-q)\mathbf{E}[X] = p + q = 1, \quad \mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}.$$

Įsitikinsime, kad šis spėjimas teisingas skaičiuodami pagal apibrėžimą:

$$\mathbf{E}[X] = 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + \cdots + mq^{m-1}p + \cdots \tag{3.4}$$

Padauginkime (3.4) lygybę iš q ir iš (3.4) atimkime gautąją:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X] = 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + \cdots, \\
&q\mathbf{E}[X] = 1 \cdot qp + 2 \cdot q^2p + 3 \cdot q^3p + \cdots, \\
&(1-q)\mathbf{E}[X] = p + qp + q^2p + \cdots = \frac{p}{1-q} = 1, \quad \mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Geometrinio dydžio vidurkis

$$\text{Jei } X \sim \mathcal{G}(p), \text{ tai } \mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}.$$

Apskaičiuokime Paskalio dydžio $X \sim \mathcal{B}^-(n,p)$ vidurkį. Nagrinėdami šį dydį gavome išraišką

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n, \quad Y_i \sim \mathcal{G}(p).$$

Taigi $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y_1] + \cdots + \mathbf{E}[Y_n] - n = \dfrac{n}{p} - n = \dfrac{nq}{p}$.

Paskalio dydžio vidurkis

$$\text{Jei } X \sim \mathcal{B}^-(n,p), \text{ tai } \mathbf{E}[X] = \frac{nq}{p}.$$

Uždaviniai

1. *Taikinys yra skritulio su spinduliu $r = 15$ cm formos, jame nubraižyti du apskritimai, jų spinduliai yra atitinkamai $5, 10$ cm, o centrai sutampa su skritulio centru. Į taikinį visada pataikoma; šūvį galima interpretuoti kaip atsitiktinį skritulio taško parinkimą. Jeigu parinktas taškas yra mažojo apskritimo viduje – šūvio vertė 15 taškų, jeigu tarp pirmųjų dviejų apskritimų – 10 taškų, jeigu už apskritimo su spinduliu $r = 10$ gaunami 5 taškai. Kokia vidutinė vieno šūvio vertė? Kiek vidutiniškai galima surinkti taškų, kai į taikinį šaunama $n = 9$ kartus?*

2. *Autobusu važiuoja $n = 20$ keleivių, stotelių skaičius $m = 5$. Tikimybės, kad keleivis išlips pirmoje, antroje, ..., penktoje stotelėje, yra vienodos. Koks keleivių, išlipusių pirmoje stotelėje, skaičiaus vidurkis?*

3. *Loterijos bilieto kaina – 2 eurai. Tikimybė, kad bilietas bus laimingas, lygi $1/3$. Jeigu bilietas laimingas – lošėjui išmokami 3 eurai. Lošėjas nutarė nusipirkti bilietų už 10 eurų. Jo laimėjimų suma – atsitiktinis dydis X. Atėmę bilietams pirkti išleistus pinigus, gauname pelną iš lošimo: $Y = X - 10$. Koks lošėjo pelno vidurkis? Kokia tikimybė, kad jo pelnas bus didesnis už vidurkį?*

4. *Loterija ta pati kaip ankstesniame uždavinyje, tačiau lošėjas nutarė lošti kitaip. Jis nutarė pirkti po vieną bilietą iki pirmojo laimėjimo. Koks lošėjo pelno vidurkis tokiu atveju? Kokia tikimybė, kad pelnas bus didesnis už vidurkį?*

5. *Avarijų skaičius miesto gatvėse per dieną – atsitiktinis dydis X, pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, $X \sim \mathcal{P}(5)$. Kokia tikimybė, kad dienos avarijų skaičius bus didesnis už vidurkį?*

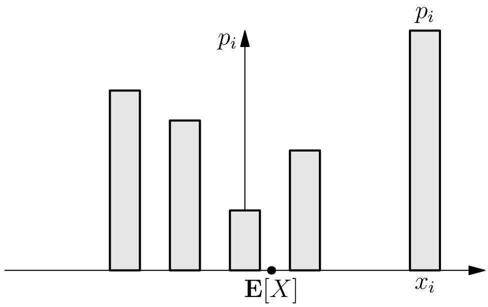
Atsakymai

1. *Vidurkis* $70/9$; *vidutiniškai* 70 *taškų.* **2.** *Vidurkis* – 4 *keleiviai.* **3.** *Vidurkis* -5; *tikimybė* $131/243 \approx 0{,}539$. **4.** *Vidurkis* -3; *tikimybė* $5/9$. **5.** $\approx 0{,}384$.

3.8 Absoliučiai tolydžiųjų dydžių vidurkiai

Galbūt bijote integralų? Deja, integralų studijuojant tiksliuosius mokslus išvengti pavyksta nedaugeliui.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X vidurkį galime suvokti kaip svorio centro koordinatę: jeigu skaičių tiesės taškuose x_i padėsime $p_i = P(X = x_i)$ dydžio svorius (žr. brėžinį, jame svoriai vaizduojami vienodo pločio ir tikimybėms p_i proporcingo aukščio stulpeliais), tai $\mathbf{E}[X]$ bus svorio centro koordinatė.

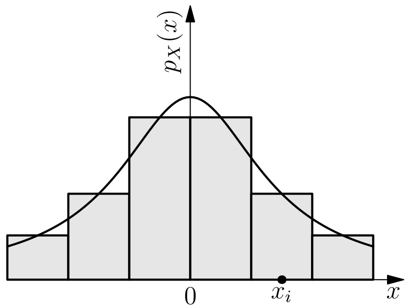


Vidurkį galime suvokti kaip svorio centro koordinatę.

Jeigu X yra tolydusis atsitiktinis dydis, tai su visomis reikšmėmis x teisinga lygybė $P(X = x) = 0$. Tarkime, atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydusis, taigi turi tankį $p_X(x)$. Tada galime įsivaizduoti, kad ant skaičių tiesės yra padėti ne pavieniai svoriai, bet „uždėta“ figūra, kurią iš viršaus riboja tankio grafikas. Kur dabar reikėtų įrengti atramą, kad tiesė būtų pusiausvyroje, t. y. kaip nustatyti svorio centro koordinatę? Ši koordinatė būtų absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis.

Galėtume ieškoti vidurkio taip.

Skaičių tiesę padalijęs $1/n$ ilgio intervalais, pakeiskime figūrą, kurią riboja tankio grafikas, figūra, sudaryta iš stačiakampių su pagrindais $[x_i, x_{i+1})$, $x_i = i/n$, $i = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots$ ir aukščiais $p_X(x_i)$.



Tankio grafiku apribotą figūrą galime pakeisti iš stulpelių sudaryta figūra.

Tarę, kad taške x_i yra svoris, lygus stačiakampio plotui, t. y. $p_X(x_i)(x_{i+1}-x_i)$, galėtume vidurkį (svorio centro koordinatę) skaičiuoti taip:

$$\mathbf{E}[X] \approx \sum_i x_i p_X(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{3.5}$$

ir ieškoti sumos ribos, kai $n \to \infty$. Tačiau kada ši riba egzistuoja?

Kasdieniame gyvenime manome, kad koks nors daiktas ar reiškinys egzistuoja, jeigu jį įmanoma pasistengus surasti ar įgyti. Tačiau matematikoje toks „blaivaus proto“ požiūris ne visada tinka. Ar egzistuoja, pavyzdžiui, tokios begalinės sumos

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

reikšmė? Žinoma, egzistuoja, pareikš kas nors ir pateiks „įrodymą“:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Tačiau galimas ir kitoks „įrodymas“:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1!$$

Vargu ar tokie įrodymai mus įtikins, kad sumos reikšmė egzistuoja. Jeigu matematinis objektas egzistuoja, tai „taisyklingai“ samprotaudami apie jį netu- rėtume prieiti nesuderinamų, prieštaringų išvadų!

Prisiminkime diskrečiojo atsitiktinio dydžio vidurkio egzistavimo sąlygą: suma

$$\sum_x |x| P(X = x)$$

turi būti baigtinė. Absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju šią sąlygą atitinka reikalavimas, kad figūros, kurią riboja abscisių ašis ir funkcijos $|x|p_X(x)$ grafikas, plotas būtų baigtinis, kitaip sakant, integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) \mathrm{d}x$$

turi būti baigtinis. Tada (3.5) sumų riba egzistuoja, maža to, – galime ją užrašyti integralu ir skaičiuoti naudojantis galingais integralinio skaičiavimo instrumentais:

$$\mathbf{E}[X] \approx \sum_i x_i p_X(x_i)(x_{i+1} - x_i) \to \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x, \quad n \to \infty.$$

Absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

32 apibrėžimas. *Jeigu absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio tankis yra $p_X(x)$ ir integalo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x)\mathrm{d}x$$

reikšmė yra baigtinė, tai atsitiktinio vidurkiu vadinsime skaičių

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Ne visi diskretieji atsitiktiniai dydžiai turi vidurkius. Yra ir absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių, kurie vidurkių neturi. Štai paprastas pavyzdys. Tarkime, atsitiktinis dydis X turi tokį tankį:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{2x^2}, & \text{jei } |x| > 1. \end{cases}$$

Nusibraižę tankio grafiką, pamatytume, kad abscisių ašis ir tankio grafikas apriboja simetrišką ordinačių ašies atžvilgiu figūrą. Norėtųsi teigti, kad šios figūros „svorio centro“ abscisė, taigi – atsitiktinio dydžio vidurkis – lygus nuliui. Tačiau nesunku įsitikinti, kad tankis netenkina sąlygos, suformuluotos vidurkio apibrėžime.

Žinome, kaip skaičiuoti atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkį, kai X yra diskretusis atsitiktinis dydis. Panašus teiginys teisingas ir absoliučiai tolydiesiems dydžiams.

35 teorema. *Tegu atsitiktinio dydžio X tankis yra $p_X(x)$, o $f(x)$ – funkcija, įgyjanti realias reikšmes. Atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkis (jeigu jis egzistuoja) skaičiuojamas taip:*

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių savybės (adityvumo, nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkio) savybės teisingos ir absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju.

O kaip skaičiuoti atsitiktinių dydžių, kurie nėra nei diskretieji, nei absoliučiai tolydieji, vidurkius? Pavyzdžiui, jeigu X yra diskretusis, o Y − absoliučiai tolydusis atsitiktinis dydis, tai jų suma $Z = X + Y$ nepriklausys nė vienai šių šeimų. Taigi reikalinga bendresnė atsitiktinių dydžių vidurkių teorija. Laimei, praktikoje tokių dydžių ne taip dažnai pasitaiko. O paprastais atvejais galime suvesti skaičiavimus į diskrečiojo ir absoliučiai tolydaus dydžio atvejus. Pavyzdžiui, dydžio Z vidurkį galime rasti sumuodami vidurkius: $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

O dabar suraskime anksčiau nagrinėtų absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių vidurkius.

Tegu atsitiktinis dydis X yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[a; b]$. Tada jo tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{jei } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Akivaizdu, kur reikia įrengti atramą, kad „tankio stačiakampis“ liktų pusiausvyroje:

$$\mathbf{E}[X] = \frac{b+a}{2}.$$

Tačiau apskaičiuokime ir naudodamiesi apibrėžimu:

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Tolygiai pasiskirsčiusio dydžio vidurkis

Jei $X \sim \mathcal{T}([a, b])$, *tai* $\mathbf{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$.

Apskaičiuosime eksponentinio atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ vidurkį. Šio dydžio tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{jei } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

Pirmiausia pabandykime nustatyti vidurkio reikšmę nevisiškai griežtais samprotavimais. Prisiminkime geometrinio ir eksponentinio dydžių ryšį. Tegu vienas bandymas su dviem baigtimis trunka $1/n$ laiko vienetų, o sėkmės tikimybė p_n. Jeigu bandymus atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius bus geometrinis dydis, pažymėkime jį X_n. Žinome, kad $\mathbf{E}[X_n] = 1/p_n$. Tegu trumpėjant vieno bandymo trukmei sėkmės tikimybė mažėja taip, kad $np_n \to \lambda, \lambda > 0, n \to \infty$. Nustatėme, kad

$$P(X_n > nt) \to P(X > t), \quad \text{arba} \quad P\Big(\frac{X_n}{n} > t\Big) \to P(X > t).$$

Paskutinis sąryšis reiškia, kad atsitiktinis dydis X_n/n darosi vis panašesnis į X. Todėl galime tikėtis, kad $\mathbf{E}[X_n/n]$ artėja prie $\mathbf{E}[X]$. Tačiau

$$\mathbf{E}[X_n/n] = \frac{\mathbf{E}[X_n]}{n} = \frac{1}{np_n} \to \frac{1}{\lambda}, \quad n \to \infty.$$

Tai skatina spėti, kad $\mathbf{E}[X] = 1/\lambda$. Įsitikinkime tuo integruodami. Teks pasinaudoti integravimo dalimis technika:

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x} =$$
$$-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x} = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Eksponentinio dydžio vidurkis

Jei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, *tai* $\mathbf{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$.

Prisiminkime gama dydžių ir eksponentinių dydžių sąryšį. Jeigu pokalbių mobiliuoju telefonu aistruolis(ė) nusprendė pasikalbėti su k draugų, tai pokalbių trukmės bus nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_i, pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį $\mathcal{E}(\lambda)$, o bendra pokalbių trukmė X – pagal gama dėsnį:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad X \sim \Gamma(k, \lambda).$$

Taigi

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_k] = \frac{k}{\lambda}.$$

Gama dydžio vidurkis

Jei $X \sim \Gamma(k, \lambda)$, *tai* $\mathbf{E}[X] = \dfrac{k}{\lambda}$.

Normaliojo standartinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ tankis

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

yra lyginė funkcija. Tikriausiai nereikia ilgai įtikinėti, kad jeigu tokio dydžio vidurkis egzistuoja, tai jis lygus nuliui. Taip ir yra: $\mathbf{E}[X] = 0$.

Jeigu tiesiškai transformuosime šį dydį, t. y. apibrėšime $Y = \sigma X + \mu$, tai gausime vėl normalųjį dydį: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Jo vidurkis

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\sigma X + \mu] = \mathbf{E}[\sigma X] + \mathbf{E}[\mu] = \sigma\mathbf{E}[X] + \mu = \mu.$$

Normaliųjų dydžių vidurkiai

Jei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *tai* $\mathbf{E}[X] = \mu$.

Uždaviniai

1. *Atsitiktinio dydžio X reikšmė gaunama taip: atsitiktinai parenkamas intervalo $[0; a]$ skaičius ir keliamas kvadratu. Kokia turėtų būti a reikšmė, kad atsitiktinio dydžio X vidurkis būtų lygus 1?*

2. *Atsitiktinai ir nepriklausomai vienas nuo kito pasirenkami du intervalo $[0; a]$ skaičiai X_1, X_2. Pažymėkime X – mažesnįjį iš jų. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį.*

3. *Lygiašonio trikampio šoninių kraštinių ilgiai lygūs 1, o viršūnės kampas ϕ gali įgyti bet kurias reikšmes iš intervalo $[0; \pi/2]$, kitaip tariant, – yra atsitiktinis dydis, tolygiai pasiskirstęs šiame intervale. Raskite trikampio ploto S vidurkį.*

4. *Lošimas vyksta taip: pirmiausia atsitiktinai parenkamas intervalo $[0; 1]$ skaičius, o paskui metama moneta, kuri atvirsta herbu su tikimybe 3/5. Jeigu moneta atvirsta herbu, parinktasis skaičius perpus sumažinamas, o jeigu skaičiumi – dvigubai padidinamas. Gautasis skaičius yra laimėjimo dydis. Koks šio lošimo laimėjimo X vidurkis?*

5. *Vaikai žaidžia su balionais, kol juos susprogdina. Baliono „gyvavimo“ trukmė – eksponentinis atsitiktinis dydis. Šimtas vaikų vienu metu gavo po balioną ir pradėjo žaisti. Po penkių minučių buvo likę tik 45 balionai. Koks vieno baliono „gyvavimo“ trukmės vidurkis?*

6. *A pokalbio telefonu trukmė – eksponentinis dydis, šio dydžio vidurkis 5 minutės. B pokalbio telefonu trukmė taip pat eksponentinis dydis, jo vidurkis 7 minutės. Tarkime, jie pradėjo pokalbius vienu metu, o X – trumpesnio pokalbio trukmė. Koks atsitiktinio dydžio X vidurkis?*

7. *Atsitiktinis dydis X yra standartinis normalusis, t. y. $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, o dydis Y gaunamas taip: $Y = X + a$. Koks atsitiktinio dydžio Y vidurkis, jeigu žinoma, kad $P(Y > 2) = 0{,}4$? Teks pasinaudoti standartinio normaliojo dydžio pasiskirstymo funkcijos reikšmių lentelėmis arba jų skaičiavimo funkcijomis!*

Atsakymai

1. $a = \sqrt{3}$. **2.** $\mathbf{E}[X] = a/3$. **3.** $\mathbf{E}[S] = 1/\pi \approx 0{,}318$. **4.** $\mathbf{E}[X] = 11/20$. **5.** $\approx 6{,}26$ *min.* **6.** $\mathbf{E}[X] = 35/12 \approx 2{,}9$ *min.* **7.** $\mathbf{E}[Y] = a \approx 1{,}75$.

3.9 Bendroji atsitiktinių dydžių vidurkio teorija

Jos esmė tokia: diskretieji dydžiai, kaip kokie Nepalo šerpai, ant savo pečių perneša visus svarbius teiginius ir savybes į teorijos aukštumas.

Šis skyrelis skirtas tik smalsiems skaitytojams. Jeigu jums nerūpi sužinoti, kaip matematikai plėtoja vidurkio sąvoką, tinkamą visiems atsitiktiniams dydžiams, galite šių puslapių ir neskaityti.

Taigi – yra daug dydžių, kurie nėra nei diskretieji, nei absoliučiai tolydieji. Pavyzdžiui, dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ir $X_2 \sim \mathcal{N}(0;1)$ suma nėra nei diskretusis, nei absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis. Kaip apibrėžti tokių dydžių vidurkį?

Idėja labai paprasta: „priartinkime“ atsitiktinį dydį X diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais X_n, ištirkime, ar $\mathbf{E}[X_n]$ egzistuoja, jei egzistuoja ir turi ribą – apibrėžkime

$$\mathbf{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n].$$

Paskui nustatykime, kokios diskrečiųjų atsitiktinių dydžių savybės išlieka ir bendruoju atveju.

Taigi pirmas klausimas: kaip bet kokį atsitiktinį dydį $X : \Omega \to \mathbb{R}$ priartinti diskrečiaisiais, t. y. įgyjančiais reikšmes iš baigtinės ar skaičios aibės, dydžiais? Sprendimas paprastas: suskaidykime skaičių tiesę $\mathbb{R}$ intervalais $I_k = [k/n; (k+1)/n)$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, o baigčių aibę nesikertančiais poaibiais

$$H_k = \{\omega : X(\omega) \in I_k\} = \Big\{\omega : \frac{k}{n} \leqslant X(\omega) < \frac{k+1}{n}\Big\}.$$

Dabar apibrėžkime $X_n(\omega) = \frac{k}{n}$, jei $\omega \in H_k$. Dydžiai X_n yra diskretieji. Beveik akivaizdu, kad

$$X(\omega) - \frac{1}{n} \leqslant X_n(\omega) \leqslant X(\omega),$$

taigi $0 \leqslant X(\omega) - X_n(\omega) \leqslant 1/n$, $-1/n \leqslant X_n(\omega) - X(\omega) \leqslant 0$. Didėjant n diskretieji atsitiktiniai dydžiai X_n vis mažiau skiriasi nuo X. Palyginkime X_{n+m} ir X_n

reikšmes:

$$\begin{aligned} X_{n+m}(\omega) - X_n(\omega) &\leqslant X(\omega) - X_n(\omega) < \frac{1}{n}, \\ X_{n+m}(\omega) - X_n(\omega) &\geqslant X_{n+m}(\omega) - X(\omega) > -\frac{1}{n+m} > -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Taigi

$$-\frac{1}{n} \leqslant X_{n+m}(\omega) - X_n(\omega) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{3.6}$$

Tarkime, visų atsitiktinių dydžių X_k vidurkiai egzistuoja. Tada egzistuoja ir skirtumo $X_{n+m} - X_n$ vidurkis:

$$\mathbf{E}[X_{n+m} - X_n] = \mathbf{E}[X_{n+m}] - \mathbf{E}[X_n].$$

Iš (3.6) gauname, kad

$$-\frac{1}{n} = \mathbf{E}[-\frac{1}{n}] \leqslant \mathbf{E}[X_{n+m}] - \mathbf{E}[X_n] \leqslant \mathbf{E}[\frac{1}{n}] = \frac{1}{n}.$$

Iš šių nelygybių išplaukia (Koši kriterijus), kad vidurkių sekos $\mathbf{E}[X_n]$ riba egzistuoja. Taigi galime apibrėžti

$$\mathbf{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n].$$

O dabar galima įrodinėti vidurkio savybes bendruoju atveju. Visas pagrindines diskrečiųjų dydžių vidurkio savybes (konstantos iškėlimo, adityvumo, nepriklausomų dydžių sandaugos vidurkio ...) diskretieji dydžiai ant savo pečių perneša ir į „didžiąją“ atsitiktinių dydžių aibę!

3.10 Sąlyginiai vidurkiai

Nagrinėdami sąlygines tikimybes minėjome, kad jos taip pat yra tikimybės, taigi turi visas svarbiausias savybes. Tad jeigu taip, gal galime jas sieti ir su dydžių vidurkiais? Iš tiesų...

Jeigu atsitiktinis dydis X yra diskretusis, o H – koks nors atsitiktinis įvykis, kurio tikimybė teigiama, tai galime apibrėžti sąlygines atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybes:

$$P(X = x|H) = \frac{P(\{X = x\} \cap H)}{P(H)}.$$

Taigi galime apibrėžti ir sąlyginį vidurkį.

Sąlyginis vidurkis

33 apibrėžimas. *Tegu X – diskretusis atsitiktinis dydis, H – atsitiktinis įvykis, $P(H) > 0$ ir*

$$\sum_x |x| \cdot P(X = x|H) < \infty.$$

Sąlyginiu X vidurkiu su sąlyga H vadinsime skaičių

$$\mathbf{E}[X|H] = \sum_x x \cdot P(X = x|H).$$

O kaip gi kiti dydžiai, absoliučiai tolydūs ir kitokie? Sąlyginius vidurkius galima apibrėžti ir jiems, tačiau... Reikėtų pakilti į kitą lygį ir pakvėpuoti išretintu abstrakcijų oru. Pageidaujantieji susiras bendrąją sąlyginių vidurkių teoriją išsamesnėse tikimybių teorijos knygose. Tačiau ir apsiribojus diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkiais galima atskleisti šį tą įdomaus.

Štai, pavyzdžiui, svarbus teiginys.

36 teorema. *Tegu $H_1, H_2, ...$ yra nesutaikomi įvykiai, $P(H_i) > 0$ ir $H = \cup_i H_i$. Jei X yra diskretusis atsitiktinis dydis, turintis sąlyginius vidurkius, tai*

$$\mathbf{E}[X|H] = P(H)^{-1} \sum_i \mathbf{E}[X|H_i] P(H_i).$$

Įrodymas. Pasinaudokime sąlyginės tikimybės apibrėžimu:

$$P(X = x|H) = \frac{P(\{X = x\} \cap H)}{P(H)}.$$

Tačiau H yra nesutaikomų įvykių H_i sąjunga, taigi

$$\begin{aligned} P(\{X = x\} \cap H) &= \sum_i P(\{X = x\} \cap H_i) = \sum_i \frac{P(\{X = x\} \cap H_i)}{P(H_i)} \cdot P(H_i) \\ &= \sum_i P(X = a|H_i) P(H_i). \end{aligned}$$

Dabar įrodymui užbaigti pakaks sukeisti sumavimo tvarką:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X|H] &= \sum_x x \cdot P(X = a|H) = P(H)^{-1} \sum_x x \cdot \Big(\sum_i P(X = x|H_i) P(H_i) \Big) \\ &= P(H)^{-1} \sum_i \Big(\sum_x x \cdot P(X = x|H_i) \Big) \cdot P(H_i) \\ &= P(H)^{-1} \sum_i \mathbf{E}[X|H_i] P(H_i). \end{aligned}$$

Jeigu $H = \Omega$, t. y. H yra būtinasis įvykis, tai $\mathbf{E}[X|\Omega] = \mathbf{E}[X]$. Tokiu atveju iš teoremos gauname svarbią išvadą.

Pilnojo vidurkio formulė

37 teorema. *Jeigu H_i yra atsitiktiniai įvykiai, $P(H_i) > 0$ ir $\Omega = \cup_i H_i$, tai atsitiktiniam dydžiui, turinčiam vidurkį, teisinga lygybė*

$$\mathbf{E}[X] = \sum_i \mathbf{E}[X|H_i]P(H_i).$$

Be abejo pastebėjote pilnojo vidurkio formulės panašumą su pilnosios tikimybės formule. Ir jos nauda analogiška: kartais padeda apskaičiuoti vidurkį išvengiant tikimybių skaičiavimo vargo.

Panagrinėkime kelis pavyzdžius.

45 pavyzdys. Baltų rutulių skaičius
Grįžkime prie ne kartą nagrinėto bandymo. Urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių. Atsitiktinai traukiame k rutulių ir skaičiuojame, kiek ištraukėme baltų rutulių. Baltų rutulių kiekis – atsitiktinis dydis X. Koks jo vidurkis? Atsakymą jau žinome:

$$\mathbf{E}[X] = k \cdot \frac{m}{m+n}.$$

O dabar tarkime, kad yra ir kita urna, pavadinkime ją urna A. Joje taip pat yra m baltų ir n juodų rutulių. Prieš traukdami rutulius iš mūsiškės urnos, patogumo dėlei pavadinkime ją urna B, kažkas vieną rutulį perkėlė iš urnos A į urną B. Jeigu iš B trauksime k rutulių, koks dabar bus baltų rutulių skaičiaus X vidurkis?

Pažymėkime H_0 įvykį, kad į B buvo perkeltas baltas rutulys, o H_1 – kad juodas. Pasinaudosime pilnojo vidurkio formule:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X|H_0]P(H_0) + \mathbf{E}[X|H_1]P(H_1).$$

Lengva rasti įvykių H_0, H_1 tikimybes: $P(H_0) = m/(m+n), P(H_1) = n/(m+n)$. O kaipgi sąlyginiai vidurkiai? Jeigu į B perkeltas baltas rutulys, tai k rutulių trauksime iš urnos, kurioje yra $m+1$ baltas ir n juodų rutulių. Taigi $\mathbf{E}[X|H_0] = k(m+1)/(m+n+1)$. Savo ruožtu $\mathbf{E}[X|H_1] = km/(m+n+1)$. Taigi

$$\mathbf{E}[X] = \frac{k(m+1)}{m+n+1} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{km}{m+n+1} \cdot \frac{n}{m+n}.$$

Jeigu nepatingėsite ir suprastinsite šį reiškinį, gausite:

$$\mathbf{E}[X] = k \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Taigi baltų rutulių vidurkis toks pat kaip ir tuo atveju, kai rutulius traukėme nepapildę urnos B!

Galbūt ir jūs, kaip ir aš, išsprendęs šį uždavinį, panorote patyrinėti daugiau. O kaip būtų, jeigu iš urnos A į B perdėtume ne vieną, bet, tarkime, t rutulių, čia $t \leqslant n+m$?

Pažymėkime H_u įvykį, kad tarp rutulių, kurie perkeliami į urną B buvo u baltų, čia $u = 0, 1, \ldots, t$. Žinoma, gali būti, kad kai kuriems u $P(H_u) = 0$. Tada tokių įvykių nenagrinėtume. Paprastumo dėlei tariame, kad $P(H_u) > 0$ su visais u. Taigi perkėlę rutulius iš urnos B atsitiktinai traukiame k rutulių, X – baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų. Koks dydžio X vidurkis? Vėl pasitelkime pilnojo vidurkio formulę:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{u=0}^{t} \mathbf{E}[X|H_u]P(H_u).$$

Jeigu įvyks įvykis H_u, tai urnoje B bus $m+u$ baltų ir $n+t-u$ juodų rutulių. Jeigu iš jos trauksime k rutulių, tai vidurkis bus lygus $\mathbf{E}[X|H_u] = k(m+u)/(m+n+t)$. Taigi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{u=0}^{t} k \cdot \frac{m+u}{m+n+t} \cdot P(H_u) = k \sum_{u=0}^{t} \frac{m+u}{m+n+t} \cdot P(H_u) \\
&= k \sum_{u=0}^{t} \Big(\frac{m}{m+n+t} + \frac{u}{m+n+t} \Big) \cdot P(H_u) \\
&= k \cdot \frac{m}{m+n+t} \sum_{u=0}^{t} P(H_u) + k \cdot \frac{1}{m+n+t} \sum_{u=0}^{t} uP(H_u).
\end{aligned}$$

Tačiau pirmoji suma lygi vienetui, o antroji – baltų rutulių skaičiaus tarp perkeltųjų vidurkiui, t. y. $tm/(m+n)$. Taigi

$$\mathbf{E}[X] = k \cdot \frac{m}{m+n+t} + k \cdot \frac{1}{m+n+t} \cdot \frac{tm}{m+n} = k \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Ir vėl vidurkis tas pats!

46 pavyzdys. Bernulio bandymai

Jeigu perskaitysite šio pavyzdžio tekstą iki galo, galbūt nustebsite dar labiau. Tarkime, sėkmės tikimybė Bernulio bandyme yra $p, p > 0$. Pirmiausia atliekame Bernulio bandymus iki pirmos sėkmės, X – atliktų bandymų skaičius. Žinome, kad $X \sim \mathcal{G}(p)$. Paskui atliekame tiek bandymų, kiek jau atlikome, tegu Y – šios naujos bandymų serijos sėkmių skaičius. Koks dydžio Y vidurkis?

Pažymėkime $H_i = \{X = i\}, i = 1, 2, \ldots$. Tada $P(H_i) = (1-p)^{i-1}p$ ir

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[Y|H_i]P(H_i).$$

Jeigu įvyko įvykis H_i, tai antrąją seriją sudaro i Bernulio bandymų, taigi $\mathbf{E}[Y|H_i] = ip$. Tada

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} ip \cdot (1-p)^{i-1}p = p\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}p = p\mathbf{E}[X] = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Jokios priklausomybės nuo p!

47 pavyzdys. Kai svarbu, kas pirmas

Ir dar šiek tiek tikimybių magijos. Jeigu jums siūlo lošimą su moneta ir prašo pasirinkti herbo ar skaičiaus pusę, ilgai svarstyti neverta. Moneta, žinoma, nesimetriška, nes idealios simetrijos tikrovėje nebūna. Taigi arba herbas, arba skaičius atvirsta dažniau. Tačiau kuri pusė dažnesnė, nežinia. Tad kuri pusė atrodo gražesnė, tą reikia ir rinktis. Tai geriausias pasirinkimo kriterijus.

Tačiau gyvenime dažnai geriau rinktis ne pagal grožį.

Su ta pačia moneta galima sugalvoti įvairių lošimų. Pažymėkime monetos puses skaičiais, pavyzdžiui, $H \mapsto 0, S \mapsto 1$. Kiek pamėtykime ją, rašydami atvirtusių pusių skaičius. Tarkime, gavome seką

$$\omega_1 = 11110001\ldots.$$

Apibrėžkime pirmojo ir antrojo vienodų ženklų blokų ilgius: $X_1(\omega_1) = 4, X_2(\omega_1) = 3$. Jeigu būtume gavę seką $\omega_2 = 00001110\ldots$, dydžių $X_1(\omega_2), X_2(\omega_2)$ būtų tos pačios.

Tarkime, lošimas su moneta siūlomas dviem žaidėjams, prieš tai sumokėjusiems dalyvio mokestį. Moneta mėtoma tol, kol paaiškėja X_1 ir X_2 reikšmės; šios reikšmės ir yra pirmojo ir antrojo lošėjų laimėjimų dydžiai. Kokios monetos pusių atvirtimo tikimybės, nežinome. Ar verta ginčytis, kuris iš dviejų lošėjų bus pirmas, kuris antras? O gal tebūnie pirmas tas, kuris labiau skuba?

Lošimas tuo naudingesnis žaidėjui, kuo didesnis išlošio vidurkis. Tarkime, 1 pažymėta pusė atvirsta su tikimybe p. Tikėtina, kad išlošių vidurkiai $\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]$ priklauso nuo p. Tačiau jos reikšmės nežinome. O nuojauta, kuriai patinka paprastumas, šnabžda, kad $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2]$.

O dabar paskaičiuokime. Pažymėkime H_0 įvykį, kad per pirmą metimą atvirto 0, H_2 – kad 1. Taigi

$$\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_1|H_0]P(H_0) + \mathbf{E}[X_1|H_1]P(H_1).$$

Dabar laikas pagalvoti. Jeigu įvyko įvykis H_0, tai pirmasis blokas bus sudarytas iš nulių. Blokas užsibaigs, kai atvirs monetos pusė, pažymėta 1. Galime pavadinti tai sėkme. Taigi bloko ilgis – geometrinio dydžio $G_0 \sim \mathcal{G}(p)$ reikšmė. Todėl $\mathbf{E}[X_1|H_0] = \mathbf{E}[G_0] = 1/p$. Savo ruožtu, jeigu įvyko H_1, tai blokas bus sudarytas iš vienetų, o jo ilgis – dydžio $G_1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ reikšmė, taigi $\mathbf{E}[X_1|H_1] = \mathbf{E}[G_1] = 1/(1-p)$. Dabar gauname

$$\mathbf{E}[X_1] = (1-p) \cdot \frac{1}{p} + p \cdot \frac{1}{1-p}.$$

Pažymėję $a = (1-p)/p$ ir užrašę $\mathbf{E}[X_1] = a + 1/a$ galime lengvai įsitikinti, kad $\mathbf{E}[X_1] \geqslant 2$, o lygybė teisinga tik tada, kai $p = 1/2$.

O dabar skaičiuokime $\mathbf{E}[X_2]$:

$$\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[X_2|H_0]P(H_0) + \mathbf{E}[X_2|H_1]P(H_1).$$

Jeigu įvyko įvykis H_0, tai antrasis blokas bus sudarytas iš vienetų, o jo ilgis – jau minėto geometrinio dydžio $G_1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ reikšmė. Savo ruožtu, jeigu įvyko įvykis H_1, tai antrasis blokas bus sudarytas iš nulių, o jo ilgis – $G_0 \sim \mathcal{G}(p)$ reikšmė. Todėl

$$\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[G_1] \cdot (1-p) + \mathbf{E}[G_0] \cdot p = \frac{1}{1-p} \cdot (1-p) + \frac{1}{p} \cdot p = 2.$$

Antrojo bloko ilgio vidurkis nepriklauso nuo p, o pirmasis lošėjas bet kokios nesimetriškos monetos atveju turi pranašumą!

Uždaviniai

1. *Simetriško šešiasienio kauliuko sienelės sužymėtos skaičiais* $1, 2, \ldots, 6$. *Jeigu metus kauliuką atvirsta sienelė, pažymėta skaičiumi* i, *kauliukas metamas dar* i *kartų, o atvirtusių sienelių skaičiai sumuojami. Raskite gautosios taškų sumos vidurkį.*

2. *Pirmoje urnoje yra* 2 *balti ir* 3 *juodi rutuliai, antrojoje – po* 2 *baltus ir juodus. Iš pirmosios urnos į antrąją perkeliami du atsitiktinai parinkti rutuliai. Po to iš pirmosios urnos traukiami keturi rutuliai. Koks ištrauktų baltų rutulių skaičiaus vidurkis?*

3. *Vieno pokalbio telefonu trukmės vidurkis –* a *minučių. Vienos dienos telefono skambučių skaičius – Puasono dydis* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. *Kiek laiko per dieną vidutiniškai kalbama telefonu?*

4. *Sėkmės tikimybė viename Bernulio bandyme lygi* p. *Bandymai atliekami tol, kol gaunama* n *sėkmių. Paskui dar atliekama tiek bandymų, kiek nesėkmių buvo patirta pirmoje bandymų serijoje. Koks antroje bandymų serijoje patirtų sėkmių vidurkis?*

5. *Loterijos bilieto kaina –* 1 *euras, tikimybė laimėti –* p. *Lošėjas nutarė lošti, kol* n *kartų laimės, o paskui dar tiek kartų, kiek nesėkmių patyrė, kol* n *kartų laimėjo. Koks pinigų, išleistų loterijos bilietams, vidurkis?*

Atsakymai

1. $49/4 = 12\frac{1}{4}$. **2.** $56/35 = 1\frac{21}{35}$. **3.** $a \cdot \lambda$ *minučių.* **4.** np^{-2} *eurų.* **5.** $n(1-p)$.

3.11 Atsitiktinių dydžių dispersija

Jei į vienodus apvalius taikinius šaudys taiklus ir netaiklus šauliai, pataikymo taškų koordinačių vidurkiai bus tikriausiai vienodi. O kuo rezultatai skirsis? Pataikymo taškų išsibarstymu apie taikinio centrą.

Vienoje gatvės pusėje gyvena dešimt žmonių, jų vidutinis mėnesinis uždarbis 1 tūkstantis eurų. Kitoje – taip pat dešimt žmonių, o jų mėnesinio uždarbio vidurkis tas pats. Atrodo, visiškai vienoda padėtis abiejose gatvės pusėse. Tačiau nepasakiau dar vienos aplinkybės – vienoje gatvės pusėje visi gyventojai uždirba po 1 tūkstantį, o kitoje – vienas uždirba 10 tūkstančių, o kiti devyni apskritai neturi darbo!

Taigi tą pati vidurkį gali turėti labai įvairūs dydžiai. Panagrinėkime atsitiktinį dydį X, tolygiai pasiskirsčiusį intervale $[-1; 1]$ ir dar keturis diskrečiuosius atsitiktinius dydžius:

$$P(X_0 = 0) = 1; \quad P(X_1 = x) = \frac{1}{2}, \quad x = \pm 1;$$
$$P(X_2 = x) = \frac{1}{4}, \quad x = \pm\frac{1}{2}, \ \pm 1; \quad P(X_3 = x) = \frac{1}{6}, \quad x = \pm\frac{1}{4}, \ \pm\frac{1}{2}\ , \pm 1.$$

Dydžiai skirtingi, bet visų jų vidurkiai lygūs nuliui: $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_i] = 0$. Kurio dydžio reikšmės mažiausiai, kurio daugiausiai išsibarsčiusios apie vidurkį? Į pirmą klausimą atsakymas aiškus – dydis X_0 yra išsigimęs, jo reikšmės iš viso nėra išsibarsčiusios. Kad galėtume palyginti kitų dydžių reikšmių išsibarstymą, reikalingas reikšmių išsibarstymo matas. Kyla natūrali mintis – surasti reikšmių nuokrypių (atstumų) nuo vidutinės reikšmės vidurkį. Atstumas yra reikšmės ir vidurkio skirtumo modulis. Modulis nėra labai patogi funkcija, todėl vietoje jo panaudosime skirtumo kvadratą.

Atsitiktinio dydžio dispersija

34 apibrėžimas. *Tegu X – atsitiktinis dydis, turintis vidurkį. Jeigu dydis $(X - \mathbf{E}[X])^2$ taip pat turi vidurkį, tai jį vadinsime dydžio X dispersija. Žymėsime*

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

Dydį $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}[X]}$ vadinsime atsitiktinio dydžio X standartiniu nuokrypiu.

Dispersiją suvoksime kaip dydžio reikšmių išsibarstymo matą. Žinoma, kartais dispersija gali ir neegzistuoti. Apskaičiuokime dydžių, apibrėžtų skyrelio pradžioje, dispersijas. Kadangi $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_i] = 0$, tai $\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2], \mathbf{D}[X_i] = \mathbf{E}[X_i^2]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}[X_0] = \mathbf{E}[X_0^2] = 0, \quad \mathbf{D}[X_1] = \mathbf{E}[X_1^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,\\
&\mathbf{D}[X_2] = \mathbf{E}[X_2^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 \cdot \frac{1}{4} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8},\\
&\mathbf{D}[X_3] = \mathbf{E}[X_3^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 1^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{16},\\
&\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Taigi $\mathbf{D}[X_1] > \mathbf{D}[X_2] > \mathbf{D}[X_3] > \mathbf{D}[X] > \mathbf{D}[X_0]$.

Kam lygios mums žinomų atsitiktinių dydžių dispersijos? Prieš pradėdami skaičiuoti, nustatykime svarbiausias dispersijos savybes.

Dispersijos savybės

38 teorema. *Teisingi šie teiginiai:*

1. *jeigu atsitiktinis dydis X turi dispersiją, ji neneigiama:* $\mathbf{D}[X] \geqslant 0$; $\mathbf{D}[X] = 0$ *tada ir tik tada, kai dydis X yra išsigimęs;*
2. *teisinga lygybė* $\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$;
3. *jei c yra skaičius, tai* $\mathbf{D}[cX] = c^2\mathbf{D}[X]$;
4. *jeigu nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X, Y turi dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją ir* $\mathbf{D}[X+Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y]$.

Įrodymas. Pirmosios savybės neįrodinėsime. Kad ji teisinga, niekas tikriausiai nesuabejos, tačiau griežtai matematiškai įrodyti, kad tik išsigimusių atsitiktinių dydžių dispersijos lygios nuliui, nėra labai paprasta.

Įrodysime, kad dispersiją galima skaičiuoti naudojantis antro teiginio formule. Prisiminkime mokyklinę skirtumo kvadrato formulę:

$$(X - \mathbf{E}[X])^2 = X^2 - 2 \cdot \mathbf{E}[X] \cdot X + \mathbf{E}[X]^2.$$

Lygybės kairės pusės vidurkis lygus dispersijai. Dešinės pusės reiškiniui pritaikysime vidurkio adityvumo savybę. Pasinaudoję tuo, kad dydžiai $2 \cdot \mathbf{E}[X]$ ir $\mathbf{E}[X]^2$ yra konstantos, gausime

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[2 \cdot \mathbf{E}[X] \cdot X] + \mathbf{E}[\mathbf{E}[X]^2]\\
&= \mathbf{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[\mathbf{E}[X]^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.
\end{aligned}$$

Įrodysime trečiąją savybę. Panaudoję ką tik įrodytą dispersijos formulę dydžiui $Y = cX$, gausime

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[cX] &= \mathbf{E}[(cX)^2] - \mathbf{E}[cX]^2 = c^2\mathbf{E}[X^2] - (c\mathbf{E}[X])^2 \\ &= c^2(\mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2) = c^2\mathbf{D}[X].\end{aligned}$$

Įrodysime ketvirtąją savybę. Kad atsitiktinių dydžių suma turi dispersiją, įrodyti nesunku. Pritaikę paprastą nelygybę $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ su $a = X - \mathbf{E}[X], b = Y - \mathbf{E}[Y]$, gausime

$$(X+Y-\mathbf{E}[X+Y])^2 = (X-\mathbf{E}[X]+Y-\mathbf{E}[Y])^2 \leqslant 2(X-\mathbf{E}[X])^2 + 2(Y-\mathbf{E}[Y])^2.$$

Kadangi dešinėje nelygybės pusėje užrašytas atsitiktinis dydis turi vidurkį, tai jį turės ir kairės pusės atsitiktinis dydis, t. y. atsitiktinių dydžių, turinčių dispersijas, sumos dispersija irgi egzistuoja. Netgi nesvarbu, dydžiai priklausomi ar ne.

Kadangi X, Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai $\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y]$. Dydžių sumos dispersijos formulę įrodysime pasinaudoję tokiomis lygybėmis:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[X+Y] &= \mathbf{E}[(X+Y)^2] - \mathbf{E}[X+Y]^2, \\ \mathbf{E}[(X+Y)^2] &= \mathbf{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbf{E}[X^2] + 2\cdot\mathbf{E}[X]\cdot\mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Y^2], \\ \mathbf{E}[X+Y]^2 &= (\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y])^2 = \mathbf{E}[X]^2 + 2\cdot\mathbf{E}[X]\cdot\mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Y]^2, \\ \mathbf{D}[X+Y] &= \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[X]^2 - \mathbf{E}[Y]^2 = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y].\end{aligned}$$

Ketvirtąją savybę galime apibendrinti.

Dispersijos adityvumo savybė

39 teorema. *Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai jų suma taip pat turi dispersiją ir*

$$\mathbf{D}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n].$$

O dabar apskaičiuokime anksčiau nagrinėtų atsitiktinių dydžių dispersijas.

Jeigu dydis įgyja tik vieną reikšmę, t. y. yra išsigimęs, tai jo dispersija lygi nuliui. Tegu X yra dydis, įgyjantis dvi reikšmes:

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = q, \quad 0 < p < 1,\ q = 1-p.$$

Kadangi $X^2 = X$, tai $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X] = p$ ir

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Tegu dabar X yra binominis dydis, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Šį dydį galime suvokti kaip sėkmių skaičių Bernulio schemoje ir išreikšti nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-asis bandymas sėkmingas,} \\ 0, & \text{jei } i\text{-asis bandymas nesėkmingas.} \end{cases}$$

Jau apskaičiavome dydžių, įgyjančių reikšmes $0, 1$, dispersiją, taigi $\mathbf{D}[X_i] = pq$. Pasinaudoję nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos dispersijos savybe gausime

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n] = npq.$$

Binominis atsitiktinis dydis

Jei $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, tai

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$
$$\mathbf{E}[X] = np, \quad \mathbf{D}[X] = np(1-p).$$

Tegu dabar X yra Puasono dydis, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Žinome, kad $\mathbf{E}[X] = \lambda$. Dispersijos reikšmę galime pabandyti įspėti, naudodamiesi Bernulio schemos ir Puasono dydžio sąryšiu: jei vieno bandymo sėkmės tikimybė p_n mažėja, kai n auga, ir $np_n \to \lambda$, tai sėkmių skaičiaus tikimybės $P(S_n = m)$ artėja prie Puasono dydžio tikimybių $P(X = m)$. Galime spėti, kad $\mathbf{D}[S_n] \to \mathbf{D}[X]$. Tačiau $\mathbf{D}[S_n] = np_n(1 - p_n) \to \lambda(1 - 0) = \lambda$. Taigi, galime manyti, kad $\mathbf{D}[X] = \lambda$. Įsitikinkime tuo skaičiuodami:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2, \\
&\mathbf{E}[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m}{m!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda, \\
&\mathbf{E}[X^2] = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m}{m!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (m - 1 + 1) \cdot \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \cdot \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda \cdot \mathbf{E}[X] + \lambda \cdot 1, \\
&\mathbf{D}[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Puasono dydis

Jei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, *tai*

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathbf{E}[X] = \mathbf{D}[X] = \lambda.$$

Jeigu Bernulio schemos bandymus atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius X bus geometrinis dydis, $X \sim \mathcal{G}(p)$. Apskaičiavome jo vidurkį $\mathbf{E}[X] = 1/p$. Jeigu žinotume $\mathbf{E}[X^2]$ reikšmę, galėtume apskaičiuoti ir $\mathbf{D}[X]$. Pabandykime surasti $\mathbf{E}[X^2]$ nesinaudodami apibrėžimu, tačiau pasitelkę kiek rizikingus samprotavimus.

Jeigu per pirmą bandymą pasitaikys sėkmė (tai įvyksta su tikimybe p), tai $X^2 = 1^2 = 1$. Jei nesėkmė, viskas prasideda tarsi iš pradžių ir $X^2 = (1+Y)^2$, čia $Y \sim \mathcal{G}(p)$ vėl geometrinis dydis. Taigi galime manyti, kad

$$\mathbf{E}[X^2] = p \cdot 1^2 + q \cdot \mathbf{E}[(1+Y)^2].$$

O dabar pažymėkime $a = \mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[Y^2]$ ir šiek tiek paskaičiuokime, pasinaudodami, kad $\mathbf{E}[Y] = 1/p$:

$$a = p + q\mathbf{E}[1 + 2Y + Y^2] = p + q + 2q\mathbf{E}[Y] + q\mathbf{E}[Y^2] = 1 + \frac{2q}{p} + qa,$$
$$(1-q)a = 1 + \frac{2q}{p}, \quad a = \mathbf{E}[X^2] = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2},$$
$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Gavome teisingą dispersijos reikšmę! Kas netiki, gali apskaičiuoti ją naudodamasis dispersijos apibrėžimu.

Geometrinis atsitiktinis dydis

Jei $X \sim \mathcal{G}(p)$, *tai* $P(X = m) = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots, \ q = 1 - p,$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{q}{p^2}.$$

48 pavyzdys. Kolekcionieriaus uždavinys

Matematikoje nėra paties svarbiausio uždavinio, o prekyboje yra – kaip ištraukti kuo daugiau pinigų iš pirkėjų kišenių. Viena iš šio uždavinio sprendimo idėjų – susieti pirkimą su kolekcionavimo arba loterijų aistra.

Tarkime, futbolo čempionato finale žaidžia n šalių komandų. Gaiviųjų (arba kiek stipresnių) gėrimų gamintojai taip pat pasiruošė čempionatui – patiekė gėrimų, kurių dangteliai pažymėti šalių dalyvių vėliavėlėmis, partiją. Jei surinksite dangtelius su visomis vėliavėlėmis, galbūt ką nors laimėsite. Tačiau koks dangtelis jums teko, pamatysite tik nusipirkę!

Jei N_i yra i-ąja vėliavėle pažymėtų dangtelių skaičius, tai, tarkime, šie kiekiai lygūs: $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$. Be to, nepažymėtų dangtelių nėra. Taigi tikimybė, kad nusipirkę gėrimą gausite dangtelį su i-osios šalies vėliavėle, lygi $1/n$.

Kiek butelių vidutiniškai reikia nusipirkti, kad surinktume visą n dangtelių rinkinį? Tegu X reiškia nusipirktų butelių skaičių. Tada X yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $n; n+1; n+2; \ldots$ Apskaičiuoti vidurkį pagal apibrėžimą – sudėtingas uždavinys, todėl paieškokime aplinkinio kelio.

Tegu X_1 – pirkinių skaičius, kol gausime pirmąjį kolekcijos dangtelį. Akivaizdu, kad $X_1 = 1$. Tarkime, teko nusipirkti dar X_2 butelių, kol gavome antrąjį (skirtingą nuo pirmojo) dangtelį. Pažymėkime – X_3 pirkinių skaičius, kuris padidino mūsų kolekciją iki 3 dangtelių, ir t. t. Taigi

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \tag{3.7}$$

Pagal kokius dėsnius pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_i? Dydis X_1 yra išsigimęs atsitiktinis dydis, o X_2 galime suvokti kaip Bernulio bandymų iki pirmos sėkmės skaičių, kai sėkmės tikimybė $p_2 = (n-1)/n$. Taigi $X_2 \sim \mathcal{G}(p_2)$. Panašiai galime samprotauti ir apie kitus dydžius:

$$X_3 \sim \mathcal{G}(p_3), \quad \ldots, \quad X_n \sim \mathcal{G}(p_n), \quad p_j = \frac{n-j+1}{n}.$$

Be to, – dydžiai X_j yra nepriklausomi! Taigi adityvumo savybe galime naudotis skaičiuodami tiek vidurkį, tiek dispersiją:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n] = 1 + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = n\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}, \\
\mathbf{D}[X] &= \mathbf{D}[X_1] + \cdots + \mathbf{D}[X_n] = 0 + \frac{1-p_2}{p_2^2} + \cdots + \frac{1-p_n}{p_n^2} = n\sum_{m=1}^{n}\frac{n-m}{m^2.}
\end{aligned}$$

Tarkime, $n = 20$, o vienas pirkinys kainuoja 1 eurą. Kokio dydžio laimėjimą gamintojai gali pažadėti kolekcininkams nebijodami nuostolių? Kadangi

$$\mathbf{E}[X] = 20 \cdot \sum_{m=1}^{20}\frac{1}{m} \approx 20 \cdot 3{,}6 = 72,$$

kol surinks visus dangtelius kolekcininkas vidutiniškai išleis 72 eurus. Taigi gamintojai gali skelbti, kad už surinktus dangtelius išmokės, pavyzdžiui, 70 eurų, ir tikrieji laimėtojai bus jie!

O kas pasikeistų, jeigu ne visi dangteliai, o tik $100 \cdot p$ % būtų pažymėti, čia $0 < p < 1$? Tada (3.7) sumos dydžiai būtų tokie:

$$X_1 \sim \mathcal{G}(p), \quad X_2 \sim \mathcal{G}\big(p \cdot \frac{n-1}{n}\big), \quad \dots, \quad X_n \sim \mathcal{G}\big(p \cdot \frac{1}{n}\big),$$

ir

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \dots + \mathbf{E}[X_n] = \frac{n}{p} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

Vidutinis pirkinių skaičius padidėtų $1/p$ karto.

Apskaičiuosime Paskalio atsitiktinio dydžio dispersiją. Paskalio dydį $X \sim \mathcal{B}^-(n,p)$ galima išreikšti geometriniais dydžiais

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n - n, \quad Y_i \sim \mathcal{G}(p).$$

Prisiminę dydžių Y_j prasmę galime teigti, kad atsitiktiniai dydžiai Y_j yra nepriklausomi. Tada

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y_1] + \mathbf{D}[Y_2] + \dots + \mathbf{D}[Y_n] = \frac{nq}{p^2}.$$

Paskalio atsitiktinis dydis

Jei $X \sim \mathcal{B}^-(n,p)$, *tai* $P(X = m) = C_{m+n-1}^{m} p^n q^m, \ m = 0, 1, \dots,$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{nq}{p}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{nq}{p^2}.$$

O dabar imkimės absoliučiai tolydžių atsitiktinių dydžių dispersijų. Paprasčiausi iš šių dydžių – tolygiai pasiskirstę.

Tegu $X \sim T([a;b])$. Žinome vidurkio reikšmę: $\mathbf{E}[X] = (a+b)/2$. Apskaičiuosime $\mathbf{E}[X^2]$:

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Taigi

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis

Jeigu $X \sim \mathcal{T}([a,b])$, *tai*

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \textit{jei } x \in [a;b], \\ 0, & \textit{jei } x \notin [a,b], \end{cases} \quad \mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Panagrinėkime eksponentinį dydį, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Žinome, kad $\mathbf{E}[X] = 1/\lambda$. Taigi, kad surastume dispersiją, turėtume apskaičiuoti

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} x^2 \ \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x.$$

Tai nesudėtingas integravimo uždavinys, tačiau pabandykime išsisukti nuo jo. Dar kartą pasinaudokime geometrinio ir eksponentinio dydžio sąryšiu. Tegu vienas bandymas su dviem baigtimis trunka $1/n$ laiko vienetų, sėkmės tikimybė p_n, be to $np_n \to \lambda, \lambda > 0, n \to \infty$. Jeigu bandymus atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius bus geometrinis dydis X_n. Žinome, kad $\mathbf{D}[X_n] = q_n/p_n^2$, $q_n = 1 - p_n$. Nustatėme, kad

$$P\Big(\frac{X_n}{n} > t\Big) \to P(X > t),$$

t. y. atsitiktinis dydis $\frac{X_n}{n}$ darosi vis panašesnis į X. Todėl galime tikėtis, kad $\mathbf{D}[X_n/n]$ artėja prie $\mathbf{D}[X]$. Tačiau

$$\mathbf{D}[X_n/n] = \frac{\mathbf{D}[X_n]}{n^2} = \frac{q_n}{(np_n)^2} \to \frac{1}{\lambda^2}, \quad n \to \infty.$$

Taigi galime spėti, kad $\mathbf{D}[X] = 1/\lambda^2$. Ir šis spėjimas teisingas!

Eksponentinis dydis

Jei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, *tai*

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \textit{jei } x \geqslant 0, \end{cases}, \quad \mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Nagrinėdami Puasono procesą apibrėžėme gama dydžius. Gama dydžio reikšmę galima suvokti kaip laikotarpio nuo stebėjimo pradžios iki k-ojo įvykio (telefono skambučio, meteoro kritimo...) pasirodymo trukmę. Nustatėme, kad gama dydis $X \sim \Gamma(k, \lambda)$ yra eksponentinių dydžių suma:

$$X = T_{0|1} + T_{1|2} + \cdots + T_{k-1|k}, \quad T_{j-1|j} \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

Prisiminę Puasono proceso savybes tikriausiai sutiksite, kad atsitiktiniai dydžiai $T_{j-1|j}$ yra nepriklausomi. Taigi galime pasinaudoti dispersijos adityvumo savybe:

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[T_{0|1}] + \mathbf{D}[T_{1|2}] + \cdots + \mathbf{D}[T_{k-1|k}] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Gama dydis

Jei $X \sim \Gamma(k, \lambda)$, *tai*

$$p_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{jei } t < 0, \\ \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{jei } t \geqslant 0, \end{cases}, \quad \mathbf{E}[X] = \frac{k}{\lambda}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

O kam gi lygi normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dispersija? Pradėkime nuo standartinio normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Muavro ir Laplaso teorema teigia, kad į šį dydį, kai $n \to \infty$, vis labiau darosi „panašus“ atsitiktinis dydis Y_n, susijęs su Bernulio schema:

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[S_n]}},$$

čia S_n yra sėkmių skaičius Bernulio schemoje, taigi $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Galime tikėtis, kad ir dydžio Y_n vidurkis, ir dispersija artėja prie $\mathbf{E}[X]$ ir $\mathbf{D}[X]$. Iš tikrųjų, $\mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}[X] = 0$, o

$$\mathbf{D}[Y_n] = \mathbf{E}[Y_n^2] = \mathbf{E}\Big[\Big(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[S_n]}}\Big)^2\Big] = \frac{\mathbf{D}[S_n]}{\mathbf{D}[S_n]} = 1.$$

Taigi galime spėti, kad ir $\mathbf{D}[X] = 1$. Ir tai tiesa.

Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, tai tokį dydį galime išreikšti standartiniu normaliuoju dydžiu: $X = \sigma X_0 + \mu, X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Taigi

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[\sigma X_0 + \mu] = \mathbf{D}[\sigma X_0] + \mathbf{D}[\mu] = \sigma^2 \mathbf{D}[X_0] + 0 = \sigma^2.$$

Normalusis dydis

Jei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *tai*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad \mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{D}[X] = \sigma^2.$$

Uždaviniai

1. *Yra du simetriški šešiasieniai kauliukai. Vieno kauliuko sienelės pažymėtos skaičiais* $1, 1, 3,\ 4, 5, 6$, *kito – skaičiais* $1, 2, 3, 4, 6, 6$. *Atsitiktinių dydžių* X_1, X_2 *reikšmės – skaičiai ant atvirtusių kauliukų sienelių. Kurio dydžio reikšmės išsibarsčiusios labiau, t. y. kurio dydžio dispersija didesnė?*

2. *Atsitiktinio dydžio* X *reikšmė – akučių skaičius ant atvirtusios įprastinio simetriško lošimo kauliuko sienelės ,* Y *– iš intervalo* $[0; a]$ *atsitiktinai parinktas skaičius. Kokia turėtų būti* a *reikšmė, kad abiejų dydžių dispersijos būtų vienodos?*

3. *Urnoje yra trys balti ir keturi juodi rutuliai. Atsitiktinai iš urnos negrąžinimo traukiame tris rutulius. Dydžio* X *reikšmė – baltų rutulių skaičius,* Y *– juodų rutulių skaičius. Apskaičiuokite dispersijas* $\mathbf{D}[X], \mathbf{D}[Y]$. *Dydžio* X *dispersiją skaičiuokite pasinaudoję formule* $\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$, *o dydžio* Y *dispersijai skaičiuoti panaudokite sąryšį* $X + Y = 3$.

4. *Tikimybė, kad krepšininkas pataikys baudos metimą yra* 0,6. *Krepšininkas ketina mesti į krepšį šešis kartus. Koks taiklių metimų skaičiaus vidurkis ir dispersija? Koks būtų taiklių metimų skaičiaus* X *vidurkis ir dispersija, jeigu po kiekvieno metimo tikimybė pataikyti būtų* 10 % *mažesnė už buvusią?*

5. *Geometrinio dydžio* $X \sim \mathcal{G}(p)$ *dispersija ir vidurkis susiję lygybe* $\mathbf{D}[X] = \frac{1}{3}\mathbf{E}[X]$. *Raskite* $\mathbf{E}[X], \mathbf{D}[X]$.

6. *Įsitikinkite, kad kiekvienas eksponentinis atsitiktinis dydis* X *tenkina lygybę* $\mathbf{D}[X] = (\mathbf{E}[X])^2$. *Įrodykite, kad geometrinių dydžių, tenkinančių šią sąlygą, nėra. Įrodykite, kad yra vienas šią savybę turintis Puasono dydis bei galo daug binominių ir normaliųjų dydžių.*

Atsakymai

1. $\mathbf{D}[X_1] = \mathbf{D}[X_2] = 32/9$. **2.** $a = \sqrt{35}$. **3.** $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y] = 24/49$. **4.** $\mathbf{E}[X] = 3{,}6; \mathbf{D}[X] = 1{,}44$; *ir* $\mathbf{E}[X] \approx 2{,}811; \mathbf{D}[X] \approx 1{,}452$. **5.** $\mathbf{E}[X] = 4/3; \mathbf{D}[X] = 4/9$.

3.12 Didžiųjų skaičių dėsnis

Didžiųjų skaičių dėsnis jau tapo kasdienio mūsų mąstymo dalimi. Pavyzdžiui, kai meterologas norėdamas įvertinti vidutinę mėnesio temperatūrą, sumuoja matavimų rezultatus ir dalija iš matavimų skaičiaus – taiko didžiųjų skaičių dėsnį.

Jeigu reikia išmatuoti kokio nors dydžio reikšmę, be matavimo įrankių neapsieisime. Tarkime, tikroji dydžio reikšmė yra a, bet jos mes nežinome. Kadangi absoliučiai tikslių matavimo įrankių nebūna, išmatavę gauname reikšmę x_1, kuri dėl matavimo paklaidos skiriasi nuo a. Taigi galime manyti, kad x_1 yra atsitiktinio dydžio X_1, kurio vidurkis $\mathbf{E}[X_1] = a$, reikšmė. Norėdami gauti tikslesnę dydžio reikšmę, matavimus kartojame, o paskui – imame gautųjų matavimo rezultatų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidurkį

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ir manome, kad $y_n \approx a$. Kuo pagrįsta tokia mūsų nuomonė?

Žinome, kad išsigimusio atsitiktinio dydžio dispersija yra lygi nuliui. Mūsų matavimo rezultatai – nepriklausomų, tą pačią pasiskirstymo funkciją turinčių atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reikšmės. Jų vidurkiai $\mathbf{E}[X_j] = a$ lygūs mus dominančio dydžio reikšmei, pažymėkime dispersijas $\mathbf{D}[X_j] = \sigma^2$. Matavimų rezultatų aritmetinis vidurkis yra atsitiktinio dydžio

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

reikšmė. Tada

$$\mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}\Big[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]}{n} = a,$$
$$\mathbf{D}[Y_n] = \frac{\mathbf{D}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Taigi didėjant n, vidurkis $\mathbf{E}[Y_n]$ nesikeičia, o dispersija $\mathbf{D}[Y_n] \to 0$. Kitaip tariant, atsitiktinis dydis Y_n darosi vis panašesnis į išsigimusį atsitiktinį dydį, įgyjantį reikšmę a, kuri mums rūpi. Taigi, kai n yra didelis, galime manyti, kad imdami dydžio Y_n reikšmę y_n nedaug apsiriksime. Tokia yra didžiųjų skaičių dėsnio esmė: **didelė tikimybė, kad daugelio nepriklausomų matavimų reikšmių aritmetinis vidurkis nedaug skirsis nuo tikrosios dydžio reikšmės.**

O dabar pabandykime šį svarbų dėsnį, kuris tarsi nutiesia tiltą tarp teorijos ir praktikos, suformuluoti ir įrodyti matematiškai. Pirmiausia įrodysime paprastą, bet labai naudingą nelygybę.

Prisiminkime vieną dydžių vidurkio savybę. Jeigu $g_1(x), g_2(x)$ yra dvi funkcijos ir $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, tai su kiekvienu atsitiktiniu dydžiu Y bus teisinga nelygybė

$$\mathbf{E}[g_1(Y)] \leqslant \mathbf{E}[g_2(Y)], \tag{3.8}$$

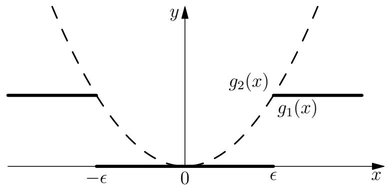
žinoma, jeigu tik vidurkiai egzistuoja. Pasirinkime kokį nors skaičių $\epsilon > 0$ ir apibrėžkime dvi funkcijas:

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } -\epsilon < x < \epsilon, \\ 1, & \text{jei } |x| \geqslant \epsilon, \end{cases} \qquad g_2(x) = \frac{x^2}{\epsilon^2}.$$

Brėžinyje pavaizduoti abiejų funkcijų grafikai, akivaizdu, kad $g_1(x) \leqslant g_2(x)$.

Tada, pritaikę (3.8) nelygybę atsitiktiniam dydžiui Y, gausime

$$\mathbf{E}[g_1(Y)] \leqslant \mathbf{E}[g_2(Y)] = \frac{\mathbf{E}[Y^2]}{\epsilon^2}.$$



Panagrinėkime dydį $g_1(Y)$. Jis įgyja tik dvi reikšmes. Jeigu $|Y| < \epsilon$, tai $g_1(Y) = 0$, jeigu $|Y| \geqslant \epsilon$, tai $g_1(Y) = 1$. Taigi

$$\mathbf{E}[g_1(Y)] = 0 \cdot P(|Y| < \epsilon) + 1 \cdot P(|Y| \geqslant \epsilon) = P(|Y| \geqslant \epsilon).$$

Gavome, kad su bet kokiu $\epsilon > 0$ atsitiktiniam dydžiui Y teisinga nelygybė

$$P(|Y| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}[Y^2]}{\epsilon^2}. \tag{3.9}$$

Suformuosime vieną svarbią išvadą.

Čebyšovo nelygybė

40 teorema. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, turintis vidurkį ir dispersiją. Tada kiekvienam $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}[X]}{\epsilon^2}. \tag{3.10}$$

Įrodymas. Jeigu nelygybėje (3.9) imsime $Y = |X - \mathbf{E}[X]|$ ir pastebėsime, kad $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{D}[X]$, gausime nelygybę, kurią reikia įrodyti.

O dabar suformuluokime didžiųjų skaičių dėsnį.

Didžiųjų skaičių dėsnis

41 teorema. *Tegu $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tą patį vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$ ir tą pačią dispersiją. Tada kiekvienam $\epsilon > 0$*

$$P\Big(\Big|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\Big| \geqslant \epsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Įrodymas. Teorema tvirtina: tikimybė, kad aritmetinis reikšmių vidurkis skirsis nuo a daugiau kaip dydžiu ϵ, yra maža, kai n reikšmės didelės. yra maža.

Pažymėkime $\mathbf{D}[X_j] = \sigma^2$ ir $X = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Kadangi

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \frac{na}{n} = a,$$

$$\mathbf{D}[X] = \frac{\mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n]}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

tai įstatę į (3.10), gausime

$$P\Big(\Big|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\Big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}, \quad \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Teorema įrodyta.

Didžiųjų skaičių dėsnis – vienas iš pagrindinių įrankių, kuriais naudojamės, kai norime gauti žinių iš sukauptų duomenų.

Tarkime, mums rūpi ryšio tarp mūsų kompiuterio ir kokio nors serverio nustatymo laikas. Šis laikas priklauso nuo įvairiausių veiksnių, taigi yra atsitiktinis dydis. Pažymėkime jį T. Kokia tikimybė, kad prireiks, pavyzdžiui, mažiau kaip 5 milisekundžių, t. y. kam lygi tikimybė $p = P(T < 5) = F_T(5)$? Dydžio pasiskirstymo funkcijos nežinome, tačiau galime atlikti daug bandymų ir gauti daug duomenų. Pažymėkime X_1 atsitiktinį dydį, įgyjantį reikšmes 0 ir 1 :

$$X_1 = \begin{cases} 0, & \text{pirmame bandyme ryšiui užmegzti prireikė ne mažiau kaip 5 ms,} \\ 1, & \text{pirmame bandyme ryšys užmegztas greičiau nei per 5 ms.} \end{cases}$$

Su kitais bandymais susiekime analogiškai apibrėžtus atsitiktinius dydžius $X_2, X_3, \ldots$. Galime padaryti prielaidą, kad dydžiai nepriklausomi. Be to,

$$P(X_j = 1) = P(T < 5) = p, \quad P(X_j = 0) = 1 - p, \quad \mathbf{E}[X_j] = p.$$

Iš didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia, kad su didelėmis n reikšmėmis

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \approx p.$$

Taigi, naudodamiesi Čebyšovo nelygybe, įvertinome nežinomą su stebimu atsitiktiniu dydžiu susijusio įvykio tikimybę.

Uždaviniai

1. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, turintis vidurkį $\mathbf{E}[X]$ ir dispersiją $\mathbf{D}[X] = \sigma^2$. Pasinaudokite Čebyšovo nelygybe ir įrodykite, kad su visais $m = 1, 2, \ldots$ teisinga nelygybė*

$$P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma) \leqslant \frac{1}{m^2}.$$

2. *Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[0; a]$, t. y. $X \sim \mathcal{T}([0; a])$. Apskaičiuokite tikimybes $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma)$, kai $m = 1, 2, \ldots$; čia $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}[X]}$ yra dydžio standartinis nuokrypis. Palyginkite tikimybių reikšmes su Čebyšovo nelygybės įverčiais.*

3. *Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį, t. y. $X \sim \mathcal{G}(1/3)$. Apskaičiuokite tikimybes $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma)$, kai $m = 1, 2$; čia $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}[X]}$ yra dydžio standartinis nuokrypis.*

4. *Pasinaudokite lentelėmis arba kompiuteriu ir apskaičiuokite tikimybes $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma)$, kai $X \sim \mathcal{N}(0; 1), m = 1, 2, 3$.*

5. *Įrodykite, kad tikimybių $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma)$ reikšmės yra tos pačios visiems normaliesiems dydžiams $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

Atsakymai

2. $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant \sigma) = (3 - \sqrt{3})/3 \approx 0{,}423; P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant m\sigma) = 0$, *kai* $m \geqslant 2$. **3.** $(2/3)^5 = 32/243$; $(2/3)^7 = 128/2187 \approx 0{,}0585$. **4.** $P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant \sigma) = P(|X| \geqslant 1) \approx 0{,}3173; P(|X| \geqslant 2) \approx 0{,}0455; P(|X| \geqslant 3) \approx 0{,}0027$.

3.13 Atsitiktinių dydžių koreliacija

Matematikos taikymų tikrovės reiškiniams esmė: matematika parodo, ką ir kaip galima matuoti. Kaip matuoti atsitiktinių dydžių priklausomybę?

Jeigu X, Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją, be to

$$\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y].$$

O dabar tarkime, kad X, Y gali būti ir priklausomi. Pabandykime rasti sumos dispersiją:

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{E}[(X + Y - \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[Y])^2] =\\&\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2 + 2(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y]) + (Y - \mathbf{E}[Y])^2] =\\&\mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])].\end{aligned}$$

Jeigu X, Y yra nepriklausomi, tai $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] = 0$. O jeigu priklausomi? Priklausomybė gali būti įvairi – ir silpnesnė, ir stipresnė. Kaip kiekybiškai matuoti jos pobūdį? Galbūt tam tinka skaičius

$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])],$$

kurio reikšmei daro įtaką abu dydžiai? Tačiau ar šis dydis (sandaugos vidurkis) iš viso egzistuoja? Į šį klausimą atsakyti nesunku. Jeigu akivaizdžioje nelygybėje $2ab \leqslant a^2 + b^2$ imsime $a = |X - \mathbf{E}[X]|, b = |Y - \mathbf{E}[Y]|$, gausime

$$2|(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y]| \leq (X - \mathbf{E}[X])^2 + (Y - \mathbf{E}[Y])^2.$$

Jei atsitiktiniai dydžiai X, Y turi dispersijas, tai nelygybės dešiniosios pusės reiškinio vidurkis egzistuoja, todėl egzistuos ir kairiosios pusės vidurkis, t. y. dydis $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$.

Atsitiktinių dydžių kovariacija

35 apibrėžimas. *Tegu X, Y yra du atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas. Jų kovariacija vadinsime skaičių*

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])].$$

Iš pradžių išvesime kitą, dažnai patogesnę formulę kovariacijai skaičiuoti.

42 teorema. *Atsitiktinių dydžių X, Y kovariacijai teisinga lygybė*

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

Įrodymas. Užrašykime tokią kone akivaizdžią lygybę:

$$(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y]) = X \cdot Y - \mathbf{E}[Y] \cdot X - \mathbf{E}[X] \cdot Y + \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

Skaičiuokime abiejų pusių vidurkius. Kadangi $\mathbf{E}[X], \mathbf{E}[Y]$ yra skaičiai, tai

$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \cdot (Y - \mathbf{E}[Y])] = \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y] \cdot X] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[X] \cdot Y] +$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y]] = \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[Y] \cdot \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y],$$

arba

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

49 pavyzdys. Skaičiais pažymėti rutuliai

Urnoje yra trys balti rutuliai, pažymėti skaičiais $1, 0, 0$, ir du juodi, ant kurių užrašyti skaičiai $1, 1$. Atsitiktinai negrąžinant traukiami du rutuliai, dydis X lygus baltų rutulių skaičiui, o Y – skaičių, užrašytų ant rutulių, sumai. Apskaičiuosime dydžių kovariaciją. Iš pradžių sudarykime tikimybių $P(X = x, Y = y)$ lentelę:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	
$Y = 0$	0	0	0,1	0,1
$Y = 1$	0	0,4	0,2	0,6
$Y = 2$	0,1	0,2	0	0,3
	0,1	0,6	0,3	

Susumavę skaičius, surašytus stulpeliuose, gauname dydžio X reikšmių tikimybes, o eilutėse – dydžio Y reikšmių tikimybes. Skaičiuodami vidurkius galime nerašyti tų dėmenų, kurie lygūs nuliui:

$$\mathbf{E}[X \cdot Y] = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}2,$$
$$\mathbf{E}[X] = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2,$$
$$\mathbf{E}[Y] = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 1,2,$$
$$cov(X,Y) = 1{,}2 - 1{,}2 \cdot 1{,}2 = -0{,}84.$$

Pasvarstykime, kodėl pavyzdžio dydžiams gavome neigiamą kovariacijos reikšmę:

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] < 0.$$

Ši nelygybė reiškia, kad kai dydis X įgyja didesnes už vidurkį reikšmes, t. y. $X - \mathbf{E}[X] > 0$, dydis Y linkęs įgyti mažesnes reikšmes, t. y. $Y - \mathbf{E}[Y] < 0$ ir, atvirkščiai. Taip ir yra: daugiau baltų rutulių – mažesnė skaičių suma, nes baltų rutulių numeriai mažesni.

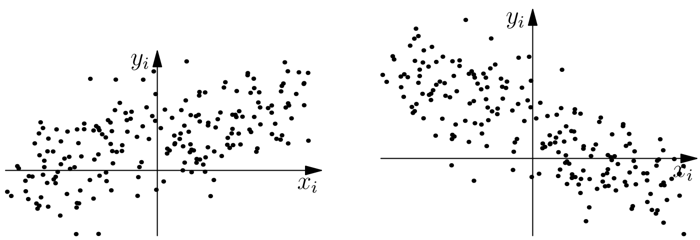
Taigi, jei kovariacija yra neigiama, tai esant didesnėms vieno dydžio reikšmėms, kito dydžio reikšmės linkusios būti mažesnės. Jeigu kovariacija yra teigiama, tai esant didesnėms vieno dydžio reikšmėms ir kito dydžio reikšmės linkusios būti didesnės.

36 apibrėžimas. *Jeigu X, Y yra atsitiktiniai dydžiai ir $cov(X,Y) > 0$, tai dydžius vadinsime teigiamai koreliuotais, jeigu $cov(X,Y) < 0$, dydžius vadinsime neigiamai koreliuotais. Jeigu $cov(X,Y) = 0$, dydžius vadinsime nekoreliuotais.*

Tarkime, pakartoję bandymą n kartų, gavome atsitiktinių dydžių X, Y reikšmių poras

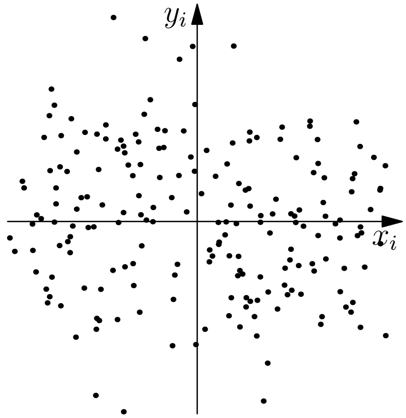
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Jas galime pavaizduoti plokštumos taškais. Jeigu dydžiai būtų teigiamai koreliuoti, taškai išsidėstytų pagal tiesę su teigiamu krypties koeficientu, žr. brėžinį. Jeigu $cov(X,Y) < 0$, taškai susitelktų apie tiesę su neigiamu krypties koeficientu.



Teigiamai ir neigiamai koreliuotų atsitiktinių dydžių reikšmių vaizdavimas plokštumoje

Jeigu $cov(X, Y) = 0$, taškai sudarytų „debesį“ ir grupavimosi neįžvelgtume.



Nekoreliuotų atsitiktinių dydžių reikšmės

Taigi kovariacijos reikšmė tam tikru būdu atspindi atsitiktinių dydžių ryšio pobūdį. Tačiau yra vienas trūkumas. Tarkime, atsitiktinis dydis X reiškia žmogaus ūgį, o Y – svorį, išreikštą kilogramais. Suprantama, kad $cov(X, Y) = \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y] > 0$. Jeigu išreikštume svorį gramais, gautume naują dydį $Y_1 = 1000Y$. X ir Y_1 priklausomybė yra ta pati kaip X ir Y, tačiau, apskaičiavę kovariaciją gautume

$$cov(X, Y_1) = \mathbf{E}[X \cdot Y_1] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y_1] = 1000 \cdot cov(X, Y).$$

Todėl dviejų dydžių priklausomybės laipsniui matuoti naudojama kiek pakeista skaitinė charakteristika.

Koreliacijos koeficientas

43 teorema. *Tegu X, Y yra atsitiktiniai dydžiai, turintys teigiamas dispersijas $\mathbf{D}[X] > 0, \mathbf{D}[Y] > 0$. Jų koreliacijos koeficientu vadinamas skaičius*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{D}[X] \cdot \mathbf{D}[Y]}}.$$

Jei bent vienas iš dydžių X, Y yra išsigimęs, tai sakysime, kad koreliacijos koeficientas lygus nuliui.

Įsitikinsime, kad koreliacijos koeficientas nepriklauso nuo to, kokie matavimo vienetai naudojami dydžių reikšmėms užrašyti. Įrodysime šiek tiek bendresnį teiginį.

44 teorema. *Tegu X, Y yra atsitiktiniai dydžiai, turintys teigiamas dispersijas $\mathbf{D}[X] > 0, \mathbf{D}[Y] > 0$, o a_1, a_2, b_1, b_2 – bet kokie skaičiai, $a_1, a_2 \neq 0$. Tada*

$$\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \begin{cases} \rho(X, Y), & \text{jei } a_1a_2 > 0, \\ -\rho(X, Y), & \text{jei } a_1a_2 < 0. \end{cases}$$

Įrodymas. Pažymėkime $X_1 = a_1X + b_1, Y_1 = a_2Y + b_2$. Tada

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X_1] = a_1\mathbf{E}[X] + b_1, \quad \mathbf{D}[X_1] = a_1^2\mathbf{D}[X], \\
&\mathbf{E}[Y_1] = a_2\mathbf{E}[Y] + b_2, \quad \mathbf{D}[Y_1] = a_2^2\mathbf{D}[Y], \\
&cov(X_1, Y_1) = \mathbf{E}[(X_1 - \mathbf{E}[X_1])(Y_1 - \mathbf{E}[Y_1])] = a_1a_2cov(X, Y), \\
&\rho(X_1, Y_1) = \frac{cov(X_1, Y_1)}{\sqrt{\mathbf{D}[X_1] \cdot \mathbf{D}[Y_1]}} = \frac{a_1a_2}{|a_1a_2|} \cdot \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{D}[X] \cdot \mathbf{D}[Y]}} = \frac{a_1a_2}{|a_1a_2|} \cdot \rho(X, Y).
\end{aligned}$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname teoremos teiginį.

Taigi koreliacijos koeficientas nesikeičia, kai dydžius tiesiškai transformuojame su to paties ženklo „skalės keitimo“ koeficientais a_1, a_2. Iš šios teoremos gauname, kad atsitiktinių dydžių X, Y ir $X_* = X - \mathbf{E}[X], Y_* = Y - \mathbf{E}[Y]$ koreliacijos koeficientai sutampa. Kadangi $\mathbf{E}[X_*] = \mathbf{E}[Y_*] = 0$, tai $\mathbf{D}[X_*] = \mathbf{E}[X_*^2], \mathbf{D}[Y_*] = \mathbf{E}[Y_*^2]$, ir

$$\rho(X, Y) = \rho(X_*, Y_*) = \frac{\mathbf{E}[X_* \cdot Y_*]}{\sqrt{\mathbf{E}[X_*^2] \cdot \mathbf{E}[Y_*^2]}}.$$

Kokias gi reikšmes gali įgyti koreliacijos koeficientas?

Koreliacijos koeficiento savybės

45 teorema. *Tegu X, Y yra neišsigimę atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas. Teisingi teiginiai*

1. $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$;
2. *jeigu $Y = aX + b$, čia a, b yra skaičiai, tai $\rho(X, Y) = 1$, kai $a > 0$ ir $\rho(X, Y) = -1$, kai $a < 0$;*
3. *jeigu $\rho(X, Y) = \pm 1$, tai egzistuoja tokie skaičiai $a, b, a \neq 0$,*

$$P(Y = aX + b) = 1.$$

Įrodymas. Naudodamiesi dydžiais X, Y sudarykime du naujus dydžius (vienas gaunamas imant pliuso, kitas minuso ženklą):

$$Z = \Big(\frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}} \pm \frac{Y - \mathbf{E}[Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y]}}\Big)^2,$$
$$Z = \frac{(X - \mathbf{E}[X])^2}{\mathbf{D}[X]} \pm 2 \cdot \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}} \cdot \frac{Y - \mathbf{E}[Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y]}} + \frac{(Y - \mathbf{E}[Y])^2}{\mathbf{D}[Y]}.$$

Kadangi $Z \geqslant 0$, tai $\mathbf{E}[Z] \geqslant 0$. Tačiau naudodamiesi paskutiniąja lygybe vidurkį galime užrašyti taip:

$$\mathbf{E}[Z] = 1 \pm 2\rho(X, Y) + 1 = 2(1 \pm \rho(X, Y)) \geqslant 0.$$

Dabar iš nelygybės $1 + \rho(X, Y) \geqslant 0$ gauname, kad $\rho(X, Y) \geqslant -1$, o iš nelygybės $1 - \rho(X, Y) \geqslant 0$ gauname, kad $\rho(X, Y) \leqslant 1$. Pirmą teiginį įrodėme.

Įrodykime antrą teiginį. Tegu $Y = aX + b$. Tada

$$\mathbf{E}[Y] = a\mathbf{E}[X], \quad \mathbf{D}[Y] = a^2\mathbf{D}[X],$$
$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] = a\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = a\mathbf{D}[X],$$
$$\rho(X, Y) = \frac{a\mathbf{D}[X]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]a^2\mathbf{D}[X]}} = \frac{a}{|a|}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia antras teoremos teiginys.

Trečiam teiginiui įrodyti pasinaudokime dydžiais Z. Jeigu $\rho(X, Y) = 1$, nagrinėkime dydį

$$Z = \Big(\frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}} - \frac{Y - \mathbf{E}[Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y]}}\Big)^2.$$

Viena vertus, $Z \geqslant 0$, tačiau, suskaičiavę vidurkį gavome

$$\mathbf{E}[Z] = 2(1 - \rho(X, Y)) = 0.$$

Tai įmanoma tik tada, kai Z yra išsigimęs, su tikimybe 1 įgyjantis reikšmę 0,

$$P\Big(\frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}} - \frac{Y - \mathbf{E}[Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[Y]}} = 0\Big) = 1.$$

Iš šios lygybės išplaukia trečias teoremos teiginys, kai $\rho(X, Y) = 1$. Atvejį $\rho(X, Y) = -1$ galime tirti analogiškai imdami dydžio Z išraiškoje pliuso ženklą.

Uždaviniai

1. *Atsitiktinis dydis X su tikimybėmis $1/3$ ir $2/3$ įgyja reikšmes 0 ir 1. Jeigu $X = 1$, tai ir $Y = 1$. Jeigu $X = 0$, tai metama simetriška moneta. Jeigu ji atvirsta herbu, imama* *reikšmė $Y = -a$, jeigu skaičiumi, tada $Y = +a$. Raskite $\rho(X, Y)$, kai $a = 1$. Kokia turėtų būti a reikšmė, kad būtų teisinga lygybė $\rho(X, Y) = 1/2$?*

2. *Dvi urnos: kiekvienoje yra po tris rutulius, pažymėtus skaičiais $1, 2, 3$. Iš pirmos urnos atsitiktinai ištraukiamas rutulys ir perkeliamas į kitą urną. Paskui rutulys traukiamas iš antros urnos. Atsitiktinių dydžių X, Y reikšmės – ant pirmo ir antro ištrauktų rutulių užrašyti skaičiai. Raskite $\rho(X, Y)$.*

3. *Metamas simetriškas lošimo kauliukas, atsitiktinio dydžio X reikšmė – atvirtusių akučių skaičius. Atsitiktinio dydžio Y reikšmė gaunama taip: metama simetriška moneta; jeigu atvirsta herbas, tai $Y = X + 1$; jeigu skaičius – $Y = X - 1$. Apskaičiuokite dydžių X, Y koreliacijos koeficientą. Skaičiavimai supaprastės, jeigu pasinaudosite tuo, kad $Y = X + Z$, čia Z yra dydis, su vienodomis tikimybėmis įgyjantis reikšmes -1 ir $+1$, be to, – dydžiai X, Z yra nepriklausomi.*

4. *Metami du simetriški lošimo kauliukai, X_1, X_2 – ant kauliukų atvirtusių akučių skaičiai. Apskaičiuokite dydžių $X = X_1 + X_2$ ir $Y = X_1 - X_2$ koreliacijos koeficientą.*

5. *Atliekami trys Bernulio schemos bandymai, vieno bandymo sėkmės tikimybė yra p. Apibrėžkime tokius atsitiktinius dydžius: S_{1-3} – sėkmių skaičius, gautas atlikus visus tris bandymus, S_{1-2} – sėkmių skaičius, gautas iš pirmų dviejų bandymų, N_{1-3}, N_{1-2} – atitinkami nesėkmių skaičiai. Apskaičiuokite $\rho(S_{1-3}, N_{1-3})$, $\rho(S_{1-3}, S_{1-2})$, $\rho(S_{1-3}, N_{1-2}.)$*

Atsakymai

1. $\rho(X, Y) = 2/\sqrt{10} \approx 0{,}632; a = \sqrt{2}$. **2.** $\rho(X, Y) = 1/4$. **3.** $\rho(X, Y) = \sqrt{35/47} \approx 0{,}813$. **4.** $\rho(X, Y) = 0$. **5.** $\rho(S_{1-3}, N_{1-3}) = -1; \rho(S_{1-3}, S_{1-2}) = 2/\sqrt{6} \approx 0{,}816$; $\rho(S_{1-3}, N_{1-2}) = -\rho(S_{1-3}, S_{1-2})$.

3.14 Centrinė ribinė teorema

Skaičiai e, π, kvadratinė šaknis, integralas – vienoje eilutėje! Neapsiriksite įtarę, kad čia teigiama kažkas labai svarbaus.

Tegu atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yra nepriklausomi ir turi tą pačią pasiskirstymo funkciją. Tada jų vidurkiai ir dispersijos (jeigu jos, žinoma, egzistuoja) bus tie patys. Pažymėkime $\mathbf{E}[X_j] = a, \mathbf{D}[X_j] = \sigma^2$. Dydžiams teisingas didžiųjų skaičių dėsnis, t. y. dydis

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{n},$$

didėjant n darosi vis labiau panašesnis į išsigimusį atsitiktinį dydį Y, įgyjantį reikšmę 0, $P(Y = 0) = 1$. Dydžių Y_n vidurkiai lygūs nuliui, o dispersijos mažėja:

$\mathbf{E}[Y_n] = 0, \mathbf{D}[Y_n] = \sigma^2/n \to 0, n \to \infty$. O dabar kiek pakeiskime šį dydį ir apibrėžkime

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Vidurkis nepasikeitė: $\mathbf{E}[Z_n] = 0$; apskaičiuokime dispersiją pasinaudodami dydžių nepriklausomumu:

$$\mathbf{D}[Z_n] = \mathbf{D}\Big[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{na}{\sigma\sqrt{n}}\Big] = \mathbf{D}\Big[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}\Big] =$$
$$\mathbf{D}\Big[\frac{X_1}{\sigma\sqrt{n}}\Big] + \mathbf{D}\Big[\frac{X_2}{\sigma\sqrt{n}}\Big] + \cdots + \mathbf{D}\Big[\frac{X_n}{\sigma\sqrt{n}}\Big] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} + \cdots + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} = 1.$$

Taigi visi dydžiai Z_n turi tą patį vidurkį ir tą pačią dispersiją. Ką gi apie juos galima pasakyti, kai $n \to \infty$? Ir čia pasirodo senas pažįstamas! Kai n didėja, dydžiai Z_n darosi vis panašesni į standartinį normalųjį dydį! Tokia yra vienos iš pačių svarbiausių tikimybių teoremų – centrinės ribinės teoremos – esmė.

Centrinė ribinė teorema

46 teorema. *Tegu atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yra nepriklausomi, turi tą pačią pasiskirstymo funkciją, vidurkį ir dispersiją: $\mathbf{E}[X_j] = a, \mathbf{D}[X_j] = \sigma^2$. Tada kiekvienam x, kai $n \to \infty$, teisingas teiginys*

$$P\Big(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big) \to \Phi(x), \tag{3.11}$$

čia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u$$

yra standartinio normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ pasiskirstymo funkcija.

Taigi centrinė ribinė teorema teigia, kad nepriklausomai nuo individualių dydžių X_j savybių dydis Z_n, kai n didelis, yra panašus į standartinį normalųjį dydį.

Muavro ir Laplaso teorema, kurią naudojome Bernulio schemai tirti, yra atskiras centrinės ribinės teoremos atvejis.

Iš tikrųjų, jeigu atsitiktinis dydis X_j įgyja dvi reikšmes: $X_j = 1$, kai j-ajame Bernulio schemos bandyme įvyko sėkmė, ir $X_j = 0$, kai nesėkmė, tai dydžiai $X_j, j = 1, 2, \ldots, n$ yra nepriklausomi ir $\mathbf{E}[X_j] = p, \sigma^2 = \mathbf{D}[X_j] = pq$.

Pažymėkime $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Bernulio schemos atveju S_n reiškia sėkmių skaičių atlikus n bandymų. Taigi (3.11) galime užrašyti taip:

$$P\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\Big) \to \Phi(x).$$

Naudodami žymenį $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (3.11) sąryšį galime užrašyti taip:

$$P\Big(\frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[S_n]}} < x\Big) \to \Phi(x), \quad n \to \infty.$$

Centrinę ribinę teoremą galima interpretuoti kaip didžiųjų skaičių dėsnio patikslinimą. Iš tikrųjų, didžiųjų skaičių dėsnis reiškia, kad

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \approx a.$$

Savo ruožtu centrinę ribinę teoremą galime suvokti kaip tvirtinimą

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n/n - a}{\sigma/\sqrt{n}} \approx X, \quad X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Tada

$$\frac{S_n}{n} \approx a + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot X \sim \mathcal{N}\big(a, \frac{\sigma^2}{n}\big).$$

Taigi centrinė ribinė teorema teigia, kad su didelėmis n reikšmėmis aritmetinis vidurkis S_n/n yra panašus į normalųjį dydį su maža dispersija.

3.15 Silpnasis atsitiktinių dydžių konvergavimas

Jeigu yra silpnasis, tai turi būti ir stiprusis. Iš tikrųjų yra. Tačiau mes be jo galime apsieiti. O silpnasis konvergavimas – labai svarbus.

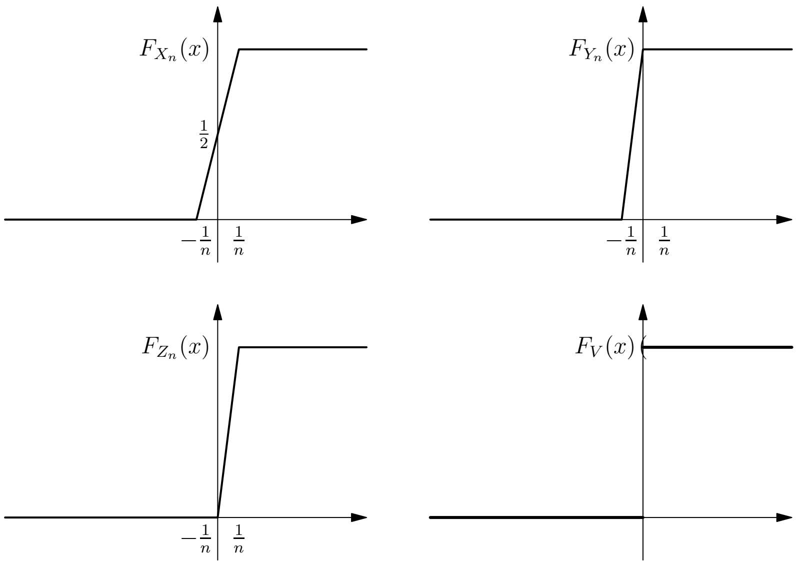
Centrinė ribinė teorema – tai teiginys apie atsitiktinių dydžių „supanašėjimą“. Ji teigia, kad didėjant n atsitiktiniai dydžiai

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \tag{3.12}$$

tampa vis „panašesni“ į standartinį normalųjį dydį $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tiksliau sakant, jų pasiskirstymo funkcijos darosi vis „panašesnės“.

Panagrinėkime kelis paprastus tokio „panašėjimo“ (konvergavimo) atvejus, kad suvoktume, kaip šią sąvoką reikėtų apibrėžti griežtai matematiškai.

Tegu X_n yra intervale $[-1/n; 1/n]$ tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, Y_n ir Z_n – intervaluose $[-1/n; 0]$ ir $[0; 1/n]$ tolygiai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tikriausiai sutiksite, kad kai n didėja, šie dydžiai tampa vis panašesni į išsigimusį atsitiktinį dydį $V : P(V = 0) = 1$. Nubraižykime šių dydžių pasiskirstymo funkcijų grafikus.



Panagrinėję juos įsitikinsime, kad jei $x \neq 0$ ir $n \to \infty$, tai

$$F_{X_n}(x) \to F_V(x), \quad F_{Y_n}(x) \to F_V(x), \quad F_{Z_n}(x) \to F_V(x).$$

Tačiau taške $x = 0$ pasiskirstymo funkcijų elgesys skiriasi:

$$F_{X_n}(0) = \frac{1}{2} \not\to F_V(0) = 0, \quad F_{Y_n}(0) = 1 \not\to F_V(0), \quad F_{Z_n}(0) = 0 \to F_V(0).$$

Taigi taškuose, kuriuose ribinės pasiskirstymo funkcijos grafikas sutrūkęs, „panašėjančių“ funkcijų reikšmių elgesys gali būti labai įvairus. Todėl protinga apskritai nepaisyti to, kas šiuose taškuose vyksta.

37 apibrėžimas. *Tegu X_n, X yra atsitiktiniai dydžiai, o $F_n(x), F(x)$ šių dydžių pasiskirstymo funkcijos. Sakysime, kad atsitiktiniai dydžiai X_n silpnai konverguoja į atsitiktinį dydį X, jeigu visuose taškuose x, kuriuose $F(x)$ tolydi,*

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty.$$

Žymėsime: $X_n \Rightarrow X$ arba $F_n \Rightarrow F$.

Pastebėkime, kad tiriant atsitiktinių dydžių silpnąjį konvergavimą naudojamos tik jų pasiskirstymo funkcijos, o ne „individualios“ atsitiktinių dydžių savybės. Netgi nesvarbu, kokiose tikimybinėse erdvėse šie dydžiai yra apibrėžti!

Dabar centrinę ribinę teoremą galime suformuluoti kaip teiginį apie silpnąjį konvergavimą: jeigu F_n yra (3.12) atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos, o Φ – standartinio normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ pasiskirstymo funkcija, tai

$$F_n \Rightarrow \Phi, \quad n \to \infty.$$

Uždaviniai

1. *Atsitiktinis dydis X_n įgyja dvi reikšmes: $P(X_n = 0) = 1 - 1/n, P(X_n = n) = 1/n$. Į kokį atsitiktinį dydį silpnai konverguoja atsitiktinių dydžių seka X_n?*

2. *Tegu $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, $X_n = X/n$. Ar atsitiktinių dydžių seka X_n silpnai konverguoja Jeigu taip, tai į kokį atsitiktinį dydį?*

3. *Atsitiktinis dydis X_n yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0;n]$, t. y. $X_n \sim \mathcal{T}([0;n])$. Į kokią funkciją konverguoja pasiskirstymo funkcijos $F_n(x) = F_{X_n}(x)$? Ar galima teigti, kad atsitiktinių dydžių seka X_n silpnai konverguoja?*

4. *Atsitiktinis dydis X_n yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[-n;n]$, t. y. $X_n \sim \mathcal{T}([-n;n])$. Į kokią funkciją konverguoja pasiskirstymo funkcijos $F_n(x) = F_{X_n}(x)$? Ar galima teigti, kad atsitiktinių dydžių seka X_n silpnai konverguoja?*

5. *Atsitiktinis dydis X tolygiai pasiskirstęs intervale $[0;1]$, t. y. $X \sim \mathcal{T}([0;1])$. Tegu $X_n = X + n, Y_n = X - n$. Į kokias funkcijas konverguoja pasiskirstymo funkcijos $F_{X_n}(x)$ ir $F_{Y_n}(x)$.*

6. *Ar pasikeistų atsakymas į ankstesnio uždavinio klausimą, jeigu vietoje tolygiai intervale $[0;1]$ pasiskirsčiusio dydžio imtume kokį nors kitą tolygiai pasiskirsčiusį intervale dydį?*

Atsakymai

1. *Konverguoja į dydį $X, P(X = 0) = 1$.* **2.** *Konverguoja į dydį $X, P(X = 0) = 1$.* **3.** *Funkcijos konverguoja į $F(x) = 0$, dydžiai nekonverguoja.* **4.** *Funkcijos konverguoja į $F(x) = 1/2$, dydžiai nekonverguoja.* **5.** *Funkcijos konverguoja į $F(x) = 0$, ir $G(x) = 1$.*

3.16 Silpnojo konvergavimo tyrimo įrankiai

Panagrinėsime jų savybes, išmoksime naudotis... O kaip jie sukonstruoti ir kodėl veikia – gana sudėtingas klausimas. Elgsimės kaip mobiliųjų telefonų savininkai – instrukciją paskaito, bet aparatų neardo.

Kaip tirti silpnąjį konvergavimą? Atrodo, konvergavimo apibrėžimas nurodo ir būdą: jei $Z_1, Z_2, \ldots$ yra atsitiktiniai dydžiai, suraskime jų pasiskirstymo funkcijas

$F_n(x) = P(Z_n < x)$ ir tirkime jos konverguoja ar ne. Tačiau toks tiesioginis būdas gali būti sunkus ar net iš viso nepritaikomas. Dydžiai Z_n gali būti apibrėžti panaudojus kitus dydžius (kaip (3.12)), jų pasiskirstymo funkcijos priklausys nuo šių dydžių savybių, taigi, bandydami eiti tiesiai, galime tiesiog atsimušti kakta į sieną.

Tačiau sudėtingi uždaviniai nebūtinai sprendžiami didelėmis pastangomis. Norite pavyzdžio? Tarkime, iškilo būtinybė išmatuoti temperatūrą 100 metrų aukštyje. Įdėję daug lėšų ir darbo galime pastatyti 100 metrų aukščio bokštą ir išspręsti uždavinį. O gal geriau pakilti į tokį aukštį oro balionu ir išmatuoti temperatūrą? Tikriausiai pasirinktume antrąjį būdą. Tačiau ir antruoju būdu tikslo nepasieksime, jeigu svajosime rankas sudėję. Juk reikia pasigaminti įrankį – oro balioną.

Taigi pasigaminkime silpnojo atsitiktinių dydžių konvergavimo tyrimo įrankį. Tiksliau – apžvelkime, ką išradingi matematikai yra jau sukūrę.

Visą tikimybinę informaciją apie atsitiktinį dydį X saugo jo pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$. Jo savybėms reikšti taip pat naudojame skaitines charakteristikas: vidurkį, dispersiją... Žinome, kad šios charakteristikos turi gerų savybių, kuriomis galima pasinaudoti skaičiuojant.

Ar vidurkių sąvokos negalėtume panaudoti silpnojo konvergavimo tyrimuose? Rimtų abejonių kelia viena aplinkybė: vidurkis yra tik skaičius, būtų sunku tikėtis, kad juo reiškiamos informacijos pakaks sudėtingam konvergavimo reiškiniui tirti. Kita vertus, atsitiktiniai dydžiai, kurių konvergavimą norėtume tirti, gali ir neturėti vidurkių!

Kaip įveikti šiuos sunkumus? Jei atsitiktinio dydžio vidurkis neegzistuoja, galime jį pakeisti, t. y. transformuoti, kad naujojo dydžio vidurkis egzistuotų. Galima sudaryti daug naujų dydžių ir gauti daug vidurkių, kad visi jie išsaugotų tą pačią informaciją kaip ir pasiskirstymo funkcija.

Štai sprendimas, kurį surado matematikai: jeigu X yra atsitiktinis dydis, o t yra realusis skaičius, apskaičiuokime

$$f(t) = \mathbf{E}[\cos(tX)], \quad g(t) = \mathbf{E}[\sin(tX)]. \tag{3.13}$$

Kadangi kosinuso ir sinuso funkcijos aprėžtos, vidurkių egzistavimo klausimo nekyla. Taigi informaciją apie atsitiktinį dydį „kodavome“ dviem vidurkių funkcijomis. Ar ne per daug painu?

Jeigu reiškinys atrodo sudėtingas, gal verta pakeisti požiūrį į jį?

Štai požiūrių keitimo gairės, kuriomis nuolat naudojasi matematikai:

realusis skaičius $\leftrightarrow$ tiesės taškas

realiųjų skaičių pora $\leftrightarrow$ plokštumos taškas

plokštumos taškas $\leftrightarrow$ kompleksinis skaičius.

Taigi realiųjų skaičių porą $(x; y)$ galime plokštumoje įvedę koordinačių sistemą suvokti kaip tašką $A(x; y)$, kurio koordinatės nurodytos, arba – kaip kompleksinį skaičių z:

$$(x; y) \to z, \quad z = x + iy,$$

čia i yra „menamasis vienetas“, kuris „paverčia“ realiųjų skaičių porą kompleksiniu skaičiumi. Kompleksinius skaičius sudedame „paprastai“:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Dauginame irgi „paprastai“, tik naudodamiesi lygybe $i^2 = -1$, taigi:

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 2.$$

Pasirodo, pirminis skaičius 2 dalijasi iš dviejų paprastų kompleksinių skaičių!

Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ moduliu $|z|$ pavadinsime atkarpos, jungiančios plokštumos taškus $O(0; 0), A(x; y)$, ilgį, taigi

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dabar (3.13) funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančias realiąsias reikšmes galime „sulipdyti“ į vieną, kurios reikšmės – kompleksiniai skaičiai.

Charakteringoji funkcija

38 apibrėžimas. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, jo charakteringąja funkcija vadinsime funkciją, apibrėžtą realiųjų skaičių aibėje lygybe*

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[\cos(tX)] + i\mathbf{E}[\sin(tX)] = \mathbf{E}[\cos(tX) + i\sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

O dabar pasitelkime vieną svarbų ir jau naudotą analizės instrumentą – begalines eilutes. Skaičiuodami Puasono atsitiktinio dydžio vidurkį naudojomės eksponentės eilute:

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} + \cdots \tag{3.15}$$

Gera naujiena – galime imti ir kompleksines z reikšmes, eilutė visada konverguos. Tokiu būdu gausime visų kompleksinių skaičių aibėje apibrėžtą funkciją $f(z) = \mathrm{e}^z$. Ir dar maloni naujiena – svarbiausios rodiklinės funkcijos savybės išlieka tos pačios, pavyzdžiui, su visais kompleksiniais skaičiais

$$\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}.$$

Užrašykime dar dvi begalines eilutes:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{u^{2m}}{(2m)!} + \cdots, \qquad (3.16)$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{u^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \qquad (3.17)$$

čia $u \in \mathbb{R}$. Šias tris eilutes jungia įstabus ryšys: jeigu į (3.15) įstatysime $z = iu$, $u \in \mathbb{R}$, bus teisinga lygybė

$$1 + (iu) + \frac{(iu)^2}{2!} + \cdots = \Big(1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots\Big) + i(u - \frac{u^3}{3!} + \cdots),$$

kitaip tariant,

$$\mathrm{e}^{iu} = \cos u + i \sin u. \qquad (3.18)$$

Negaliu susilaikyti nuo pagundos įstatyti į šią lygybę $u = \pi$:

$$\mathrm{e}^{i\pi} = -1.$$

Superformulė, tikras šedevras![4]

Tegu X yra atsitiktinis dydis, įgyjantis realias reikšmes, $t \in \mathbb{R}$. Įstatę į (3.18) $u = tX$ galėsime užrašyti:

$$\mathrm{e}^{itX} = \cos(tX) + i \sin(tX)$$

ir kiek trumpiau suformuluoti charakteringosios funkcijos apibrėžimą.

39 apibrėžimas. *Tegu X yra atsitiktinis dydis. Jo charakteringąja funkcija vadinsime funkciją*

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{itX}].$$

Jeigu e^{itX} suvoksime kaip naują atsitiktinį dydį, gautą iš X pritaikius atitinkamą funkciją, galime pasinaudoti vidurkio skaičiavimo patirtimi, nepaisydami to, kad šio dydžio reikšmės kompleksinės. „Drąsos, ir dar kartą drąsos!“ – kaip kažkada sakė Dantonas.

50 pavyzdys. Išsigimusio dydžio charakteringoji funkcija

Jei $P(X = a) = 1$, tai

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{ita} P(X = a) = \mathrm{e}^{ita}.$$

[4] Šios formulės autorius – Leonardas Oileris (1707–1783).

Taigi $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{ita} = \cos(ta) + i\sin(ta)$. Jeigu pavaizduotume $\varphi_X(t)$ plokštumos tašku ir keistume t, pamatytume, kad tas taškas atlieka nepabaigiamą kelionę vienetiniu apskritimu, jei $a \neq 0$. Jeigu $a = 0$, tai $\varphi_X(t) = 1$.

51 pavyzdys. Dvireikšmio dydžio charakteringoji funkcija
Tegu dydis X įgyja dvi reikšmes: $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$. Tada

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{it0}P(X = 0) + \mathrm{e}^{it}P(X = 1) = 1 - p + \mathrm{e}^{it}p.$$

52 pavyzdys. Binominio dydžio charakteringoji funkcija
Tegu $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Taigi dydis X įgyja reikšmes $0, 1, \ldots, n$, o dydis e^{itX} – reikšmes $\mathrm{e}^{it0}, \mathrm{e}^{it}, \ldots, \mathrm{e}^{itn}$. Tada

$$\varphi_X(t) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}^{itm}P(X = m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m(\mathrm{e}^{it}p)^m(1 - p)^{n-m} = (1 - p + \mathrm{e}^{it}p)^n.$$

Pastebėkime, kad binominio dydžio charakteringoji funkcija lygi n-ajam dvireikšmio dydžio charakteringosios funkcijos laipsniui. Kiek vėliau sužinosime, kad tai ne atsitiktinumas.

53 pavyzdys. Puasono dydžio charakteringoji funkcija
Tegu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tada X įgyja sveikas neneigiamas reikšmes, o dydis e^{itX} – reikšmes e^{itn}, $n = 0, 1, \ldots$ Tada

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itn} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^{it})^n}{n!}.$$

Pasinaudoję (3.15) su $z = \lambda\mathrm{e}^{it}$, gausime

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)}.$$

54 pavyzdys. Tolygiojo dydžio charakteringoji funkcija
Tegu $X \sim \mathcal{T}([a; b])$. Tada X turi tankį $p_X(u) = 1/(b - a)$, kai $u \in (a; b)$ ir $p_X(u) = 0$, kai $u \notin [a; b]$. Taigi

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b - a} \int_a^b \mathrm{e}^{itu}\mathrm{d}u.$$

Kai integruojame funkcijas su realiomis reikšmėmis, naudojamės Niutono ir Leibnico formule. Pasinaudokime ja nepaisydami to, kad mūsų funkcijos reikšmės kompleksinės. Kadangi funkcijos $\mathrm{e}^{itu}/(it)$ išvestinė pagal u lygi e^{itu}, tai

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b - a} \frac{\mathrm{e}^{itu}}{it}\Big|_a^b = \frac{\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita}}{(b - a)it}.$$

Panašiai galime apskaičiuoti ir eksponentinio dydžio charakteringąją funkciją.

55 pavyzdys. Eksponentinio dydžio charakteringoji funkcija

Tegu $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Tada šis atsitiktinis dydis turi tankį $p_X(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, kai $u > 0$. Su neigiamomis reikšmėmis tankis lygus nuliui. Tada

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_0^\infty e^{itu} \cdot \lambda e^{-\lambda u} du = \lambda \int_0^\infty e^{itu-\lambda u} du \\ &= \frac{\lambda}{it-\lambda} \int_0^\infty d\big(e^{itu-\lambda u}\big) = \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{itu-\lambda u}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}.\end{aligned}$$

Reikšmė, atitinkanti begalinį rėžį, reiškia funkcijos ribą.

56 pavyzdys. Standartinio normaliojo dydžio charakteringoji funkcija

Tegu $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Tada

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{itu} \cdot e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{itu-u^2/2} du.$$

Integralas sudėtingas, apskaičiuoti jo reikšmę – darbas ne menkas, tačiau pati reikšmė paprasta:

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad standartinio normaliojo dydžio charakteringosios funkcijos reikšmės – realieji skaičiai. Kai t kinta nuo 0 iki ∞ charakteringoji funkcija įgyja visas reikšmes iš intervalo $(0;1]$.

Taigi sukūrėme naują įrankį – charakteringąsias funkcijas. Kokios gi jų savybės, kam jos tinka? Suformuluosime savybes be įrodymų. Tie įrodymai įvairūs: vieni elemetarūs, o kiti toli gražu ne.

47 teorema. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, $\varphi_X(t)$ – jo charakteringoji funkcija. Ši funkcija yra visuose taškuose t tolydi, $|\varphi_X(t)| \leq 1, \varphi_X(0) = 1$. Jeigu a, b – bet kokie realieji skaičiai, tai atsitiktinio dydžio $Y = b + aX$ charakteringoji funkcija yra*

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

57 pavyzdys. Normaliojo dydžio charakteringoji funkcija

Standartinio normaliojo dydžio charakteringąją funkciją jau užrašėme. Tegu dabar $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ – bet koks normaliųjų dydžių šeimos narys. Žinome, kad jį galima išreikšti taip:

$$X = \mu + \sigma X_0, \quad X_0 \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Taigi, pasinaudoję teorema, gauname

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{i\mu t}\varphi_{X_0}(\sigma t) = \mathrm{e}^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}. \tag{3.19}$$

Ar visada pagal charakteringąją funkciją galima atpažinti, tarsi paukštį iš plunksnų, atsitiktinį dydį? Štai atsakymas.

Vienaties teorema

48 teorema. *Tegu X, Y yra du atsitiktiniai dydžiai. Jeigu jų pasiskirstymo funkcijos vienodos, tai ir charakteringosios funkcijos vienodos. Jeigu jų charakteringosios funkcijos vienodos, tai ir pasiskirstymo funkcijos vienodos.*

Ši teorema reiškia, kad charakteringosios funkcijos „saugo“ visą informaciją apie atsitiktinio dydžio tikimybes kaip ir pasiskirstymo funkcijos.

Žinome, kad dažnai tenka sumuoti nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Net jeigu dėmenys yra paprasti atsitiktiniai dydžiai, sumos pasiskirstymo funkciją gali būti nelengva surasti. Kokia gi padėtis, jeigu ieškosime charakteringųjų funkcijų?

49 teorema. *Tegu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tada*

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdots \varphi_{X_n}(t).$$

Paprasčiau būti negali! Taigi nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms tirti labiau nei pasiskirstymo funkcijos tinka charakteringosios! Neatidėliodami išbandykime šį instrumentą.

58 pavyzdys. Puasono dydžių suma

Tegu $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Kokiai šeimai priklauso jų suma? Suraskime charakteringąsias funkcijas:

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{it}-1)},\ \varphi_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^{it}-1)},\ \varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(\mathrm{e}^{it}-1)}.$$

Kokia išvada? Žinoma, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$!

59 pavyzdys. Normaliųjų dydžių suma

Tegu $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ Nustatysime, pagal kokį dėsnį pasiskirsčiusi jų suma $X = X_1 + X_2$. Ir vėl raskime charakteringąsias funkcijas. Atsitiktinių dydžių X_1, X_2 charakteringąsias funkcijas rasime pasinaudoję (3.19). Tada

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{it(\mu_1+\mu_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2}.$$

Akivaizdi išvada: $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Taigi Puasono ir normaliųjų dėsnių šeimos turi „uždarumo“ savybę: sumuodami nepriklausomus tos pačios šeimos dydžius vėl gauname tos pačios šeimos dydį.

O dabar dar vienas malonus netikėtumas: atsitiktinio dydžio X laipsnių vidurkių $\mathbf{E}[X^m]$ ir charakteringosios funkcijos išvestinių ryšys. Žinome, kad, norint apskaičiuoti $\mathbf{E}[X^m]$, tenka sumuoti arba integruoti, darbui suprastinti taikant, jeigu pavyksta, įvairias gudrybes. Pasirodo, yra dar vienas skaičiavimo būdas – naudoti charakteringąją funkciją.

Skaičių $\mathbf{E}[X^m]$ vadinsime atsitiktinio dydžio X m-osios eilės momentu.

Charakteringosios funkcijos išvestinės ir dydžio momentai

50 teorema. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, $\varphi_X(t)$ – jo charakteringoji funkcija. Jeigu egzistuoja dydžio momentai $\mathbf{E}[X], \mathbf{E}[X^2], \ldots, \mathbf{E}[X^m]$, tai visuose taškuose t egzistuoja funkcijos išvestinės $\varphi'_X(t)$, $\varphi''_X(t), \ldots, \varphi_X^{(m)}(t)$.*
Jeigu egzistuoja funkcijos išvestinės $\varphi'_X(t)$, $\varphi''_X(t), \ldots, \varphi_X^{(m)}(t)$, tai egzistuoja ir atsitiktinio dydžio momentai $\mathbf{E}[X]$, $\mathbf{E}[X^2], \ldots, \mathbf{E}[X^m]$.
Charakteringosios funkcijos išvestinės ir momentai susieti lygybe:

$$\mathbf{E}[X^k] = (-i)^k \varphi_X^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \ldots m.$$

Taigi žinodami atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją momentų galime ieškoti ne sumuodami ar integruodami, tačiau skaičiuodami išvestines.

Funkcijos išvestinių reikšmės kokiame nors taške – tai informacija apie šios funkcijos elgesį arti to taško. Teorema teigia, kad atsitiktinio dydžio momentai yra beveik tas pats, kas charakteringosios funkcijos išvestinės taške $t = 0$. Žinodami atsitiktinio dydžio momentus, galime nusakyti charakteringosios funkcijos elgesį, kai t yra arti nulio. Užrašykime šį teiginį tiksliau, apsiribodami paprastais, bet labai svarbiais atvejais.

51 teorema. *Tegu X yra atsitiktinis dydis, o $\varphi_X(t)$ jo charakteringoji funkcija. Jeigu vidurkis $\mathbf{E}[X]$ egzistuoja, tai*

$$\varphi_X(t) = 1 + (it) \cdot \mathbf{E}[X] + \epsilon_1(t)t, \quad \epsilon_1(t) \to 0, \ \text{kai } t \to 0. \tag{3.20}$$

Jeigu egzistuoja ir $\mathbf{E}[X^2]$, tai

$$\varphi_X(t) = 1 + (it) \cdot \mathbf{E}[X] + \frac{(it)^2}{2} \cdot \mathbf{E}[X^2] + \epsilon_2(t)t^2, \quad \epsilon_2(t) \to 0, \ \text{kai } t \to 0. \tag{3.21}$$

Šiuo teiginiu šauniai pasinaudosime kitame skyrelyje.

Tiek laiko skyrėme charakteringosioms funkcijoms, kaip minima antraštėje – konvergavimo tyrimo instrumentui, o apie patį konvergavimą nė žodžio!

Truputį kantrybės – čia kaip teatre, jeigu jau šautuvas kabo, tai juo bus ir iššauta.

3.17 Ribinių teoremų įrodymai

Uždavinio keitimas jam ekvivalenčiu – matematikos kasdienybė. Charakteringosios funkcijos tarsi tiltas perneša tikimybių ribinių savybių tyrimą į grynosios analizės sritį. O čia nebėra nei atsitiktinių dydžių, nei tikimybių – tik skaičiai ir funkcijos.

Net trys ribinės teoremos buvo suformuluotos ankstesniuose skyriuose: Puasono (apie sėkmių skaičiaus Bernulio schemoje tikimybių konvergavimą), didžiųjų skaičių dėsnis ir centrinė ribinė teorema (Muavro ir Laplaso teorema kaip atskiras atvejis). Visos jos buvo suformuluotos skirtingai, pirmosios dvi įrodytos skirtingais būdais, o trečioji neįrodyta apskritai. Įsitikinsime, kad visas jas galima suformuluoti panašiai – naudojant silpnojo konvergavimo sąvoką. Ir įrodyti galima panašiai – pasitelkus charakteringąsias funkcijas.

Silpnojo konvergavimo ir charakteringųjų funkcijų ryšį nusako tokia teorema.

Charakteringųjų funkcijų ir atsitiktinių dydžių konvergavimas

52 teorema. *Tegu X_n ir X yra atsitiktiniai dydžiai, o $\varphi_{X_n}(t), \varphi_X(t)$ – jų charakteringosios funkcijos. Jeigu su kiekviena t reikšme $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$, kai $n \to \infty$, tai $X_n \Rightarrow X$.*

Naudojantis šia teorema galima įrodyti, kad atsitiktiniai dydžiai (arba jų pasiskirstymo funkcijos) silpnai konverguoja, jeigu jau žinome ribinį dydį. Iš tikrųjų charakteringųjų funkcijų metodu galima tirti netgi sudėtingesnes konvergavimo aplinkybes, kai ribinis dydis nėra iš anksto žinomas.

Taigi – grįžkime prie mums jau žinomų ribinių teoremų ir iš naujo jas įrodykime. Įrodinėdami pasinaudosime viena iš pagrindinių matematinės analizės ribų: jeigu z_n yra realiųjų arba kompleksinių skaičių seka ir $z_n \to z$, kai $n \to \infty$, tai

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^z, \quad n \to \infty. \tag{3.22}$$

Pradėkime nuo Puasono teoremos.

53 teorema. *Tegu X_n yra binominiai atsitiktiniai dydžiai, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Jeigu $np_n \to \lambda$, $\lambda > 0$, kai $n \to \infty$, tai $X_n \Rightarrow X$.*

Galbūt palyginę šios teoremos teiginį su anksčiau suformuluota skyrelyje teorema, suabejosite: ar tikrai iš silpnojo konvergavimo išplaukia tikimybių konvergavimas, t. y. teiginys $P(X_n = m) \to P(X = m)$, kai $n \to \infty$? Įsitikinkime tuo.

Teiginys $X_n \Rightarrow X$ reiškia, kad $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ visiems x, kuriuose $F_X(x)$ tolydi, t. y. kai $x \neq 0, 1, 2, \ldots$ Dydžiai X_n, X įgyja sveikas neneigiamas reikšmes, taigi sveikajam skaičiui $m \geqslant 0$ su bet kokiu $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, gausime

$$\begin{aligned} P(X_n = m) &= P(m - \epsilon \leqslant X_n < m + \epsilon) = F_{X_n}(m + \epsilon) - F_{X_n}(m - \epsilon), \\ F_{X_n}(m + \epsilon) - F_{X_n}(m - \epsilon) &\to F_X(m + \epsilon) - F_X(m - \epsilon) = P(X = m), \end{aligned}$$

kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Binominio dydžio charakteringąją funkciją apskaičiavome, taigi

$$\varphi_{X_n}(t) = \big(1 - p_n + \mathrm{e}^{it} p_n\big)^n = \Big(1 + \frac{\mathrm{e}^{it} p_n n - p_n n}{n}\Big)^n = \Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)^n,$$

čia $z_n = \mathrm{e}^{it} p_n n - p_n n$. Kadangi $z_n \to \mathrm{e}^{it}\lambda - \lambda$, kai $n \to \infty$, tai pasinaudoję (3.22) gausime

$$\varphi_{X_n}(t) \to \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}\lambda - \lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)} = \varphi_X(t), \quad n \to \infty.$$

Taigi $X_n \Rightarrow X$, teorema įrodyta.

Dabar grįžkime prie didžiųjų skaičių dėsnio, kuriam paklūsta nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_j, turintys tą patį vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$. Jo esmę galima nusakyti viena formule:

$$P\Big(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \approx 0\Big) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Kitaip tariant dydis $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ darosi vis labiau panašesnis į išsigimusį, vien tik reikšmę 0 įgyjantį atsitiktinį dydį. Išmokome „panašėjimo“ reiškinį apibūdinti silpnojo konvergavimo sąvoka. Taigi iš naujo suformuluokime didžiųjų skaičių dėsnį.

Didžiųjų skaičių dėsnis

54 teorema. *Tegu nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ turi tą pačią pasiskirstymo funkciją ir vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$. Jei*

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a,$$

tai $Z_n \Rightarrow Z$, čia Z – išsigimęs atsitiktinis dydis, $P(Z = 0) = 1$.

Jeigu palyginsite šią didžiųjų skaičių dėsnio formuluotę su ta, kuri pateikta anksčiau, pamatysite, kad išnyko dispersijų egzistavimo sąlyga. Taigi – ne tik ketiname kitaip įrodyti didžiųjų skaičių dėsnį, bet ir išplėsti jo veikimo sritį, įtraukdami į ją ir neturinčius dispersijos atsitiktinius dydžius.

Įrodymas. Pasinaudosime charakteringosiomis funkcijomis. Kadangi $\varphi_Z(t) = 1$, pakanka įrodyti, kad su visais t

$$\varphi_{Z_n}(t) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Įsižiūrėkime į atsitiktinį dydį Z_n :

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad Y_j = \frac{X_j - a}{n}.$$

Atsitiktiniai dydžiai X_j yra nepriklausomi, todėl nepriklausomi ir dydžiai Y_j. Be to, jų pasiskirstymo funkcijos, taigi ir charakteringosios funkcijos yra vienodos, todėl

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{Y_1}(t) \cdots \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Y_1}^n(t). \tag{3.23}$$

Dydžio $V_1 = X_1 - a$ vidurkis lygus nuliui, todėl pasinaudoję (3.20) galime užrašyti jo charakteringąją funkciją taip:

$$\varphi_{V_1}(t) = 1 + (it)\mathbf{E}[V_1] + \epsilon_1(t)t = 1 + \epsilon_1(t)t, \quad \epsilon_1(t) \to 0, \quad t \to 0.$$

Kadangi $Y_1 = V_1/n$, tai, pasinaudoję charakteringųjų funkcijų savybe, gausime

$$\varphi_{Y_1}(t) = \varphi_{V_1}(t/n) = 1 + \frac{\epsilon_1(t/n)t}{n}.$$

O dabar iš (3.23) išplaukia

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{\epsilon_1(t/n)t}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^0 = 1,$$

nes $z_n = \epsilon(t/n)t \to 0$, kai t fiksuotas, o n didėja. Teorema įrodyta.

Galiausiai tikimybių teorijos dalyje liko vienintelė viršūnė, kurią reikia įveikti – įrodyti centrinę ribinę teoremą.

Centrinė ribinė teorema

55 teorema. *Tegu nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ turi tą pačią pasiskirstymo funkciją, vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$ ir dispersiją $\mathbf{D}[X_j] = \sigma^2 > 0$. Jei*

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}},$$

tai $Z_n \Rightarrow Z$, čia Z standartinis normalusis dydis, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Įrodymas. Kadangi $\varphi_Z(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, tai reikia įrodyti, kad kiekvienam t $\varphi_{Z_n}(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/2}$, kai $n \to \infty$. Ir vėl pertvarkykime Z_n reiškinį:

$$Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad Y_j = \frac{X_j - a}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Pasinaudoję tais pačiais argumentais kaip didžiųjų skaičių dėsnio įrodyme užrašykime

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{Y_1}(t) \cdots \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Y_1}^n(t).$$

Jeigu $V_1 = X_1 - a$, tai $Y_1 = V_1/\sigma\sqrt{n}$, ir $\varphi_{Y_1}(t) = \varphi_{V_1}(t/\sigma\sqrt{n})$. Atsitiktinis dydis V_1 turi du momentus: $\mathbf{E}[V_1] = 0, \mathbf{E}[V_1^2] = \mathbf{D}[X_1] = \sigma^2$. Taigi charakteringąsias funkcijas galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned}
\varphi_{V_1}(t) &= 1 + (it)\mathbf{E}[V_1] + \frac{(it)^2}{2} \cdot \mathbf{E}[V_1^2] + \epsilon_2(t)t^2 = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \epsilon_2(t)t^2, \\
\varphi_{Y_1}(t) &= \varphi_{V_1}(t/\sigma\sqrt{n}) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + \epsilon_2\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\frac{t^2}{\sigma^2 n} = 1 + \frac{z_n}{n},
\end{aligned}$$

čia $z_n = -t^2/2 + \epsilon_2(t/\sigma\sqrt{n})t^2/\sigma^2 \to -t^2/2$, kai $n \to \infty$. Taigi dar kartą pasinaudoję svarbiąja analizės riba (3.22) gausime

$$\varphi_{Z_n}(t) = \Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)^n \to \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad n \to \infty.$$

Teorema įrodyta.

Sveikinu visus, garbingai pasiekusius šį pabaigos brūkšnį!

Uždaviniai

1. *Apskaičiuokite geometrinio dydžio $X \sim \mathcal{G}(p)$ charakteringąją funkciją.*

2. *Geometrinį dydį $X \sim \mathcal{G}(p)$ galime suvokti kaip Bernulio bandymų, kuriuos atliekame iki pirmos sėkmės, kiekį. Jei $p \to 1$, tai intuicija sako, kad dydis darosi vis panašesnis į išsigimusį atsitiktinį dydį $Y, P(Y = 1) = 1$. Įsitikinkite tuo panagrinėję charakteringąsias funkcijas: įrodykite, kad $\varphi_X(t)$, jei $p \to 1$, artėja prie išsigimusio dydžio charakteringosios funkcijos.*

3. *Tegu $X \sim \mathcal{G}(p)$. Prie kokios funkcijos artėja charakteringosios funkcijos $\varphi_X(t)$, jei $p \to 0$?*

4. *Tegu $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$, $p_n = \lambda/n$, čia $\lambda > 0$. Charakteringųjų funkcijų metodu įrodykite, kad $X_n/n \Rightarrow X$, čia $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.*

5. *Suraskite Paskalio dydžio $X \sim \mathcal{B}^-(n,p)$ charakteringąją funkciją.*

Atsakymai

1. $\phi_X(t) = p \cdot \exp(it)/(1 - \exp(it) \cdot q), q = 1 - p$. **4.** *Pasinaudokite eilute* $\exp(z) = 1 + z + z^2/2 + \cdots$ **5.** $\phi_X(t) = p^n/(1 - \exp(it) \cdot q)^n, q = 1 - p$.

4 skyrius

Matematinė statistika

Pradėkime pavyzdžiu.

60 pavyzdys. Reikia pasidalyti sudrėkusius degtukus. Degtukas užsidega su tikimybe $p = 0{,}6$. Kiek sudrėkusių degtukų reikia atiduoti draugui, kad tikimybė, jog jam pavyks uždegti ugnį, būtų ne mažesnė už 0,9?

Atsakyti į šį klausimą paprasta. Tikimybė, kad jam užteks vieno degtuko, lygi p, kad prireiks dviejų degtukų – qp ($q = 1 - p$), kad reiks trijų – q^2p ir t. t. Taigi tikimybė, kad užteks m degtukų,

$$P_m = p + qp + q^2p + \cdots + q^{m-1}p = p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1}) = p \cdot \frac{1 - q^m}{1 - q} = 1 - q^m.$$

Taigi draugui reikia atiduoti m degtukų, kad būtų patenkinta sąlyga $P_m \geqslant 0{,}9$ arba $q^m \leqslant 0{,}1$. Kadangi $q = 0{,}4$, tai labai greitai surasime mažiausią degtukų, kuriuos reikia atiduoti, skaičių: $m = 3$.

Tačiau vargu ar draugas bus patenkintas gavęs vos tris degtukus. Jis gali paklausti: o iš kur mes žinome, kad sudrėkęs degtukas užsidega su tikimybe $p = 0{,}6$? Iš tiesų, iš kur mes žinome?

Šis pavyzdys su degtukais parodo, kokioje padėtyje atsiduriame, norėdami taikyti tikimybių teoriją. Jeigu žinome atsitiktinių įvykių tikimybes ar atsitiktinių dydžių pasiskirstymo dėsnius ir jų parametrus, galime priimti sprendimus. Tačiau kaip juos sužinoti?

Neturėdami žinių apie tikimybes ar pasiskirstymo dėsnių parametrus, galime atlikti bandymus ir kaupti jų duomenis. Pavyzdžiui, jeigu sudrėkusių degtukų yra daug, galime bandyti juos vieną po kito uždegti ir skaičiuoti, kiek kartų tai pavyko. Sukaupus pakankamai didelį kiekį duomenų, kyla klausimas, ką su jais daryti, kaip iš jų gauti žinių apie rūpimas tikimybes ar parametrus. Tokie klausimai ir yra matematinės statistikos sritis.

4.1 Populiacijos ir imtys

Populiacija – objektai, kurie mums rūpi. Imtis – dalis, kurią atrenkame tyrimui. Tačiau tai tik įžanga.

Iš kur ir kaip gaunama statistinių duomenų? Klausimai, kurie kyla gyvenime, dažniausiai būna labai konkretūs. Pavyzdžiui, mums rūpi kokių nors gaminių kokybės charakteristikos. Arba gyventojų pajamų pasiskirstymo savybės. Arba reklaminių akcijų efektyvumas. Arba dar kas nors... Taigi prieš mus – tam tikrų objektų aibė, apie kurią norime įgyti žinių. Statistikoje ta realių objektų aibė dažnai vadinama populiacija. Ištirti visus jos objektus dažniausiai būna neįmanoma arba tiesiog neprasminga užduotis. Pavyzdžiui, jei tirtume visos stiklo gamyklos produkcijos atsparumą smūgiams – tektų sudaužyti visus lakštus.

Todėl tyrimui atsitiktinai atrenkama dalis tos populiacijos objektų, jie ištiriami ir iš sukauptų duomenų daromos išvados apie visumą. Kaip tokią praktiką aprašyti matematinėmis sąvokomis?

Visų pirma tarkime, kad mums rūpima objektų savybė reiškiama atsitiktinio dydžio X reikšmėmis. Dažniausiai tos reikšmės yra skaičiai, tačiau nebūtinai. Objekto atrinkimas ir reikšmės nustatymas – tai bandymas, kuriam pasibaigus galime užsirašyti vieną atsitiktinio dydžio reikšmę. Dydį, susijusį su pirmu bandymu, žymėkime X_1, su antruoju – X_2 ir t. t. Objektai atrenkami tyrimui nepriklausomai, todėl atsitiktiniai dydžiai X_j yra nepriklausomi ir pasiskirstę taip pat kaip X. Taigi matematinė sąvoka, atitinkanti atsitiktinę populiacijos objektų atranką, yra: **nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka** $X_1, \ldots, X_n$.

Atsitiktinė imtis

40 apibrėžimas. *Nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *vadinsime atsitiktine imtimi.*

Atlikdami matavimus ar stebėjimus, gauname šių dydžių reikšmes.

Atsitiktinės imties realizacija

41 apibrėžimas. *Atsitiktinės imties* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *elementų reikšmių seką* $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ *vadinsime atsitiktinės imties realizacija, arba tiesiog imtimi.*

Taigi atsitiktinė imtis tai atsitiktinių dydžių seka, o imtis – iš šių dydžių gautų reikšmių seka. Jeigu suvokiate, kuo skiriasi funkcija ir jos reikšmė, tai suvoksite ir atsitiktinės imties ir jos realizacijos skirtumą.

4.2 Aprašomoji statistika

Aprašomoji statistika tai dar ne statistika. Tai tik sukauptų duomenų tvarkymas.

Sukaupę daugybę knygų žinių dar neįgysime. Reikia jas tam tikru būdu sutvarkyti, galų gale – skaityti. Taip ir su sukauptais duomenimis. Galbūt jų šimtai ar tūkstančiai, bet kas iš to? Reikia juos kokiu nors būdu susisteminti, sutvarkyti, pavaizduoti, kad atsiskleistų būdingos savybės, į kurias įsižiūrėję galėtume kelti klausimus ir ieškoti atsakymų.

Imties duomenų tvarkymo, sisteminimo ir vaizdavimo metodai – tai aprašomoji statistika. Jos uždavinys – padėti apžvelgti ir įvertinti tyrėjo sukauptus duomenis.

Imtyje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ duomenys gali kartotis. Skaičius x_i yra atsitiktinio dydžio X_i, stebėto i-ajame bandyme, reikšmė. Dydžiai gali iš viso įgyti nedaug reikšmių. Pavyzdžiui, vykdant priešrinkiminę apklausą, rinkėjų klausiama, už kurį kandidatą ketina balsuoti. Tada reikšmių gali būti tiek, kiek kandidatų.

Galime nustatyti, kokios skirtingos duomenų reikšmės pasitaiko imtyje ir suskaičiavę jų dažnius, pavaizduoti imtį lentele:

Duomenys	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_m
Dažniai n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_m
Santykiniai dažniai f_i	n_1/n	n_2/n	n_3/n	$\ldots$	n_m/n
Sukauptieji dažniai $\sum_{j<i} f_j$	0	f_1	f_1+f_2	$\ldots$	$f_1+\cdots+f_{m-1}$

Lentelėje $x_1, x_2, \ldots, x_m$ yra skirtingos imties duomenų reikšmės, n_i – duomens x_i pasikartojimų imtyje skaičius. Lentelę visada galima pavaizduoti stulpelių arba skrituline diagrama. Stulpelių diagramoje stulpelių, atitinkančių reikšmes x_j, aukščiai yra proporcingi reikšmių dažniams n_j, o skritulinėje diagramoje reikšmių dažniams proporcingi sektorių kampai, žr. brėžinį.

61 pavyzdys. Akių spalva Mūsų populiacija – žmonės, dominanti savybė – akių spalva. Taigi ketiname stebėti dydžius, kurie įgyja reikšmes iš aibės

$$\{\text{JUODA, MĖLYNA, RUDA, ŽALIA}\}.$$

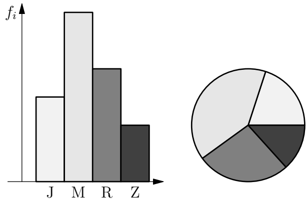
Sudarydami imtį rašysime tik pirmąsias spalvų pavadinimų raides. Tarkime, atlikus tyrimus gauta tokia imtis:

$$\text{JMMJMRMŽMMRJRŽ}.$$

Taigi dažnių lentelė:

	J	M	R	Ž
n_i	3	6	4	2
f_i	3/15	6/15	4/15	2/15
$\sum_{j<i} f_j$	0	3/15	9/15	13/15

Kai dydis X įgyja skaitines reikšmes, imtyje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beveik visi duomenys gali būti skirtingi. Tada visų reikšmių santykiniai dažniai bus maži ir apylygiai. Tokiu atveju ir dažnių lentelė, ir pagal ją nubraižyta stulpelių diagrama neparodys būdingų imties savybių. Tada geriau sudaryti sugrupuotų duomenų dažnių lentelę ir naudojantis ja braižyti stulpelių diagramą.

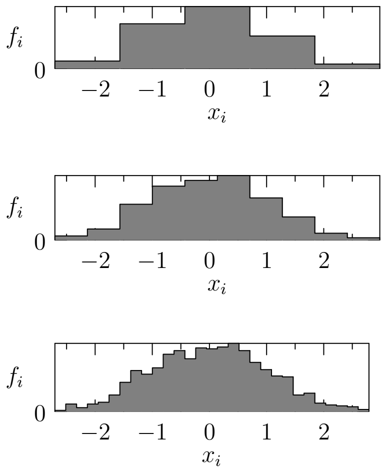


Imties vaizdavimas stulpelių ir skrituline diagrama

Tai daroma šitaip. Visą imties duomenų sritį padalykime d ilgio intervalais $I_j = [u_j, u_{j+1}), u_{j+1} = u_j + d, j = 1, 2, \ldots, N$ ir suskaičiuokime dydžius n_j, kurių reikšmės lygios imties duomenų, patekusių į intervalus I_j, kiekiams. Gausime sugrupuotųjų dažnių lentelę

Duomenų intervalai	I_1	I_2	I_2	$\ldots$	I_N
Duomenų intervaluose I_j kiekiai	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_N
Santykiniai dažniai p_j	n_1/nd	n_2/nd	n_3/nd	$\ldots$	n_N/nd

Šią lentelę grafiškai vaizduosime diagrama, sudarytą iš stulpelių su pagrindais I_j, kurių aukščiai lygūs atitinkamiems santykiniams dažniams p_j. Tokią diagramą vadinsime imties histograma. Intervalų ilgis d, panaudotas skaičiuojant p_j, užtikrina, kad stačiakampių plotų suma lygi vienetui. Prisiminkime, kad plotas, kurį apriboja absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio tankis ir abscisių ašis, taip pat lygus vienetui. Taigi histogramą galima suvokti kaip tam tikrą apytikslį atsitiktinio dydžio tankio vaizdą, gautą naudojantis imties duomenimis.



Trys tos pačios imties iš $n = 1000$ duomenų histogramos. Pirmoje grupavimo intervalų skaičius $n = 5$, antroje – $N = 10$ (rekomenduotinta reikšmė), trečioje $N = 30$.

Kaip parinkti duomenų grupavimo intervalus I_j? Jeigu intervalų plotis d bus didelis – svarbi informacija apie imties duomenis bus paslėpta, jeigu parinksime labai mažą d – informacija bus pavaizduota per daug smulkmeniškai ir negalėsime įžvelgti esminių bruožų. Visada galima eksperimentuoti parenkant skirtingus d ir stebint, kaip keičiasi histograma. Tam tikrais matematiniais samprotavimais pagrįsta nuomonė, kad geriausiai imties savybes parodo histograma, kurios intervalų kiekis yra maždaug

$$N \approx 1 + 3{,}3 \lg n.$$

Taigi, jei duomenų skaičius $n = 100$, tai histogramai sudaryti reikėtų panaudoti 7 ar 8 intervalus.

Jeigu imties duomenys $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra skaičiai, juos galime perrikiuoti didėjimo tvarka. Tokia didėjimo tvarka išdėstyta imties duomenų eilė

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$$

vadinama imties variacine eilute. Pavyzdžiui, imties

$$2; 1{,}5; 3{,}1{,}5; 2{,}3; 1{,}7; 2 \tag{4.1}$$

variacinė eilutė yra 1,5; 1,5; 1,7; 2; 2; 2; 3; 3, $x_{(1)} = x_{(2)} = 1{,}5; x_{(8)} = 3$.

Pirmasis variacinės eilutės narys yra tiesiog mažiausias duomuo, paskutinis – didžiausias:

$$x_{(1)} = \min\{x_j : j = 1{,}2, \ldots, n\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_j : j = 1{,}2, \ldots, n\}.$$

Jeigu imtis gauta stebint skaitines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį X, galime pagal imtį $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sudaryti funkciją, kurią vadinsime empirine dydžio X pasiskirstymo funkcija. Pažymėkime $n(x)$ imties duomenų, mažesnių už x, skaičių. Tada empirinę pasiskirstymo funkciją apibrėšime taip:

$$F_X^*(x) = \frac{n(x)}{n}.$$

Pavyzdžiui, (4.1) imtį atitinkanti empirinė pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leqslant 1{,}5; \\ \frac{2}{8}, & \text{jei } 1{,}5 < x \leqslant 1{,}7; \\ \frac{3}{8}, & \text{jei } 1{,}7 < x \leqslant 2; \\ \frac{6}{8}, & \text{jei } 2 < x \leqslant 3. \\ 1, & \text{jei } x > 3. \end{cases}$$

Jeigu skirtingos skaitinės imties reikšmės $x_1, x_2, \ldots, x_m$ surašytos didėjimo tvarka, tai sukauptieji dažniai lygūs atitinkamoms empirinės paskirstymo funkcijos reikšmėms:

$$F_X^*(x) = \sum_{j<i} f_j, \quad \text{jei } x \in (x_{i-1}, x_i], \quad i > 2.$$

Jeigu atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ yra tolydi, tai q-osios eilės kvantiliu vadiname lygties $F_X(u) = q$ sprendinį $u = u_q$. Jeigu remdamiesi analogija bandytume apibrėžti imties kvantilius kaip lygties $F_X^*(v) = q$ sprendinius, čia $F_X^*(v)$ yra empirinė pasiskirstymo funkcija, susidurtume su sunkumais. Kadangi empirinės pasiskirstymo funkcijos $F_X^*(x)$ grafikas sudarytas iš lygiagrečių abscisių ašiai atkarpų, tai su vienomis q reikšmėmis ta lygtis turėtų be galo daug sprendinių, o su kitomis – neturėtų iš viso.

Taigi imties kvantilius reikia apibrėžti kitaip.

Pažymėkime $\underline{n}(x)$ imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ duomenų, ne didesnių už x (t. y. tenkinančių nelygybę $x_i \leqslant x$), kiekį, o $\overline{n}(x)$ – ne mažesnių (t. y. tokių, kuriems $x_i \geqslant x$). Tada

$$\underline{n}(x) + \overline{n}(x) \geqslant n.$$

Empirinį q-osios eilės kvantilį v_q turėtume apibrėžti taip, kad jis tenkintų sąlygas:

$$q \leqslant \frac{\underline{n}(v_q)}{n}, \quad \frac{\overline{n}(v_q)}{n} \geqslant 1 - q.$$

Šios sąlygos reiškia, kad ne mažiau kaip q-ąją visų imties duomenų dalį sudaro duomenys, ne didesni už v_q, ir ne mažiau kaip $(1-q)$-ąją dalį – ne mažesni už v_q. Kad ši sąlyga būtų patenkinta, imties kvantilius apibrėšime taip.

Imties kvantiliai

42 apibrėžimas. *Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ q-osios eilės kvantiliu vadinsime skaičių v_q, apibrėžiamą taip:*

$$v_q = \begin{cases} x_{([qn]+1)}, & \text{jei } qn \text{ nėra sveikasis skaičius,} \\ (x_{(qn)} + x_{(qn+1)})/2, & \text{jei } qn \text{ yra sveikasis skaičius,} \end{cases}$$

čia $0 < q < 1$, žymuo $[qn]$ reiškia skaičiaus sveikąją dalį, o $x_{(i)}$ – i-ąjį imties variacinės eilutės narį.

Dažniausiai naudojami $q = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ eilės kvantiliai. Jie taip ir vadinami – kvartiliais bei žymimi Q_1, Q_2, Q_3. Kvartilis Q_2 dar vadinamas mediana.

Empirinė pasiskirstymo funkcija, kurią galime sudaryti naudodamiesi imties duomenims, tik kai kuriomis savo savybėmis primena stebimo atsitiktinio dydžio „tikrąją“ pasiskirstymo funkciją. Pakartoję to paties dydžio stebėjimus gautume kitokią imtį, taigi ir kitokią empirinę pasiskirstymo funkciją. O kaip pagal gautąją imtį sudaryti dydžius, kurie atitiktų kitas mums nežinomas stebimo atsitiktinio dydžio skaitines charakteristikas – vidurkį, dispersiją?

Imties vidurkis ir dispersija

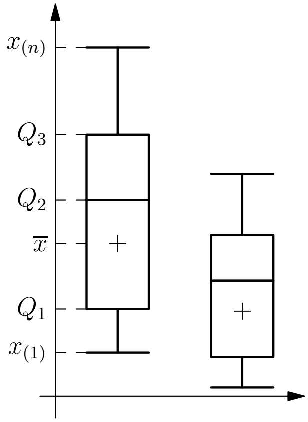
43 apibrėžimas. *Tegu $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ yra imtis, gauta stebint atsitiktinio dydžio X reikšmes. Šios imties vidurkiu ir dispersija vadinsime skaičius*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Kodėl imties vidurkio apibrėžimo lygybės vardiklyje rašome n, o dispersijos – $n-1$? Paaiškinti, kad nekiltų naujų klausimų, yra gana keblu. Pirmiausia, reikia pabrėžti imties dispersijos prasmę. Norėtume, kad imties dispersija gerai įvertintų nežinomą stebimojo dydžio dispersiją. Dispersija vertina dydžio reikšmių nuokrypių nuo vidurkio didumą. Jeigu žinotume tikrąjį atsitiktinio dydžio vidurkį a, dydis

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

puikiai tiktų dispersijai vertinti. Nežinodami a keičiame jį į $\overline{x}$. Taigi kiek „pagadiname“ savo įvertį. Vardiklio sumažinimas nuo n iki $n-1$ yra tam tikras „įverčio“ pataisymas. Prie klausimo, ką šiuo veiksmu laimime, sugrįšime kitame skyrelyje.



Skaitinių imties charakteristikų vaizdavimas viename diagramoje. Naudojant tokias diagramas patogu lyginti kelias imtis.

Norėdami apžvelgti imties duomenų savybes, juos vaizduojame grafiškai, taip pat skaičiuojame skaitines imties charakteristikas: kvartilius, vidurkį, dispersiją. Kartais patogu svarbiausias imties charakteristikas: minimumą, maksimumą, kvartilius, vidurkį pavaizduoti viename brėžinyje, žr. brėžinį. Tokie „dėžių su ūsais“ brėžiniai patogūs, kai reikia palyginti kelių imčių skaitines charakteristikas.

Uždaviniai

1. *Imties duomenys – pirkėjų, sustojusių prie kasos, išlaidos pirkiniams eurais:*

$$27,\ 20,\ 12,\ 20,\ 15,\ 20,\ 45,\ 10,\ 15,\ 10,\ 15,\ 30,\ 25,\ 20,\ 12.$$

Raskite šią imtį atitinkančios variacinės eilutės narius $x_{(5)}, x_{(11)}$. Raskite imties kvartilius.

2. *Trisdešimt dviejų studentų kontrolinio darbo įvertinimai pateikti dažnių lentelėje*

$x_i =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_i =$	1	2	4	3	5	3	5	5	4

Raskite imties medianą ir kvartilius. Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

3. *Devynių studentų egzamino įvertinimai dešimties balų skalėje yra tokie*

$$7,\ 6,\ 7,\ 10,\ 6,\ 5,\ 5,\ 9,\ 8.$$

Raskite imties medianą ir vidurkį. Kol kas nežinomas dešimtojo studento egzamino rezultatas, tačiau žinoma, kad bent vieną balą jis tikrai gaus. Kiek daugiausiai gali sumažėti *imties vidurkis? Kiek daugiausiai gali padidėti? Ar gali vidurkis likti nepakitęs? Kada? Jeigu vidurkis liks nepakitęs, kaip pasikeis imties dispersija? Kaip nuo dešimtojo studento įvertinimo priklauso imties mediana: kada ji pasikeistų, kada ne?*

4. *Imties duomenys – piliečio N pokalbių telefonu trukmės minutėmis:*

$$3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 4,\ 2,\ 4,\ 7.$$

Kiek trūkio taškų turi pagal šią imtį sudaryta empirinė pasiskirstymo funkcija? Kokiame taške trūkis yra didžiausias? Nubraižykite empirinės pasiskirstymo funkcijos grafiką.

Atsakymai

1. $x_{(5)} = 15$; $x_{(11)} = 20$; $Q_1 = 12$; $Q_2 = 20$; $Q_3 = 25$.

2. $Q_1 = 5$; $Q_2 = 7$; $Q_3 = 9; \overline{x} \approx 6{,}719$; $s^2 \approx 5{,}434$.

3. $Q_2 = 7$; $\overline{x} = 7$; *vidurkis daugiausia gali sumažėti dydžiu* 0,6, *padidėti* – 0,3; *vidurkis nepakistų, jei paskutinis įvertinimas būtų* 7, *tada dispersija sumažėtų* $\frac{1}{3}$; *mediana nepasikeistų, jeigu paskutinis įvertinimas būtų ne mažesnis kaip* 7, *kitais atvejais ji būtų lygi* 6,5.

4. *Penkis trūkio taškus; trūkis didžiausias taške* $x = 4$.

4.3 Taškiniai įverčiai

Rūpi atsitiktinio dydžio vidurkis ar dispersija? Sukaupiate duomenų, paskaičiuojate, įvertinate. Viskas labai paprasta (beveik).

Dar kartą apžvelkime, ko gi mes tikimės iš statistikos. Atsitiktinio dydžio X reikšmės nusako tam tikros populiacijos individų savybes. Norime įgyti žinių apie tą atsitiktinį dydį. Kokių žinių? Pavyzdžiui, sužinoti vidurkį, dispersiją, kitus atsitiktinio dydžio parametrus. Parametrą, kuris mums rūpi, toliau žymėsime graikiška raide θ (teta). Iš kur galime sužinoti apytikslę parametro θ reikšmę? Žinoma, iš imties $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, kurios duomenis sukaupėme atlikę nepriklausomus atsitiktinio dydžio stebėjimus. Siekdami pabrėžti, kad iš imties gautoji reikšmė yra tik apytikslė, žymėsime ją θ^*. Norėdami surasti ją iš imties duomenų, atliekame skaičiavimus, kitaip tariant, skaičiuojame tam tikros funkcijos reikšmę:

$$\theta^* = h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pavyzdžiui, norėdami įvertinti nežinomą vidurkį $\theta = \mathbf{E}[X]$, skaičiuojame

$$\theta^* = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Tačiau ką gi galime pasakyti apie gautosios reikšmės $\theta^* = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir nežinomo parametro θ ryšį? Ar įverčio skaičiavimo taisyklė $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ duoda artimas parametrui θ reikšmes? Kokia garantija, kad gautasis įvertis yra geras? Kaip nustatyti, ar skaičiavimo taisyklė yra gera, ar ne?

Įverčio $\theta^* = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reikšmė priklauso nuo imties duomenų. Kitą kartą sudarę tokio pat dydžio imtį, t. y. pakartotinai gavę atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reikšmes, apskaičiuosime jau kiek kitokią įverčio reikšmę. Taigi įverčiai θ^*, kuriuos gauname, yra iš tikrųjų atsitiktinio dydžio

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

reikšmės.

Statistika yra imties funkcija

44 apibrėžimas. *Tegu $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra atsitiktinė imtis, o h – n argumentų funkcija. Atsitiktinį dydį*

$$T = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

vadinsime statistika.

Taigi mus dominančio parametro įverčiai – tai tam tikros statistikos reikšmės. Kadangi statistika yra naujas atsitiktinis dydis, sudarytas pasinaudojant imties dydžiais, tai galime nagrinėti statistikos reikšmių išsibarstymą apie nežinomą parametro reikšmę ir kitas reikšmių savybes. Toliau statistiką, kuri naudojama nežinomam parametrui vertinti, vadinsime tiesiog **taškiniu parametro įverčiu**. Natūralus pageidavimas, kad galimos taškinio parametro reikšmės būtų „gerai išsibarsčiusios“ apie tikrąją, bet mums nežinomą parametro reikšmę. Vienas iš tokio „gero išsibarstymo“ požymių – kad reikšmių vidurkis būtų lygus tikrajai vertinamo parametro reikšmei.

Nepaslinktasis įvertis

45 apibrėžimas. *Sakysime, kad $\theta^* = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yra nepaslinktasis parametro θ įvertis, jeigu*

$$\mathbf{E}[\theta^*] = \mathbf{E}[h(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta.$$

O dabar sugrįžkime prie ankstesniame skyrelyje apibrėžto imties vidurkio ir dispersijos.

56 teorema. *Tegu atsitiktinis dydis X turi vidurkį a ir dispersiją σ^2, o $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra šio dydžio atsitiktinė imtis. Tada*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

yra nepaslinktieji nežinomų parametrų a ir σ^2 įverčiai.

Įrodymas. Žinome, kad $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_j] = a, \mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[X_j] = \sigma^2$. Reikia įrodyti, kad $\mathbf{E}[\overline{X}] = a, \mathbf{E}[S^2] = \sigma^2$. Pirmoji lygybė beveik akivaizdi:

$$\mathbf{E}[\overline{X}] = \mathbf{E}[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)] = \frac{1}{n}(\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]) = \frac{na}{n} = a.$$

Kiek daugiau reikia pasidarbuoti įrodinėjant antrąją lygybę. Pirmiausia pertvarkykime S^2 :

$$\begin{aligned}
&(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a + a - \overline{X})^2 = \\
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)(a - \overline{X}) + n(a - \overline{X})^2 = \\
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 + 2(a - \overline{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) + n(a - \overline{X})^2 = \\
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 + 2(a - \overline{X})(n\overline{X} - na) + n(a - \overline{X})^2 = \\
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - n(a - \overline{X})^2, \\
&S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - \frac{n}{n-1}(a - \overline{X})^2
\end{aligned}$$

Dabar jau galime skaičiuoti vidurkį:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[(X_i - a)^2] - \frac{n}{n-1}\mathbf{E}[(a - \overline{X})^2] \\
&= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\mathbf{E}[(a - \overline{X})^2].
\end{aligned}$$

Teks pertvarkyti dar vieną reiškinį:

$$(a-\overline{X})^2 = \frac{1}{n^2}(na - X_1 - X_2 - \cdots - X_n)^2 =$$
$$\frac{1}{n^2}((a-X_1)+(a-X_2)+\cdots+(a-X_n))^2 =$$
$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(a-X_i)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}(a-X_i)(a-X_j).$$

Pasinaudoję tuo, kad $\mathbf{E}[(a-X_i)^2]=\sigma^2$,

$$\mathbf{E}[(a-X_i)(a-X_j)] = \mathbf{E}[(a-X_i)]\mathbf{E}[(a-X_j)] = (a-\mathbf{E}[X_i])(a-\mathbf{E}[X_j]) = 0,$$

gausime

$$\mathbf{E}[(a-\overline{X})^2] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$
$$\mathbf{E}[S^2] = \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\mathbf{E}[(a-\overline{X})^2] = \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

Galų gale įrodymas baigtas.

Ši teorema pateikia tikslų atsakymą į klausimą dėl vardiklio dispersijos įverčio išraiškoje. Jeigu dispersijai naudotume įvertį

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

suskaičiavę vidurkį gautume $\mathbf{E}[S_0^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$. Taigi toks įvertis nėra nepaslinktas dispersijos įvertis.

Aptarėme vieną taškinių įverčių „kokybės“ kriterijų – nepaslinktumo sąlygą. Dar viena gerą įverčių savybę galima nustatyti iš didžiųjų skaičių dėsnio. Iš tikrųjų, pritaikę šį dėsnį dydžiams $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kurie sudaro atsitiktinio dydžio X su vidurkiu $\mathbf{E}[X]=a$ imtį, gautume: su kiekvienu $\epsilon > 0$

$$P(|\overline{X}-a| \leqslant \epsilon) \to 1, \quad n\to\infty.$$

Kitaip tariant, turėdami didesnę imtį, galime tikėtis patikimesnės įverčio $\overline{X}$ reikšmės. Tai teisinga ir dispersijos įverčiui S^2, tik įrodymas būtų kiek sudėtingesnis.

Tačiau kaip apskritai gauti taškinius įverčius? Kokius naudoti metodus? Vieną, turbūt patį paprasčiausią, dabar aptarsime.

Dėl atsitiktinio dydžio X vidurkio taškinio įverčio daug galvos nesukome – tiesiog pasinaudojome statistika

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}.$$

Taip pat nereikia daug galvoti, kaip sudaryti momentų $\alpha_k = \mathbf{E}[X^k]$ įverčius. Minėjome, kad šis skaičius (kai jis egzistuoja) tikimybių teorijoje paprastai vadinamas atsitiktinio dydžio X k-osios eilės momentu.

Empiriniai momentai

46 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio k-osios eilės momento $\alpha_k = \mathbf{E}[X^k]$ įvertį*

$$a_k = \frac{X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k}{n}$$

vadinsime atsitiktinio dydžio empiriniu k-osios eilės momentu.

Galime lengvai įsitikinti, kad empiriniai momentai yra nepaslinktieji įverčiai. O kaip sudaryti įverčius kitiems parametrams, ne tik momentams? Pavyzdžiui, binominio dydžio $X \sim \mathcal{B}(k, p)$ pasiskirstymas priklauso nuo dviejų parametrų – k ir p, tolygiojo dydžio $X \sim \mathcal{T}([a, b])$ taip pat nuo dviejų – a, b.

Tarkime, atsitiktinio dydžio pasiskirstymą „valdo“ r parametrų $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Nuo jų taip pat priklauso ir momentų reikšmės. Taigi, jeigu apskaičiuotume juos, gautume reiškinius $\alpha_j = \alpha_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$. Tačiau tai tik formalios išraiškos, juk parametrų reikšmių nežinome.

Atlikę bandymus gautume imtį ir galėtume surasti empirinių momentų reikšmes $a_1, a_2, \ldots, a_r$. O dabar svarbiausioji idėja: sulyginkime teorinius momentus ir empirinius momentus:

$$\alpha_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_1, \ \alpha_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_2, \quad \ldots, \quad \alpha_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_r.$$

Į gautąsias lygybes galime žvelgti kaip į lygtis, kuriose $\theta_1, \ldots, \theta_r$ yra nežinomieji. Jei pavyks išspręsti, išreikšime rūpimus parametrus empiriniais momentais. Šios išraiškos – ieškomi parametrų įverčiai. Ar geri šie įverčiai? Tirti jų savybes ne visada paprasta.

62 pavyzdys. Kiek metimų ir koks taiklumas?

Šaulys šaudė į n taikinių po k kartų. Žinoma, kad į taikinius pataikė $x_1, \ldots, x_n$ kartų. Po kiek kartų jis šaudė ir kokia taiklaus šūvio tikimybė?

Žinoma, tikslaus šūvių skaičiaus ir taiklaus šūvio tikimybės nesužinosime. Šiuos dydžius galime tik įvertinti. Pažymėkime taiklaus šūvio tikimybę p. Kadangi į kiekvieną taikinį jis šovė po k kartų, tai taiklių šūvių skaičius yra atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{B}(k, p)$. Nežinome dviejų parametrų: $\theta_1 = k, \theta_2 = p$. Taigi prireiks dviejų momentų: $\alpha_1 = \mathbf{E}[X] = kp$ ir $\alpha_2 = \mathbf{E}[X^2]$.

Žinome, kaip skaičiuojama dydžio X dispersija: $\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = kp(1 - p)$. Taigi

$$\mathbf{E}[X^2] = kp(1 - p) + \mathbf{E}[X]^2 = kp(1 - p) + (kp)^2.$$

Prilyginę teorinius momentus empiriniams gauname dvi lygtis

$$\alpha_1 = kp = a_1, \quad \alpha_2 = kp(1-p) + (kp)^2 = a_2.$$

Išsprendę rasime tikimybės ir šūvių skaičiaus įverčius:

$$p^* = 1 - \frac{a_2 - a_1^2}{a_1}, \quad k^* = \frac{a_1}{p^*}.$$

Išbandykime šias formules su skaičiais. Tarkime, imtį sudaro $n = 20$ duomenų, taigi šaudyta į dvidešimt taikinių. Taiklių šūvių skaičiai tokie:

$$4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 3,\ 8,\ 8,\ 6,\ 6,\ 5,\ 8,\ 6,\ 4,\ 7,\ 6,\ 5,\ 6,\ 4,\ 8,\ 4.$$

Apskaičiavę empirinius vidurkius gausime $a_1 = 5{,}7,\ a_2 = 34{,}7$. Tada

$$p^* \approx 0{,}612, \quad k^* \approx 9{,}3.$$

O kaip gi iš tikrųjų buvo gauta imtis? Buvo generuota dvidešimt atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}6)$ reikšmių. Taigi gavome gana tikslius įverčius. Tačiau kai imtis nedidelė, gero tikslumo nėra ko tikėtis. Kelios nedažnai įgyjamos reikšmės gali labai iškreipti rezultatus.

Panagrinėkime dar vieną pavyzdį.

63 pavyzdys. Vėlavimas iš mokyklos

Moksleiviui grįžti iš mokyklos pakanka 15 minučių, tačiau jis visada grįžta vėliau. Vėlavimo laikas X yra atsitiktinis dydis, sudarytas iš dviejų nepriklausomų dėmenų: $X = X_1 + X_2$, čia $X_1 \sim \mathcal{T}([0; a])$ papildomas laikas, sugaištas kelyje, o $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ – laikas sugaištas kalbantis su draugu prieš atsisveikinant. Žinomi n dienų vėlavimo laikai $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Reikia gauti parametrų a ir λ įverčius.

Padėtis kiek neįprasta, nes nežinome, pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Tačiau žinome, kad jo pasiskirstymas priklauso nuo dviejų parametrų $\theta_1 = a, \theta_2 = \lambda$. Taikysime momentų metodą. Apskaičiuokime du teorinius momentus:

$$\alpha_1 = \mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \frac{a}{2} + \lambda,$$
$$\alpha_2 = \mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[(X_1 + X_2)^2] = \mathbf{E}[X_1^2] + 2\mathbf{E}[X_1] \cdot \mathbf{E}[X_2] + \mathbf{E}[X_2^2] =$$
$$\frac{a^2}{3} + \lambda a + \lambda^2 + \lambda,$$

čia pasinaudojome tuo, kad

$$\mathbf{E}[X_1^2] = \int_0^a \frac{1}{a} x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^2}{3}, \quad \mathbf{E}[X_1 X_2] = \mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}[X_2],$$
$$\mathbf{E}[X_2^2] = \mathbf{D}[X_2] + \mathbf{E}[X_2^2] = \lambda + \lambda^2.$$

Taigi įverčiams rasti turime dvi lygybes:

$$\frac{a}{2}+\lambda=a_1,\quad \frac{a^2}{3}+\lambda a+\lambda^2+\lambda=a_2.$$

Iš pirmos lygybės išreiškę $a=2a_1-2\lambda$ ir įstatę išraišką į antrąją lygybę, gausime kvadratinę lygtį λ įverčiui rasti. Ta lygtis po pertvarkių atrodytų taip:

$$\frac{1}{3}\lambda^2+\left(1-\frac{2}{3}a_1\right)\lambda+\frac{4}{3}a_1^2-a_2=0. \tag{4.2}$$

Panagrinėkime skaitinį pavyzdį. Žinome dešimties pavėlavimų trukmes:

8,07; 16,53; 12,63; 11,57; 12,16; 4,49; 7,39; 13,73; 13,78; 16,83.

Apskaičiavę pirmuosius empirinius momentus gausime $a_1\approx 11{,}72; a_2\approx 151{,}63$. Lygtis (4.2) turi du sprendinius: $\lambda_1\approx 13{,}38$ ir $\lambda_2\approx 7{,}06$. Tačiau pirmoji reikšmė duotų neprasmingą mūsų situacijoje a reikšmę. Taigi, pasirinkę įvertį $\lambda^*=7{,}06$, gauname $a^*=9{,}32$.

O kokios gi buvo tikrosios parametrų reikšmės, panaudotos generuojant imtį? Štai jos: $\lambda=7, a=5$. Vieno parametro reikšmę pavyko nustatyti itin tiksliai.

Uždaviniai

1. *Autobusas atvažiuoja kartais kiek vėluodamas. Atvažiavimo laiko ir nustatyto grafike laiko skirtumas yra atsitiktinis dydis X, tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,a]$, t. y. $X\sim\mathcal{T}([0;a])$. Raskite taškinį parametro a įvertį momentų metodu pasinaudoję imties duomenimis:*

0,549; 3,99; 1,49; 0,0239; 0,562; 3,20; 4,39; 2,52; 3,99; 1,81.

2. *Autobusas atvažiuoja kartais kiek vėluodamas, kartais kiek per anksti. Atvažiavimo laiko ir nustatyto grafike laiko skirtumas yra atsitiktinis dydis X, tolygiai pasiskirstęs intervale $[-a;a]$, t. y. $X\sim\mathcal{T}([-a;a])$. Raskite taškinį parametro a įvertį momentų metodu. Pabandę spręsti šį uždavinį įsitikinsite, kad pirmasis empirinis momentas nepadeda. Todėl pasinaudokite antruoju. Imties duomenys:*

−1,73; 1,09; −0,608; 1,44; −0,151; −0,467; −1,96; −1,19; 1,78; −1,10.

3. *Jono pokalbio trukmė – atsitiktinis dydis $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$. Suraskite taškinį dydžio λ įvertį pasinaudoję imties duomenimis:*

3,49; 0,619; 2,00; 2,81; 0,199; 5,11; 3,60; 11,1; 1,28; 4,80.

Atsakymai

1. $a^*=4{,}50498$. **2.** $a^*\approx 2{,}225$. **3.** $\lambda^*\approx 0{,}2856$.

4.4 Pasikliautiniai intervalai

Pasikliautinis intervalas yra tarsi gaubtelis, kuriame tikriausiai yra mums rūpimas dydis – parametro reikšmė. Kažkas panašaus į katę maiše, tik su tam tikra garantija.

Daugeliui žmonių patinka garantijos. Jeigu jūs kam nors parodysite taškinį svarbaus parametro įvertį, galite sulaukti klausimo: o kokia garantija, kad ši reikšmė yra artima tikrajai parametro reikšmei? Šiame skyrelyje panagrinėsime statistikos uždavinius, kurių atsakymai pateikiami su tam tikra garantija.

Pasikliautinis intervalas

47 apibrėžimas. *Tegu X yra stebimas atsitiktinis dydis, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ jo atsitiktinė imtis, θ – su dydžiu X susijęs parametras, o*

$$\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

– du taškiniai šio parametro įverčiai. Intervalą

$$I = (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

vadinsime pasikliautiniu parametro θ įverčiu su pasikliovimo lygmeniu Q, $0 < Q < 1$, jei

$$P(\theta \in (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \geqslant Q.$$

Taigi pasikliautinis intervalas yra tarsi uždaryta dėžutė, jūs ją įteikiate ir priduriate, kad tikimybė, jog ji netuščia, yra ne mažesnė už Q. Pasikliovimo lygmuo ir yra garantija.

Ką reiškia, kad pasikliovimo lygmuo lygus, pavyzdžiui, 0,75? Galima suvokti tai taip: jeigu pagal naudojamą metodiką bus sudaryti pasikliautiniai intervalai iš, pavyzdžiui, $N = 1000$ vienodo dydžio imčių, tai maždaug 750 intervalų tikrai „pagaus" rūpimo parametro reikšmę. Tačiau ar jūs tikrai atsidūrėte tarp tų laimingųjų, kurie sukonstravo gerus intervalus, deja, nesužinosite.

Panagrinėkime vieną paprastą pavyzdį.

64 pavyzdys. Sukirmiję grybai

Kokia tikimybė, kad miške rastas grybas bus sukirmijęs? Tikriausiai kiekvienas pasiūlytų tokį šio uždavinio sprendimo būdą. Pririnkime krepšį grybų, suskaičiuokime, kiek jų yra iš viso, kiek sukirmijusių. Jeigu bendras grybų skaičius yra n, o sukirmijusių – m, tai teigsime, kad tikimybė, jog miško grybas sukirmijęs, lygi $p = m/n$.

Kokį gi statistikos uždavinį šitaip išsprendėme? Vienas grybas – vienas bandymas, turintis dvi baigtis. Apibrėžkime atsitiktinį dydį X, įgyjantį reikšmę 1, jei grybas sukirmijęs, ir reikšmę 0, jeigu nesukirmijęs. Taigi

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Šio dydžio pasiskirstymas priklauso nuo vieno parametro $\theta = p$. Krepšys grybų tai atsitiktinio dydžio imtis, patikrinę visus juos, gauname nulių ir vienetų seką

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m.$$

Šie nuliai ir vienetai yra imties dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reikšmės, o m/n – nežinomo parametro taškinis įvertis, kuriam gauti pasinaudojome pirmos eilės empiriniu momentu

$$a_1 = \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Tačiau jokios garantijos dėl šio taškinio įverčio tinkamumo negalime duoti. Tad naudodamiesi ta pačia imtimi sudarykime pasikliautinį tikimybės p intervalą su pasikliovimo lygmeniu $0 < Q < 1$. Panaudosime Čebyšovo nelygybę dydžiui $\overline{X}$. Kadangi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\overline{X}] = p,\\
&\mathbf{D}[\overline{X}] = \frac{1}{n^2}\mathbf{D}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =\\
&\frac{1}{n^2}(\mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n]) = \frac{n\mathbf{D}[X]}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n},
\end{aligned}$$

tai Čebyšovo nelygybę $P(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geqslant \epsilon) \leqslant \mathbf{D}[\overline{X}]/\epsilon^2$ galime užrašyti taip:

$$P(|\overline{X} - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n}, \quad \text{arba} \quad P(|\overline{X} - p| < \epsilon) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n}.$$

Pastebėkime, kad funkcija $f(p) = p(1-p)$, kai $0 < p < 1$, didžiausiąją reikšmę įgyja su $p = 1/2$, taigi $p(1-p) \leqslant 1/4$. Tada iš Čebyšovo nelygybės gauname

$$P(|\overline{X} - p| < \epsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{4\epsilon^2 n}, \quad \text{arba} \quad P(\overline{X} - \epsilon < p < \overline{X} + \epsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{4\epsilon^2 n}.$$

O dabar parinkime ϵ tokį, kad būtų

$$1 - \frac{1}{4\epsilon^2 n} = Q, \quad \text{t. y.} \quad \epsilon = \epsilon(Q) = \frac{1}{2\sqrt{n(1-Q)}}.$$

Tada

$$P(\overline{X} - \epsilon(Q) < p < \overline{X} + \epsilon(Q)) \geqslant Q,$$

kitaip tariant, $(\overline{X} - \epsilon(Q), \overline{X} + \epsilon(Q))$ yra pasikliautinis tikimybės intervalas su pasikliovimo lygmeniu Q.

Reikia pabrėžti, kad jį sudarėme naudodami labai paprastą įrankį – Čebyšovo nelygybę, todėl skaičiuodami intervalo rėžius su konkrečiomis reikšmėmis gautume intervalus su geroka „atsarga“. Tegu, pavyzdžiui, imtis iš tikrųjų didelė: $n = 1000$, o $m = 470$. Apskaičiuokime pasikliautinius intervalus su įvairiomis Q reikšmėmis. Štai rezultatai

$Q =$	0,6	0,7	0,8	0,9
$\overline{X} - \epsilon$	0,445	0,441	0,435	0,42
$\overline{X} + \epsilon$	0,495	0,499	0,505	0,52
$2\epsilon =$	0,05	0,058	0,07	0,1.

Paskutinėje lentelės eilutėje pateiktas pasikliautinio intervalo ilgis. Kuo didesnis pasikliovimo lygmuo (kuo didesnės garantijos reikia), tuo atsargesnis mūsų sprendimas.

4.5 Pasikliautiniai intervalai normaliųjų dydžių vidurkiams

Statistika kartais primena receptų rinkinį: jeigu norite to, darykite šitaip, jeigu kito – taip. Tačiau receptai ne iš piršto laužti, bet pagrįsti matematiškai.

Prisiminkime normaliųjų dydžių šeimą. Atsitiktinis dydis X vadinamas standartiniu normaliuoju ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$), jeigu jo tankis yra

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Žinome, kad $\mathbf{E}[X] = 0, \mathbf{D}[X] = 1$. Jeigu $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tai su bet kokiais skaičiais $\sigma \neq 0, \mu$ atsitiktinis dydis $Y = \sigma X + \mu$ taip pat yra normalusis,

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \mathbf{E}[Y] = \mu, \quad \mathbf{D}[Y] = \sigma^2.$$

Jeigu parinkę kokius nors skaičius $a \neq 0$ ir b sudarytume atsitiktinį dydį $Z = aY + b$, jis vėl būtų normalusis. Taigi tiesinės vieno normaliojo dydžio transformacijos vėl duoda normaliuosius dydžius.

O dabar prisiminkime dar vieną svarbią normaliųjų dydžių šeimos savybę.

57 teorema. *Jeigu X_1, X_2 yra du nepriklausomi normalieji dydžiai, tai jų suma $X = X_1 + X_2$ taip pat yra normalusis dydis.*

Taigi jei $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Derindami teiginius apie normaliojo dydžio tiesinę transformaciją ir nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumą, gauname tokią išvadą.

58 teorema. *Jei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ bet kokie skaičiai ir ne visi a_i lygūs nuliui, tai atsitiktinis dydis*

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b$$

taip pat yra normalusis.

Taigi kiekvienos nepriklausomų atsitiktinių dydžių sistemos tiesinė kombinacija vėl yra normalusis atsitiktinis dydis.

O dabar grįžkime prie statistikos uždavinių. Turbūt nereikia įtikinėti, kad normaliaisiais dydžiais nusakomos daugelio populiacijų savybės. Todėl normaliųjų dydžių parametrų vertinimo uždaviniai yra svarbūs.

Tarkime, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ imtis. Sudarysime svarbią įvairiems taikymams šios imties statistiką.

59 teorema. *Tegu $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tada atsitiktinis dydis*

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \overline{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

yra standartinis normalusis, t. y. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Taigi iš kiekvieno normaliojo atsitiktinio dydžio imties galime sudaryti statistiką, kuri pasiskirsčiusi pagal standartinį normalųjį dėsnį.

Įrodymas. Kadangi

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} = \\ & \frac{X_1}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{X_2}{\sigma\sqrt{n}} + \cdots + \frac{X_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}, \end{aligned}$$

tai Z yra nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių tiesinė kombinacija, taigi – vėl normalusis dydis. Todėl pakanka įsitikinti, kad $\mathbf{E}[Z] = 0, \mathbf{D}[Z] = 1$. Tai nesudėtinga parodyti, naudojantis vidurkio ir dispersijos savybėmis.

Pasinaudosime šia statistika sudarydami pasikliautinį intervalą normaliojo dydžio vidurkiui su pasikliovimo lygmeniu Q.

Tarkime, stebimas dydis X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, t. y. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, be to, žinome dispersijos reikšmę. Tegu $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė imtis. Apibrėžkime statistiką

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Naudodami imties duomenis šios statistikos reikšmių apskaičiuoti negalime, nes nežinome vidurkio μ reikšmės. Tačiau žinome, kad Z yra standartinis normalusis dydis, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Tegu Q yra pasikliovimo lygmuo. Jeigu standartinio normaliojo dydžio tankio grafikas ir tiesės $y = 0, x = a, x = b$ apriboja Q ploto figūrą, tai $P(a < Z < b) = Q$. Intervalas $(a; b)$ bus pats trumpiausias, kai jis bus simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu, t. y. kai bus $b = z, a = -z$. Kaip rasti skaičiaus z reikšmę? Plotas po tankio grafiku į kairę nuo tiesės $x = -z$ turi būti lygus plotui į dešinę nuo tiesės $x = z$, o jų suma turi būti $1 - Q$. Taigi tie plotai lygūs $(1 - Q)/2$, todėl z yra standartinio normaliojo dydžio $(1 - Q)/2$ lygio kritinė reikšmė, kitaip tariant, yra $1 - (1 - Q)/2 = (1 + Q)/2$ lygio kvantilis. Pažymėkime šią z reikšmę $z_{(1+Q)/2}$, ją gausime spręsdami lygtį

$$\Phi(z) = \frac{1 + Q}{2}.$$

Šios lygties sprendinius galime rasti galime pasinaudoję lentelėmis arba kompiuterio programomis. Taigi

$$P(-z < Z < z) = P\Big(-z < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\Big) = Q, \quad z = z_{(1+Q)/2}.$$

Po paprastų pertvarkių šią lygybę galime perrašyti taip:

$$P\Big(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = Q.$$

Ši lygybė – tai teiginys, kad nežinomas vidurkis patenka į intervalą, kurio rėžius galime apskaičiuoti naudodamiesi imties duomenimis.

Pasikliautinis intervalas atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vidurkiui, kai σ^2 žinome

Pasikliautinis intervalas vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenuo Q, yra

$$\Big(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big), \quad z = z_{(1+Q)/2},$$

čia $0 < Q < 1$, $z_{(1+Q)/2}$ yra lygties $\Phi(z) = (1 + Q)/2$ sprendinys.

65 pavyzdys. Stebint atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ reikšmes, gauta tokia dešimties duomenų imtis

$$5{,}26;\ 4{,}80;\ 4{,}91;\ 4{,}98;\ 4{,}79;\ 4{,}99;\ 3{,}81;\ 5{,}29;\ 6{,}15;\ 4{,}21.$$

Apskaičiavę vidurkį, gautume $\overline{X} = 4{,}919$. Kokio ilgio pasikliautinius intervalus galime sudaryti naudodamiesi šiais duomenimis?

Štai rezultatai:

$Q =$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$z =$	0,842	1,04	1,28	1,64	1,96
$\underline{\mu} =$	4,65	4,59	4,52	4,40	4,30
$\overline{\mu} =$	5,19	5,25	5,32	5,44	5,54
$ilgis =$	0,54	0,66	0,80	1,04	1,24

Lentelėje $\underline{\mu}, \overline{\mu}$ žymi atitinkamai apatinius ir viršutinius pasikliautinių intervalų rėžius, paskutinėje eilutėje nurodytas pasikliautinio intervalo ilgis.

Įdomu, kiek reikėtų duomenų, kad pasikliautinio intervalo ilgis neviršytų, pavyzdžiui, 0,1? Kadangi intervalo ilgis $2z\sigma/\sqrt{n} = 2z/\sqrt{n}$, atsakymą gautume spręsdami nelygybes $2z\sigma/\sqrt{n} \leqslant 0{,}1$. Pasikliovimo lygmenims $Q = 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}95$ atitinkamai gautume, kad duomenų turi būti ne mažiau kaip

$$284,\ 430,\ 657,\ 1083,\ 1537.$$

Jeigu pakartosite skaičiavimus su pavyzdžio duomenimis, galite gauti kiek skirtingas reikšmes, nes čia pateikti rezultatai, gauti skaičiuojant su tikslesnėmis nei pateiktos lentelėje z reikšmėmis.

Tokia padėtis, kai žinome normaliojo dydžio dispersiją, nėra labai tikroviška. Dažniausiai nežinome nei vidurkio, nei dispersijos. Kaipgi sudaryti vidurkio pasikliautinį intervalą tokiu atveju? Prisiminkime, kad

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

yra nepaslinktas dispersijos įvertis. Pirma mintis, kuri kyla, galvojant, kuo pakeisti statistiką Z, tokia: pakeiskime Z išraiškoje σ į S. Šitaip sudarysime naują statistiką

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Iš karto atsiranda nauja kliūtis: nežinome, kaip pasiskirstęs atsitiktinis dydis T.

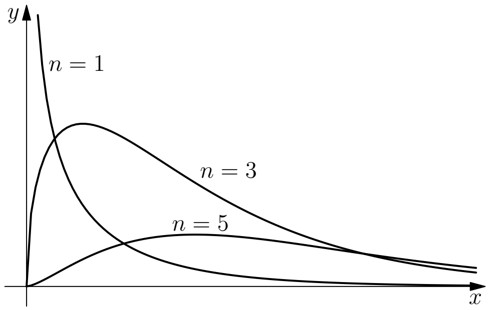
Du nauji dydžiai

48 apibrėžimas. *Tegu $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi, pagal standartinį normalųjį dėsnį pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime du naujus atsitiktinius dydžius*

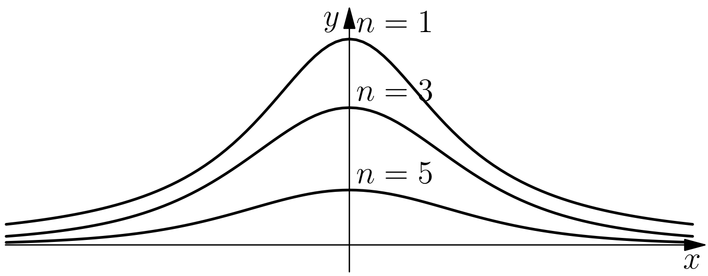
$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, \quad T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_n^2/n}}.$$

Sakysime, kad dydis χ_n^2 pasiskirstęs pagal chi kvadratu dėsnį su n laisvės laipsnių, žymėsime $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$, o dydis T_n – pagal Studento dėsnį su n laisvės laipsnių, žymėsime $T_n \sim \mathcal{S}t(n)$.

Abu naujieji dydžiai yra absoliučiai tolydūs, žr. jų tankių brėžinius.



Atsitiktinių dydžių χ_n^2 tankių grafikai. Kai $n = 1$, tankis neaprėžtai didėja, artėjant prie nulio.



Atsitiktinių dydžių $T_n \sim \mathcal{S}t(n)$ tankių grafikai.

Kadangi šie dydžiai svarbūs sprendžiant įvairius statistikos uždavinius, yra sudarytos jų pasiskirstymo funkcijų reikšmių ir kvantilių lentelės. Žinoma, šias reikšmes skaičiuoja ir įvairios kompiuterių programos.

O dabar grįžkime prie pasikliautinių intervalų.

Svarbi statistika

60 teorema. *Tegu* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *o* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *yra šio atsitiktinio dydžio imtis. Tada*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{S}t(n-1).$$

Naudodamiesi šiuo teiginiu galime sudaryti pasikliautinį intervalą vidurkiui, kai dispersija yra žinoma. Pažymėkime $t = t_{(1+Q)/2}(n-1)$ atsitiktinio dydžio $T_{n-1} \sim \mathcal{S}t(n-1)$ lygmens $(1+Q)/2$ kvantilį, t. y. lygties $F_{T_{n-1}}(t) = (1+Q)/2$ sprendinį. Tada

$$P(-t < T < t) = P\Big(-t < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t\Big) = Q,$$

arba

$$P\Big(\overline{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\Big) = Q.$$

Pasikliautinis intervalas atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vidurkiui, kai σ^2 nežinome

Pasikliautinis intervalas vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenuo Q, *yra*

$$\Big(\overline{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\Big),$$

čia $0 < Q < 1, t = t_{(1+Q)/2}(n-1)$ *yra lygties*

$$F_{T_{n-1}}(t) = (1+Q)/2, \quad T_{n-1} \sim \mathcal{S}t(n-1)$$

sprendinys,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \quad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

66 pavyzdys. Dešimties duomenų imtis

Stebint atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ reikšmes gauta tokia dešimties duomenų imtis

4,19; 4,20; 5,12; 6,11; 4,37; 5,50; 4,81; 4,44; 4,17; 5,91.

Imties vidurkis $\overline{X} = 4,88$, dispersija ir standartinis nuokrypis $s^2 = 0{,}544, s = 0{,}738$. Pasikliautinių intervalų, kai pasikliovimo lygmenys Q, rėžiai pateikti lentelėje.

$Q =$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$z =$	0,883	1,10	1,38	1,83	2,26
$\underline{\mu} =$	4,67	4,62	4,56	4,45	4,35
$\overline{\mu} =$	5,09	5,14	5,20	5,31	5,41
$ilgis =$	0,411	0,512	0,645	0,853	1,06

Šio pavyzdžio imtis sudaryta iš to paties kaip ankstesniame pavyzdyje dydžio $X \sim \mathcal{N}(5,1)$ reikšmių. Sudarydami pasikliautinį intervalą naudojome mažiau informacijos negu pirmame pavyzdyje, nes nežinojome dispersijos. Palyginę abiejų pavyzdžių pasikliautinius intervalus, galime kiek nustebti. Naudodami mažiau informacijos gavome tikslesnius rezultatus (trumpesnius intervalus)! Kuo tai galime paaiškinti?

Atkreipkime dėmesį, kad kai dispersija yra žinoma, pasikliautinio intervalo ilgis nepriklauso nuo imties. O kai nežinoma – intervalo ilgis $2tS/\sqrt{n}$ yra atsitiktinis. Taigi kartais galime gauti labai tikslius rezultatus, o kartais – labai netikslius. Juk ir visai netaiklus šaulys gali pataikyti į taikinį iš karto, tačiau neskubėsime žavėtis jo taiklumu, neįsitikinę, ar visada jis taip taikliai šaudo.

Uždaviniai

1. *Normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ imtis*

1,73; 3,39; 1,89; ,459; 1,09; 2,34; 2,26; 1,63; 2,63; 2,13; 2,80; 1,46.

Sudarykite pasikliautinius intervalus vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenys $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95.$

2. *Normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0{,}25)$ imtis*

2,60; 2,98; 3,13; 3,60; 2,74; 3,35; 3,08; 3,03; 2,88; 3,19; 3,36; 2,78.

Sudarykite pasikliautinius intervalus vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenys $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95.$

3. *Kiek duomenų turėtų būti atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu 0{,}25)$ imtyje, kad pasikliautinių intervalų su pasikliovimo lygmenimis* $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$ *ilgiai būtų mažesni už* $0{,}01$?

4. *Normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ imtis*

0,648; 2,65; 2,83; 0,935; −0,250; 2,36; 3,41; 2,24; 2,57; 1,05; 1,10.

Sudarykite pasikliautinius intervalus vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenys $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95.$

5. *Normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ imtis*

0,402; 1,70; 0,835; 0,961; 1,21; 1,29; 0,419; 1,50; 1,40; 1,23; 1,02.

Sudarykite pasikliautinius intervalus vidurkiui, kai pasikliovimo lygmenys $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95.$

Atsakymai
1. [1,679; 2,281]; [1,611; 2,349]; [1,506; 2,454]; [1,414; 2,546].
2. [2,910; 3,210; [2,876; 3,244; [2,823; 3,297; [2,778; 3,342].
3. *Daugiau kaip* 10730; 16440; 27060; 38420.
4. [1,407; 2,153]; [1,311; 2,249]; [1,161; 2,399]; [1,018; 2,542].
5. [0,954; 1,226]; [0,918; 1,262]; [0,863; 1,317]; [0,811; 1,369].

4.6 Sėkmės tikimybės pasikliautiniai intervalai

Vėl grįžtame prie dydžių, įgyjančių tik dvi reikšmes, kitaip tariant, – prie Bernulio bandymų...

Gaminys bus geras ar blogas, metimas į krepšį taiklus arba ne, grybas bus sukirmijęs ar sveikas... – tai vis bandymų su dviem baigtimis – sėkme ir nesėkme pavyzdžiai. Tikimybių teorijos požiūriu atlikę kiekvieną bandymą gauname vieną iš galimų atsitiktinio dydžio X reikšmių – vienetą, jei sėkmė, nulį, jei nesėkmė:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q, \quad q = 1 - p. \tag{4.3}$$

Tokio dydžio imtis – nulių ir vienetų seka $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, o vidurkis $\mathbf{E}[X] = p$. Taškinis tikimybės įvertis – pirmasis empirinis momentas

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\text{sėkmių skaičius}}{n}.$$

Pradėdami nagrinėti pasikliautinius intervalus pasinaudojome Čebyšovo nelygybe ir sudarėme sėkmės tikimybės pasikliautinį intervalą. Metodas geras, tačiau dažnai duoda labai jau atsargius rezultatus. Ar būtume patenkinti, pavyzdžiui, jeigu automobilių greičio vidurkiui kas nors mums nurodytų pasikliautinį intervalą nuo 10 iki 100 kilometrų per valandą?

Šiame skyrelyje pasikliautiniams intervalams sudaryti pasinaudosime centrine ribine teorema. Jos esmę trumpai galime nusakyti taip: jei $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė (4.3) dydžio imtis, tai su dideliais n statistika

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

pasiskirsčiusi beveik kaip standartinis normalusis dydis.

Taigi, jei Q yra pasikliovimo lygmuo, o $z = z_{(1+Q)/2}$ standartinio normaliojo dydžio $(1+Q)/2$ lygio kvantilis, tai galime manyti, kad

$$P(-z < Z < z) = P\Big(-z < \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z\Big) \approx Q.$$

Šią lygybę galime pertvarkyti taip:

$$P\Big(-z\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \overline{X} - p < \ z\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big) \approx Q, \quad z = z_{\frac{1+Q}{2}}. \tag{4.4}$$

Toliau galime elgtis dvejopai. Viena vertus, sudarydami pasikliautinį intervalą naudodamiesi Čebyšovo nelygybe nustatėme, kad $p(1-p) \leqslant 1/4$. Jeigu pakeisime $p(1-p)$ mūsų nelygybėje į $1/4$, gausime

$$P\Big(-\frac{z}{2\sqrt{n}} < \overline{X} - p < \frac{z}{2\sqrt{n}}\Big) \geqslant Q,$$
$$P\Big(\overline{X} - \frac{z}{2\sqrt{n}} < p < \overline{X} + \frac{z}{2\sqrt{n}}\Big) \geqslant Q,$$
$$I = \Big(\overline{X} - \frac{z}{2\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{z}{2\sqrt{n}}\Big) \text{ yra pasikliautinis } p \text{ intervalas,} \quad z = z_{\frac{1+Q}{2}}.$$

Šitaip mes sudarome ilgesnį intervalą negu galėtume. Nenorėdami prarasti tikslumo, galėtume elgtis taip. Pakeiskime (4.4) nelygybę ekvivalenčia jai nelygybe

$$(\overline{X} - p)^2 < z^2\frac{p(1-p)}{n}$$

ir spręskime ją laikydami nežinomuoju p. Išbandykime abu metodus pasitelkę tą patį sukirmijusių grybų pavyzdį.

67 pavyzdys. Sukirmiję grybai

Iš $n = 1000$ grybų $m = 470$ buvo sukirmiję. Sudarysime pasikliautinius intervalus su įvairiomis Q reikšmėmis taikydami Čebyšovo nelygybę ir abu metodus, naudojančius centrinę ribinę teoremą. Pasikliautinių intervalų apatinius rėžius žymėsime $\underline{p_0}, \underline{p_1}, \underline{p_2}$, viršutinius – $\overline{p_0}, \overline{p_1}, \overline{p_2}$, o l_0, l_1, l_2 žymėsime pasikliautinių intervalų ilgius.

$Q =$	0,6	0,7	0,8	0,9
$\underline{p_0} =$	0,445	0,441	0,435	0,42
$\overline{p_0} =$	0,495	0,499	0,505	0,52
$l_0 =$	0,05	0,058	0,07	0,1
$\underline{p_1} =$	0,4567	0,4536	0,4497	0,4440
$\overline{p_1} =$	0,4833	0,4864	0,4903	0,4960
$l_1 =$	0,0266	0,0329	0,0404	0,0518
$\underline{p_2} =$	0,4567	0,4537	0,4498	0,4440
$\overline{p_2} =$	0,4833	0,4864	0,4903	0,4960
$l_2 =$	0,0266	0,0327	0,0404	0,0518

Matome, kad centrinė ribinė teorema gerokai patikslino pasikliautinius intervalus, tačiau abu jos taikymo metodai davė labai artimus rezultatus. Toks nedidelis abiejų metodų rezultatų skirtumas galbūt yra todėl, kad $\overline{X} = m/n = 0{,}47$ yra arti 0,5.

Tarkime, sukirmijusių grybų skaičius dabar lygus $m = 300$. Jeigu sudarytume pasikliautinius intervalus pirmais dviem būdais, jie būtų to paties ilgio, tiktai jų centrai būtų kitame taške. Trečiuoju metodu su $Q = 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9$ sudarytų intervalų ilgiai būtų

$$0{,}0244;\ 0{,}03;\ 0{,}0371;\ 0{,}048.$$

Tačiau taikant centrinę ribinę teoremą atsiranda paklaida dar dėl vienos priežasties. Juk statistikos Z pasiskirstymo dėsnis nevisiškai sutampa su standartinio normaliojo dydžio dėsniu! Taigi pasikliautinių intervalų, kuriuos sudarėme pasikliovimo lygmuo galbūt kiek mažesnis už Q!

Uždaviniai

1. *Iš* 2212 *apklaustų gyventojų* 654 *atsakė, kad remia dabartinį vyriausybės kursą. Pasinaudokite centrine ribine teorema ir sudarykite pasikliautinius intervalus vyriausybę remiančių gyventojų procentui, kai pasikliovimo lygmenys* $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$.

2. *Kiek rinkėjų reikėtų apklausti, kad pasikliautinių intervalų vyriausybę remiančių gyventojų procentui, jei paskliovimo lygmenys* $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$ *ilgiai būtų ne didesni už* 1?

3. *Iš* 3000 *pasėtų ir išdygusių žirnių* 1578 *pražydo baltai. Sudarykite pasikliautinius intervalus tikimybei, kad žirnis žydės baltai, kai su pasikliovimo lygmenys* $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$.

Atsakymai

1. $[28{,}50; 30{,}70];\ [28{,}24; 30{,}96];\ [27{,}86; 31{,}34];\ [27{,}52; 31{,}68]$.

2. *Daugiau kaip* 10730; 16440; 27060; 38420.

3. $[0{,}5165; 0{,}5355];\ [0{,}5143; 0{,}5377];\ [0{,}5110; 0{,}5410];\ [0{,}5081; 0{,}5439]$.

4.7 Pasikliautiniai intervalai dispersijai

Vidurkio pasikliautinių intervalų sudarymo receptai netinka dispersijai. Tenka imtis darbo iš naujo.

Sudarysime pasikliautinį intervalą pagal normalųjį dėsnį pasiskirsčiusio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dispersijai $\mathbf{D}[X] = \sigma^2$.

Jeigu atsitiktinio dydžio vidurkis yra žinomas, o $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ atsitiktinė imtis, tai dispersijos taškiniam įverčiui galime naudoti statistiką

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

Šis įvertis yra nepaslinktas, t. y. $\mathbf{E}[S_0^2] = \sigma^2$. Padalinę iš dispersijos, gautume

$$\frac{S_0^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\Big)^2, \quad \frac{nS_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\Big)^2.$$

Panagrinėkime dydžius $Y_i = (X_i-\mu)/\sigma$. Jie yra nepriklausomi, normalieji. Maža to, kadangi $\mathbf{E}[Y_i] = 0, \mathbf{D}[Y_i] = 1$, tai dydžiai yra standartiniai normalieji, $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tačiau tada

$$\frac{nS_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2(n),$$

taigi žinome, koks yra statistikos nS_0^2/σ^2 pasiskirstymo dėsnis. Toliau sudaryti pasikliautinį intervalą galime panašiai kaip vidurkio atveju. Po dydžio $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$ tankiu tiesėmis $x = u, x = v, y = 0$ apribokime ploto Q figūrą. Čia $0 < Q < 1$ yra pasikliovimo lygmuo. Tada

$$P\Big(u < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < v\Big) = Q, \quad \text{arba} \quad P\Big(\frac{nS_0^2}{v} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{u}\Big) = Q.$$

Kaip parinkti skaičius u, v? Geriausia juos parinkti taip, kad plotai po tankio grafiku į kairę nuo tiesės $x = u$ ir į dešinę nuo tiesės $x = v$ būtų lygūs $(1-Q)/2$. Tada šie skaičiai būtų dydžio χ_n^2 atitinkamai $(1-Q)/2$ ir $(1+Q)/2$ lygmens kvantiliai, t. y. lygčių

$$F_{\chi_n^2}(u) = \frac{1-Q}{2}, \quad F_{\chi_n^2}(v) = \frac{1+Q}{2},$$

sprendiniai. Juos galime rasti iš lentelių arba apskaičiuoti kompiuteriu.

Pasikliautinis intervalas normaliojo dydžio dispersijai, kai vidurkis žinomas

Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra jo imtis, o vidurkis μ žinomas, tai pasikliautinis intervalas dispersijai σ^2, kai pasikliovimo lygmuo Q, yra

$$\Big(\frac{nS_0^2}{v}; \frac{nS_0^2}{u}\Big)$$

čia u, v yra dydžio $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$ $(1-Q)/2$ ir $(1+Q)/2$ lygmens kvantiliai, o

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

O kas keičiasi, kai vidurkis nežinomas? Pasirodo, kad nedaug kas.

61 teorema. *Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra jo atsitiktinė imtis, tai*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Taigi pasikliautinis intervalas sudaromas ir šiuo atveju labai panašiai.

Pasikliautinis intervalas normaliojo dydžio dispersijai, kai vidurkis nežinomas

Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra jo imtis, o vidurkis μ nežinomas, tai pasikliautinis intervalas dispersijai σ^2 su pasikliovimo lygmeniu Q yra

$$\Big(\frac{(n-1)S^2}{v}; \frac{(n-1)S^2}{u}\Big);$$

čia u, v yra dydžio $\chi^2_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$ atitinkamai $(1-Q)/2$ ir $(1+Q)/2$ lygmens kvantiliai, o

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Uždaviniai

1. *Sudarykite pasikliautinius intervalus atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dispersijai su pasikliovimo lygmenimis $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$, jeigu dydžio imtis tokia:*

$-3{,}11;\ 2{,}16;\ 2{,}15;\ 0{,}224;\ 2{,}89;\ 1{,}30;\ 2{,}81;\ -0{,}558;\ -1{,}84;\ -0{,}926;$
$-0{,}311;\ -1{,}29;\ 0{,}917;\ 4{,}57;\ -0{,}574.$

2. *Sudarykite pasikliautinius intervalus atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dispersijai su pasikliovimo lygmenimis $Q = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95$, jeigu dydžio imtis tokia:*

$2{,}22;\ 1{,}67;\ 2{,}28;\ 0{,}287;\ 1{,}83;\ 0{,}632;\ 2{,}77;\ 0{,}158;\ 1{,}29;\ 3{,}68;$
$0{,}947;\ 0{,}754;\ 1{,}99;\ 2{,}87;\ 2{,}31.$

Atsakymai

1. $[3{,}12; 6{,}97]$; $[2{,}88; 7{,}78]$; $[2{,}56; 9{,}23]$; $[2{,}32; 10{,}8]$.
2. $[0{,}755; 1{,}69]$; $[0{,}696; 1{,}88]$; $[0{,}619; 2{,}23]$; $[0{,}561; 2{,}60]$.

4.8 Tiesinė regresija

Per du plokštumos taškus galime nubrėžti tik vieną tiesę. Jeigu duoti trys taškai – per juos einančios tiesės gali ir nebūti. Tuo labiau, jei tų taškų keturi ar keturi tūkstančiai. Tada galime ieškoti tokios tiesės, kad duotieji taškai apie ją būtų kuo mažiausiai išsibarstę.

Nagrinėjome nežinomų parametrų įverčius, kuriuos sudarėme naudodamiesi imties duomenimis – atsitiktinių dydžių reikšmėmis, gautomis iš nepriklausomų stebėjimų. Tie dydžiai – atsitiktinės imties komponentės – yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Dabar panagrinėsime kitokios rūšies parametrų įverčių sudarymo uždavinį.

Tarkime, reikia nubrėžti tiesę, kurios lygtis įprastoje koordinačių sistemoje yra $y = \alpha + \beta x$. Jeigu liniuotės neturite, tiesės nenubrėšite. Nubrėšite liniją, kuri tik primena tiesę. Jeigu brėžinyje parinktume $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir matuotume ordinates, gautume

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Skaičius u_i (nuokrypius) galime suvokti kaip atsitiktinių dydžių U_i reikšmes. Padarysime prielaidą, kad šie dydžiai yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, $\mathbf{E}[U_i] = 0, \mathbf{D}[U_i] = \sigma^2$. Skaičius y_i taip pat galime suvokti kaip atsitiktinių dydžių $Y_i = \alpha + \beta x_i + U_i$ reikšmes; šie dydžiai taip pat nepriklausomi, tačiau nėra vienodai pasiskirstę, nes jų vidurkiai $\mathbf{E}[Y_i] = \alpha + \beta x_i$ yra skirtingi.

O dabar, tarkime, praėjo koks pusmetis laiko, ir jūs seniai pamiršote, kokią tiesę reikėjo nubrėžti, brėžinys – ir tas pasimetė. Tačiau liko išmatuotos taškų koordinatės:

$$\langle x_1, y_1\rangle,\ \langle x_2, y_2\rangle,\ \ldots, \langle x_n, y_n\rangle. \tag{4.5}$$

Kokią gi tiesę norėjote nubrėžti?

Tiesinės regresijos uždavinys

Atsitiktiniams dydžiams Y_x $(x \in I)$ teisinga lygybė

$$Y_x = \alpha + \beta x + U_x,$$

čia I yra baigtinis ar begalinis intervalas, U_x – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $\mathbf{E}[U_x] = 0, \mathbf{D}[U_x] = \sigma^2$. Atlikus matavimus gautos x, Y_x reikšmės

$$\langle x_1; y_1\rangle,\ \langle x_2; y_2\rangle,\ \ldots, \langle x_n; y_n\rangle, \quad y_i \text{ yra } Y_{x_i} \text{ reikšmė.}$$

Reikia gauti parametrų α, β įverčius.

Tiesinės regresijos uždavinį galime interpretuoti kaip dviejų dydžių priklausomybės tyrimą. Dydžio y reikšmę lemia du veiksniai: tiesinė priklausomybė nuo x ir atsitiktinis dėmuo. Pagal stebėjimo duomenis reikia atskleisti tiesinio ryšio parametrus. Tai dažnas įvairių tyrimų tikslas. Pavyzdžiui, galime spėti, kad miško medžio aukščio ir skersmens sąryšyje galima išskirti tiesinę komponentę. Bičių suneštо medaus kiekis panašiai priklauso nuo saulėtų dienų skaičiaus ir t. t.

Jeigu dydžiai x_i savo ruožtu yra atsitiktinio dydžio X reikšmės, tai išspręsti tiesinės regresijos uždavinį reiškia naudojantis (4.5) duomenimis gauti parametrų α, β, siejančių atsitiktinius dydžius, įverčius

$$Y = \alpha + \beta X + U.$$

Pavaizdavę taškus $\langle x_i; y_i \rangle$ gausime taškų „debesį“, reikia rasti tiesę, apie kurią šie taškai būtų mažiau išsibarstę negu apie bet kurią kitą.

Taikysime **mažiausiųjų kvadratų** metodą. Dydžiai α ir β kol kas mums nežinomi. Pažymėkime $y(x) = \alpha + \beta x$ ir sudarykime funkciją

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i - y_i)^2.$$

Ieškokime tų α, β reikšmių, su kuriomis šios funkcijos reikšmė mažiausia. Tas reikšmes rasime prilyginę dalines funkcijos išvestines nuliui:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i - y_i) = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2x_i \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i - y_i) = 0.$$

Dabar belieka kiek paskaičiuoti. Štai rezultatai.

Regresijos lygties koeficientai

Mažiausiųjų kvadratų metodu gaunami šie regresijos lygties parametrų α, β įverčiai

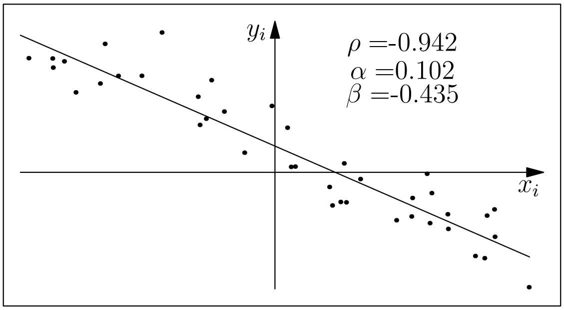
$$\beta^* = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2},$$
$$\alpha^* = \overline{y} - \beta^* \overline{x},$$

čia $\overline{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n, \overline{y} = (y_1 + \cdots + y_n)/n.$

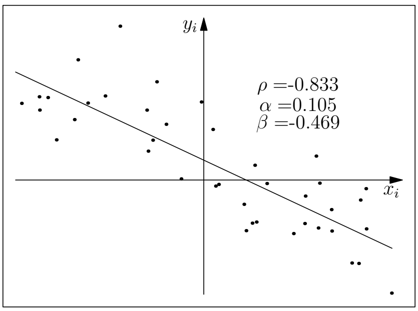
68 pavyzdys. Tiesinės regresijos uždavinys Iš stebėjimų gauti tokie duomenys

$$\langle -1; 0{,}696\rangle, \langle 0{,}182; 0{,}032\rangle, \langle -0{,}586; 0{,}194\rangle, \langle 0{,}252; -0{,}046\rangle, \langle -0{,}863; 0{,}54\rangle,$$
$$\langle 0{,}961; -0{,}321\rangle, \langle -0{,}83; 0{,}514\rangle, \langle 0{,}744; -0{,}197\rangle, \langle -0{,}334; 0{,}416\rangle, \langle -0{,}277; 0{,}264\rangle,$$
$$\langle -0{,}136; 0{,}14\rangle, \langle 0{,}212; 0{,}07\rangle, \langle -0{,}21; 0{,}204\rangle, \langle -0{,}124; 0{,}169\rangle, \langle 0{,}898; -0{,}202\rangle,$$
$$\langle -0{,}324; 0{,}365\rangle, \langle 0{,}61; -0{,}047\rangle, \langle 0{,}728; -0{,}181\rangle, \langle -0{,}085; 0{,}159\rangle, \langle 0{,}643; -0{,}126\rangle,$$
$$\langle -0{,}533; 0{,}336\rangle, \langle -0{,}075; 0{,}12\rangle, \langle -0{,}58; 0{,}388\rangle, \langle 0{,}941; -0{,}32\rangle, \langle 0{,}162; 0{,}099\rangle,$$
$$\langle 0{,}414; -0{,}182\rangle, \langle 0{,}287; -0{,}114\rangle, \langle 0{,}717; 0{,}005\rangle, \langle -0{,}889; 0{,}39\rangle, \langle 0{,}554; -0{,}102\rangle,$$
$$\langle 0{,}901; -0{,}246\rangle, \langle 0{,}758; -0{,}164\rangle, \langle 0{,}401; -0{,}215\rangle, \langle 0{,}726; -0{,}05\rangle, \langle 0{,}109; -0{,}015\rangle,$$
$$\langle -0{,}181; 0{,}247\rangle, \langle -0{,}937; 0{,}578\rangle, \langle -0{,}386; 0{,}3\rangle, \langle -0{,}629; 0{,}281\rangle, \langle -0{,}401; 0{,}173\rangle.$$

Jie gauti stebint dydžius $Y_x = 0{,}1 - 0{,}4x + U_x, \mathbf{E}[U_x] = 0, \mathbf{D}[U_x] = 0{,}01$. Diagramoje duomenys pavaizduoti plokštumos taškais, taip pat nubrėžta mažiausiųjų kvadratų metodu rasta regresijos tiesė, užrašyti jos parametrai, taip pat – koreliacijos koeficientas.



O štai rezultatai, gauti iš dydžių $Y_x = 0{,}1 - 0{,}4x + U_x, \mathbf{E}[U_x] = 0, \mathbf{D}[U_x] = 0{,}04$ imties. Kadangi atsitiktinio dydžio U dispersija didesnė, rezultatai nebėra tokie tikslūs.



Uždaviniai

1. *Dešimt dienų buvo fiksuotos dienos pajamos X ir išlaidos Y. Gautos $\langle X, Y\rangle$ reikšmės:* $\langle 16; 13\rangle$; $\langle 15; 10\rangle$; $\langle 26; 22\rangle$; $\langle 30; 28\rangle$; $\langle 30; 27\rangle$; $\langle 27; 24\rangle$; $\langle 23; 19\rangle$; $\langle 12; 8\rangle$; $\langle 30; 2\rangle$; $\langle 13; 10\rangle$. *Raskite regresinės lygties $Y = \alpha + \beta X + U$ koeficientų α, β įverčius.*

2. *Panaudoję atsitiktinių dydžių X, Y imties duomenis*

$$\langle 10{,}6; 4{,}0\rangle;\ \langle 15{,}7; -1{,}3\rangle;\ \langle 16{,}1; -1{,}6\rangle;\ \langle 16{,}8; -1{,}5\rangle;\ \langle 16{,}7; -1{,}5\rangle;$$
$$\langle 12{,}7; 2{,}2\rangle;\ \langle 13{,}6; 1{,}9\rangle;\ \langle 19{,}3; -4{,}1\rangle;\ \langle 15{,}5; -0{,}6\rangle;\ \langle 16{,}8; -1{,}5\rangle.$$

raskite regresinės lygties $Y = \alpha + \beta X + U$ koeficientų α, β įverčius. Skaičiavimams siūlau pasinaudoti skaičiuokle. Pavyzdžiui, Excel arba OpenOffice paketo skaičiuokle. Tačiau, mano nuomone, jei patys parašysite šiek tiek kodo eilučių kokia nors programavimo kalba, nuobodulio bus mažiausiai.

Atsakymai

1. $\alpha \approx -3{,}37$; $\beta \approx 0{,}976$. **2.** $\alpha \approx 14{,}25$; $\beta \approx -0{,}9524$.

4.9 Statistinės hipotezės

Žmonės formuluoja įvairias hipotezes. Vienos iš jų patvirtinamos, kitos paneigiamos, trečios – ilgai kybo nei paneigtos, nei patvirtintos. Statistinės hipotezės skiriasi nuo visų kitų tuo, kad jos visada priimamos arba atmetamos greitai: kai tik baigiasi skaičiavimai. Vadovaujamasi paprasta mintimi: geriau koks nors sprendimas negu jokio.

Taškiniai įverčiai ir pasikliautiniai intervalai suteikia žinių apie stebimo atsitiktinio dydžio nežinomų parametrų reikšmes. Jeigu jų neketiname naudoti kokiems nors skaičiavimams, tos reikšmės mums nelabai ir reikalingos. Pavyzdžiui, jums nėra svarbūs skaitiniai įvairių matavimų rezultatai gauti automobilių techninės apžiūros centre, svarbu tik, ar automobilis bus pripažintas tinkamu saugiai važiuoti, ar ne.

Jeigu į kelionę rengiatės vykti ne automobiliu, bet dviračiu, tai vėjo kryptis ir greitis – svarbu. Tarkime, taip jau atsitiko, kad teks važiuoti prieš vėją. Vėjo greitis X – atsitiktinis dydis. Kad būtų paprasčiau įsivaizduoti, galime tarti, kad vėjo greitis keičiasi, pavyzdžiui, kas dešimt minučių. Jeigu jo vidurkis $\mathbf{E}[X]$ pernelyg didelis – galbūt geriau atidėti kelionę kitam kartui. Tarkime, nusprendėme šitaip: jei $\mathbf{E}[X] \leqslant 7$ m/s – vykstame, jei $\mathbf{E}[X] > 7$ m/s – liekame namuose. Kurią iš dviejų hipotezių priimti? Jei nepasitikime metereologų duomenimis, galime patys atlikti matavimus, t. y. sudaryti atsitiktinio dydžio imtį $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pavyzdžiui, galime matuoti vėjo greitį keletą kartų kas 10 minučių. Paskui tikriausiai apskaičiuosime empirinį vidurkį

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Tarkime, gavome $\mathbf{E}[X] = 8$. Važiuoti ar nevažiuoti? Kurią hipotezę priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{E}[X] \leqslant 7,$$
$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{E}[X] > 7?$$

Matavimų rezultatai yra antrosios hipotezės naudai. Tačiau ar galime jais absoliučiai pasikliauti? Juk empirinis vidurkis gali būti ir didesnis už tikrąjį. Galbūt vis dėlto gautoji reikšmė $\mathbf{E}[X] = 8$ neprivers mūsų atsisakyti kelionės. O jeigu gautume $\mathbf{E}[X] = 8{,}5$? Kokiu kriterijumi remtis sprendžiant? Šiuo atveju, matyt, geriausia pasikliauti savo nuotaika ... Tačiau šis pavyzdys rodo, kaip keliami dar vienos rūšies statistikos uždaviniai.

Apie stebimą atsitiktinį dydį formuluojame dvi hipotezes: pagrindinę $\mathbf{H}_0$ ir alternatyvią $\mathbf{H}_1$. Naudodamiesi sukauptais imties duomenimis sprendžiame, kurią iš hipotezių priimti. Galimi du atvejai: $\mathbf{H}_0$ teisinga ir klaidinga; galimi du sprendimai: $\mathbf{H}_0$ priimame arba atmetame. Taigi galimos keturios padėtys:

	$\mathbf{H}_0$ teisinga	$\mathbf{H}_0$ klaidinga
$\mathbf{H}_0$ priimame	teisingas sprendimas	II rūšies klaida
$\mathbf{H}_0$ atmetame	I rūšies klaida	sprendimas teisingas

Išvengti vienos rūšies klaidos visai paprasta. Pavyzdžiui, pirmos rūšies klaidos niekada nepadarysime, jeigu hipotezę $\mathbf{H}_0$ priimsime, neatsižvelgdami į tai, kokie bus imties duomenys. Nagrinėtame pavyzdyje išvengti pirmos rūšies klaidos reiškia leistis į kelionę neatsižvelgiant į vėjo greitį. Antros rūšies klaidos išvengsime, jeigu visada atmesime pagrindinę hipotezę, t. y. niekada neiškeliausime.

Tačiau svarbu sudaryti tokį hipotezių tikrinimo kriterijų, kad ir pirmos, ir antros rūšies klaidų tikimybės būtų kuo mažesnės. Bijodami pirmosios rūšies klaidos, hipotezę $\mathbf{H}_0$ priimsime dažniau. Tačiau tada ją dažniau priimsime ir tada, kai ji klaidinga, t. y. didinsime antros rūšies klaidos tikimybę. Taigi reikia nuspręsti, kokios pusiausvyros norime. Tai daroma šitaip. Paprastai hipotezių tikrinimo uždavinys formuluojamas taip, kad pirmos rūšies klaida būtų svarbesnė, t. y. jos labiau vengiama. Pasirenkamas mažas skaičius $0 < \alpha < 1$ ir kriterijus sudaromas taip, kad būtų

$$P(\text{I rūšies klaida}) = P(\mathbf{H}_0 \text{ atmetame} | \mathbf{H}_0 \text{ teisinga}) \leqslant \alpha.$$

Skaičius α vadinamas kriterijaus reikšmingumo lygmeniu. Tačiau yra daug kriterijų, turinčių tą patį reikšmingumo lygmenį. Kriterijus, kuris reiškia, kad $\mathbf{H}_0$ visada priimame, taip pat tenkina šią sąlygą. Iš visų tokių kriterijų stengiamasi parinkti tą, su kuriuo tikimybė

$$P(\text{II rūšies klaida}) = P(\mathbf{H}_0 \text{ priimame} | \mathbf{H}_0 \text{ klaidinga})$$

yra kuo mažesnė.

Kaip sprendžiama, priimti ar atmesti pagrindinę hipotezę? Gaunama imtis, apskaičiuojama uždaviniui pritaikytos statistikos $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ reikšmė. Ši reikšmė ir lemia mūsų sprendimą. Aibė, sudaryta iš tų statistikos reikšmių, kurioms pasitaikius pagrindinė hipotezė yra atmetama, vadinama **kritine sritimi**.

Štai tokia hipotezių tikrinimo uždavinio sprendimo schema. Kaip ji taikoma, panagrinėsime kitame skyrelyje.

Uždaviniai

1. *Jūsų kompiuteris pradėjo lėčiau veikti. Tikrinate pagrindinę hipotezę:* $\mathbf{H}_0$: *įsiveisė virusas. Ką reiškia padaryti pirmos rūšies klaidą? Ką reiškia padaryti antros rūšies klaidą?*

2. *Turite monetą. Žinoma, kad viena puse (nežinia, skaičiumi ar herbu) ji atvirsta su tikimybe* $p = 2/3$. *Jūsų hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : \textit{moneta atvirsta herbu su tikimybe } p = \frac{2}{3};$$
$$\mathbf{H}_1 : \textit{moneta atvirsta skaičiumi su tikimybe } p = \frac{2}{3}.$$

Jūsų kriterijus labai paprastas: metate monetą, jeigu atvirto herbas – $\mathbf{H}_0$ *priimate, jeigu skaičius – atmetate. Kokia pirmos rūšies klaidos tikimybė? Kokia antros rūšies klaidos tikimybė?*

3. *Turite tą pačią monetą kaip ir ankstesniame uždavinyje. Tikrinate tą pačią hipotezę, tačiau naudojate kitą kriterijų. Monetą metate tris kartus. Jeigu atvirto daugiau herbų – pagrindinę hipotezę priimate, jeigu daugiau skaičių – atmetate. Kokia pirmos rūšies klaidos tikimybė? Kokia antros rūšies klaidos tikimybė?*

4. *Atsitiktinis dydis* X *yra pasiskirstęs tolygiai intervale* $[0;1]$ *arba* $[0;1{,}5]$. *Jūsų hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : X \sim \mathcal{T}([0;1]);$$
$$\mathbf{H}_1 : X \sim \mathcal{T}([0;1{,}5]).$$

Naudojate tokį kriterijų: atliekate bandymą ir gaunate dydžio X_1 *reikšmę. Jei* $X_1 > 3/4$ *– pagrindinę hipotezę atmetate, jeigu* $X_1 \leqslant 3/4$ *– priimate. Kokia pirmos rūšies klaidos tikimybė? Kokia antros rūšies klaidos tikimybė?*

5. *Atsitiktinis dydis* X *– toks pat, kaip ankstesniajame pavyzdyje, hipotezės irgi tos pačios. Tačiau naudojate kitokį kriterijų. Atliekate du bandymus ir gaunate dviejų dydžių* X_1 *ir* X_2 *reikšmes. Jei* $\min(X_1, X_2) > 3/4$ *– pagrindinę hipotezę atmetate, priešingu atveju – priimate. Kokia dabar pirmos rūšies klaidos, kokia antros rūšies klaidos tikimybė?*

Atsakymai

1. *Pirmos rūšies klaida – kai kompiuteryje tūno virusas, elgtis lyg jo ten nebūtų; antros rūšies klaida – ieškoti viruso, kai jo ten nėra.* **2.** *Abiejų rūšių klaidų tikimybės lygios* 1/3. **3.** *Abiejų rūšių klaidų tikimybės lygios* 7/27. **4.** *Pirmos rūšies klaidos tikimybė* 1/4, *antros rūšies* – 1/2. **5.** *Pirmos rūšies klaidos tikimybė* 1/16, *antros rūšies* – 3/4.

4.10 Hipotezės apie normaliojo dydžio vidurkį

Jeigu šių metų vasara bus šiltesnė už pernykštę, neskubėsime teigti, kad klimatas šiltėja. Kokie gi duomenys būtų pakankami priimti hipotezei, kad temperatūros vidurkis padidėjo?

Turime galimybę stebėti normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ reikšmes. Mums rūpi tam tikros žinios apie jo vidurkį. Žinome, kaip sudaryti vidurkio pasikliautinius intervalus. Tie patys įrankiai tiks ir hipotezių tikrinimo kriterijams sudaryti.

Tarkime, kad atsitiktinio dydžio dispersija σ^2 yra žinoma. Spėjame, kad $\mathbf{E}[X] = \mu_0$, čia μ_0 yra konkretus skaičius. Taigi norime pasirinkti vieną iš dviejų hipotezių:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Atsitiktinės imties $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ reikšmes $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ gausime atlikę bandymus. Naudodamiesi šiais duomenimis turime padaryti sprendimą.

Pasirinkime reikšmingumo lygmenį α. Nagrinėkime statistiką

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Dydis Z yra normalusis, jo dispersija $\mathbf{D}[Z] = 1$. O koks vidurkis? Jeigu hipotezė $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, t. y. $\mathbf{E}[X] = \mu_0$, tai $\mathbf{E}[Z] = 0$ ir $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Jeigu hipotezė $\mathbf{H}_0$ yra neteisinga, tai $\mathbf{E}[Z] \neq 0$.

Skaičių tiesėje apibrėžkime kuo „didesnę“ sritį, į kurią dydžio Z reikšmės, kai $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, patenka retai. Šią sritį pavadinsime kritine sritimi. Geriausia ją parinkti taip. Po standartinio normaliojo dėsnio tankio grafiku „atpjaukime“ dvi simetriškas „uodegas“ taip, kad kiekvienos iš jų plotas būtų $\alpha/2$. Taigi sudarykime kritinę sritį iš dviejų begalinių spindulių:

$$K = (-\infty; -z) \cup (z; \infty).$$

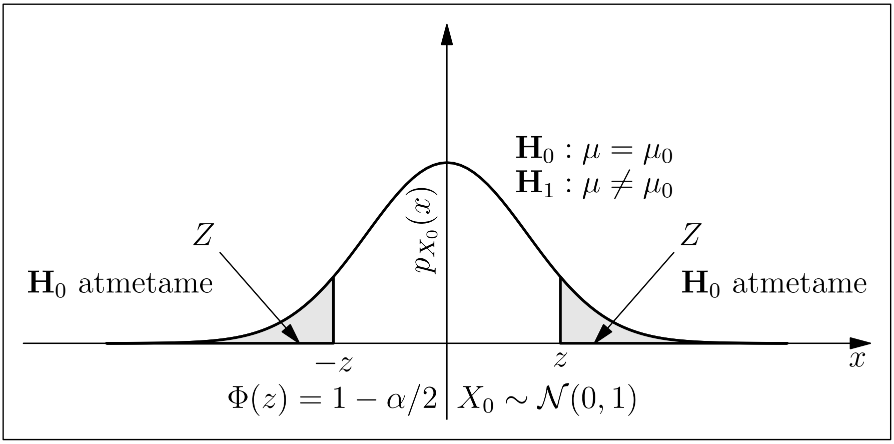
Plotas į dešinę nuo tiesės $x = z$ po tankio grafiku lygus $\alpha/2$, todėl z yra standartinio normaliojo dydžio $\alpha/2$ lygio kritinė reikšmė arba, kitaip tariant, – tai $1 - \alpha/2$ lygio kvantilis, taigi – lygties

$$\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

sprendinys. Jeigu $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, tai

$$P(Z \in K) = P(|Z| \geqslant z) = \alpha,$$

t. y. tikimybė, kad panaudoję imties duomenis gausime Z reikšmę iš srities K, yra maža. Jeigu jau taip atsitiko, tai yra dvi galimybės: arba $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, bet imties duomenys pasitaikė labai jau nebūdingi, arba $\mathbf{H}_0$ yra neteisinga. Natūralu rinktis pastarąjį atvejį kaip labiau tikėtiną, t. y. atmesti pagrindinę hipotezę. Štai ir sukonstravome pirmąjį hipotezių tikrinimo kriterijų.



**Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį,
kai dispersija žinoma**

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *dispersija* σ^2 *žinoma,* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *dydžio imtis. Hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$0 < \alpha < 1$ – *reikšmingumo lygmuo.*
Tegu z – *lygties* $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$ *sprendinys, t. y. standartinio normaliojo dydžio* $\alpha/2$ *lygmens kritinė reikšmė,*

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Kriterijus: jei $|Z| > z$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *atmetama, jei* $|Z| \leqslant z$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *priimama.*

Galbūt esame tikri, kad stebimo dydžio vidurkis negali būti mažesnis už μ_0. Tada alternatyviąją hipotezę galime formuluoti kitaip: $\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0$. Ar reikia keisti hipotezių tikrinimo kriterijų? Jeigu labai norime, galime naudoti tą patį. Jis garantuos, kad pirmos rūšies klaidos tikimybė nebus didesnė už reikšmingumo lygmenį α. Tačiau yra ir daugiau kriterijų su tuo pačiu reikšmingumo lygmeniu, tačiau garantuojančių mažesnę antros rūšies klaidos tikimybę. Geriausias iš jų tas, kurio kritinė sritis (t. y. pagrindinės hipotezės atmetimo sritis) yra sudaryta iš vieno spindulio:

$$K = (z; \infty), \quad \Phi(z) = 1 - \alpha.$$

Analogiškai formuluojamas kriterijus, kai alternatyvi hipotezė yra
$\mathbf{H}_1 : \mu < \mu_0$.

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį, kai dispersija žinoma

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *dispersija* σ^2 *žinoma,* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *dydžio imtis,* α *– reikšmingumo lygmuo, Hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0 \quad (\mu < \mu_0).$$

Tegu z *– lygties* $\Phi(z) = 1 - \alpha$ *sprendinys, t. y. standartinio normaliojo dydžio* α *lygmens kritinė reikšmė,*

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

Kriterijus: kai alternatyvi hipotezė $\mathbf{H_1} : \mu > \mu_0$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *atmetama, kai* $Z > z$; *priimama, kai* $Z \leqslant z$. *Kai alternatyvi hipotezė* $\mathbf{H_1} : \mu < \mu_0$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *atmetama, kai* $Z < -z$; *priimama, kai* $Z \geqslant -z$.

Pagrindinę hipotezę priimame arba atmetame priklausomai nuo statistikos Z įgytos reikšmės. Tarkime, Z reikšmė, apskaičiuota pagal imties duomenis, lygi v ir $v > z$, čia z – kritinė reikšmė, naudota kritinei sričiai apibrėžti, kai alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0$. Tada pagrindinę hipotezę atmesime. Jeigu v gerokai skiriasi nuo z, hipotezę atmesime mažiau dvejodami, jeigu nedaug – pasitikėjimas savo sprendimu bus mažesnis. Šį tikrumą dėl savo sprendimo galima kiekybiškai „matuoti“ tikimybe

$$P(Z > v | \mathbf{H}_0) = 1 - \Phi(v).$$

Kuo ši tikimybė mažesnė, tuo labiau galime būti ramūs, kad priėmėme teisingą sprendimą. Tokią tikimybę galime skaičiuoti ir alternatyvos $\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0$ atveju. Kai alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \mu < \mu_0$, pagrindinę hipotezę atmetame, kai statistikos reikšmė v tenkina nelygybę $v < -z$. Tokiu atveju pasitikėjimą savo sprendimu galime „matuoti“ tikimybe $P(Z < v | \mathbf{H}_0) = \Phi(v)$.

O kaip gi tuo atveju, kai stebimojo dydžio dispersijos nežinome? Vietoje statistikos Z galime naudoti

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{S}t(n-1), \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

ir sudaryti kriterijus labai panašiai. Kriterijai skirsis nuo aptartųjų tik naudojama statistika (T vietoje Z) ir tuo, kad kritinėms sritims apibrėžti vietoje standartinio normaliojo dydžio kritinių reikšmių dabar naudosime Studento dydžio su $n-1$-u laisvės laipsniu kritines reikšmes.

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį,
kai dispersija nežinoma

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *dispersija* σ^2 *nežinoma,* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ *dydžio imtis. Hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0,$$

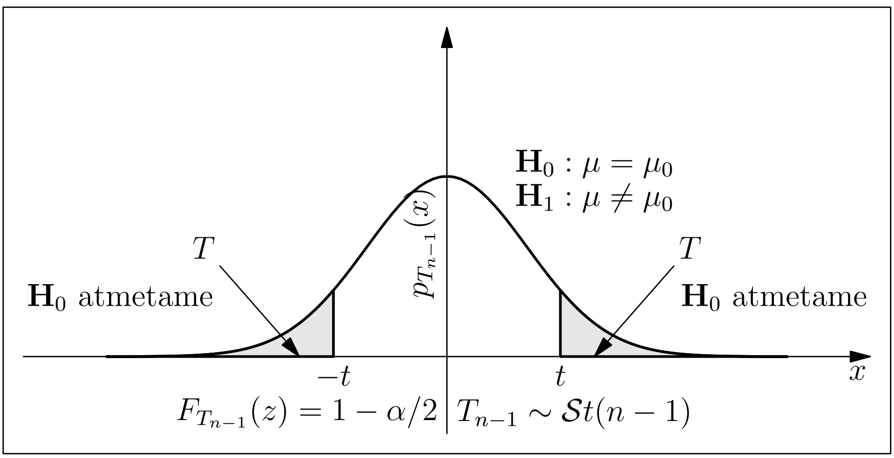
α – *reikšmingumo lygmuo. Tegu* t – *lygties*

$$F_{T_{n-1}}(t) = 1 - \alpha/2, \quad T_{n-1} \sim \mathcal{S}t(n-1),$$

sprendinys, t. y. Studento dydžio su $n-1$*-u laisvės laipsniu* $\alpha/2$ *lygmens kritinė reikšmė,*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Kriterijus: jei $|T| > t$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *atmetama, jei* $|T| \leqslant t$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *priimama.*



Uždaviniai

1. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0{,}25)$ *imtimi*

$$0{,}852;\; 1{,}72;\; 1{,}88;\; 0{,}645;\; 1{,}56;\; 0{,}820;\; 1{,}13;\; 1{,}81;\; 0{,}260;\; 1{,}07$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 1;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq 1,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3;\; 0{,}2;\; 0{,}1;\; 0{,}05.$

2. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0{,}25)$ *imtimi*

$$1{,}79;\; 2{,}48;\; 2{,}73;\; 2{,}84;\; 2{,}13;\; 2{,}34;\; 1{,}58;\; 1{,}73;\; 2{,}21;\; 1{,}65$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 2;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu > 2,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3;\; 0{,}2;\; 0{,}1;\; 0{,}05.$

3. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *imtimi*

$$0{,}878;\; 0{,}379;\; 0{,}141;\; 0{,}475;\; 0{,}883;\; 1{,}27;\; 1{,}37;\; 0{,}462;\; 1{,}19;\; 0{,}655$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 1;$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq 1,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3;\; 0{,}2;\; 0{,}1;\; 0{,}05.$

4. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *imtimi*

$$0{,}619;\; 0{,}993;\; 0{,}591;\; 2{,}03;\; 1{,}34;\; 1{,}01;\; 1{,}23;\; -0{,}215;\; 1{,}87;\; 1{,}73$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 1,$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu < 1,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3;\; 0{,}2;\; 0{,}1;\; 0{,}05.$

Atsakymai

1. *Statistikos reikšmė* $Z = 1{,}14$, *kritinės reikšmės lygios* $1{,}04;\; 1{,}28;\; 1{,}64;\; 1{,}96$, *todėl pagrindinė hipotezė atmetama, kai reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0{,}3$, *ir priimama kitais atvejais.*

2. *Statistikos reikšmė* $Z = 0{,}948$, *kritinės reikšmės lygios* 0,524; 0,842; 1,28; 1,64, *todėl pagrindinė hipotezė atmetama, kai reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0{,}3$ *bei* $\alpha = 0{,}2$ *ir priimama kitais atvejais.*

3. *Statistikos reikšmė* $Z = -1{,}75$ *kritinės reikšmės lygios* 1,10; 1,38; 1,83; 2,26 *todėl pagrindinė hipotezė priimama tik tada, kai reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0{,}05$, *ir atmetama kitais atvejais.*

4. *Statistikos reikšmė* $Z = 0{,}556$, *kritinės reikšmės lygios* 0,544; 0,883; 1,38; 1,83 *todėl pagrindinė hipotezė atmetama, kai reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0{,}3$, *ir priimama kitais atvejais.*

4.11 Hipotezės apie sėkmės tikimybę

Ar moneta simetriška? Ar tikrai vyriausybę remia 60 % *gyventojų? Šiuos ir kitus panašius klausimus galime suformuoti kaip hipotezes apie sėkmės tikimybę.*

Mėtome monetą. Bandymų sekos rezultatas – atvirtusių herbų ir skaičių seka. Ar galime teigti, kad moneta simetriška?

Teigiama, kad naujoms prezidento iniciatyvoms pritaria 70 % šalies gyventojų. Galime apklausti, pavyzdžiui, kelis šimtus. Gausime imtį. Ar jos duomenys patvirtina iškeltą hipotezę apie paramą prezidentui?

Tai du hipotezių apie sėkmės tikimybę pavyzdžiai. O dabar panagrinėkime, kaip hipotezių apie sėkmės tikimybę uždavinys keliamas ir sprendžiamas statistikos metodais.

Stebimas atsitiktinis dydis X įgyja dvi reikšmes su nežinomomis tikimybėmis:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Atlikę n nepriklausomų stebėjimų gausime imties $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ reikšmes. Formuluojame hipotezes apie nežinomą sėkmės tikimybę p :

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0.$$

Žinoma, atsižvelgiant į aplinkybes alternatyvi hipotezė gali būti formuluojama ir kitaip: $\mathbf{H}_1 : p > p_0$ arba $\mathbf{H}_1 : p < p_0$. Tegu α yra reikšmingumo lygmuo.

Jeigu bandymų skaičius yra didelis, galime taikyti centrinę ribinę teoremą. Pasirėmę ja galime teigti: jei $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, t. y. $p = p_0$, tai dydis

$$Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}, \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\text{sėkmių skaičius}}{n},$$

pasiskirstęs pagal dėsnį, labai panašų į standartinį normalųjį. Todėl hipotezių tikrinimo kriterijų galime sudaryti panašiai kaip normaliojo dydžio vidurkiui. Jeigu

z yra standartinio normaliojo dydžio $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė, t. y. lygties $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$ sprendinys, tai pagrindinę hipotezę atmesime, kai $|Z| > z$, ir priimsime, kai $|Z| \leqslant z$. Kai alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$ arba $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, geresnius kriterijus gausime naudodami vienpuses kritines sritis kaip hipotezių apie normaliojo dydžio vidurkį atveju.

Hipotezės apie sėkmės tikimybę, kai bandymų daug

Tegu stebimas atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 1, jei bandymas baigiasi sėkme, ir reikšmę 0, jei baigiasi nesėkme, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra atsitiktinė imtis, n – didelis skaičius, α – reikšmingumo lygmuo,

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Hipotezės apie sėkmės tikimybę:

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0.$$

Tegu

$$Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}.$$

Jei $|Z| > z$, čia z yra standartinio normaliojo dydžio $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė, tai pagrindinė hipotezė H_0 atmetama, jei $|Z| \leqslant z$, – priimama. Kai alternatyva yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$ arba $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, kriterijui naudojama standartinio normaliojo dydžio α lygmens kritinė reikšmė. Pirmu atveju pagrindinė hipotezė atmetama, kai $Z > z$, antruoju – kai $Z < -z$.

Kuo daugiau bandymų, tuo daugiau informacijos, tuo patikimesni mūsų sprendimai. Tačiau ką daryti, jeigu bandymų atlikta nedaug, o patikrinti hipotezę apie sėkmės tikimybę vis dėlto reikia. Tarkime, bandymų skaičius nedidelis. Sudėję atsitiktinės imties dydžius gausime dydį, pasiskirsčiusį pagal binominį dėsnį su nežinoma sėkmės tikimybe:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Jeigu hipotezė H_0 yra teisinga, t. y. $p = p_0$, tai $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_0), \mathbf{E}[S_n] = np_0$. Taigi galime tikėtis, kad atlikę bandymus gausime artimą šiam skaičiui sėkmių kiekį. Jeigu sėkmių skaičius bus pernelyg mažas arba pernelyg didelis, natūralu manyti, kad hipotezė yra neteisinga, t. y. ją reikia atmesti. Kaipgi vadovaujantis tokia idėja sudaryti kriterijų hipotezėms tikrinti, kai

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0;$$
$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0?$$

Tegu α yra reikšmingumo lygmuo. Prisiminkime dydį, kuriuo „matavome“ pasitikėjimą savo sprendimu, kad pagrindinė hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį neteisinga. Jeigu kriterijaus statistikos Z reikšmė u didesnė už kritinę reikšmę z, tai pagrindinę hipotezę atmetėme, o pasikliovimą savo sprendimu „matavome“ tikimybe

$$t = P(Z \geqslant u|\mathbf{H}_0) = 1 - \Phi(u).$$

Kuo ši tikimybė mažesnė, tuo sprendimas atmesti pagrindinę hipotezę patikimesnis. Jeigu $u < -z$, tai pagrindinę hipotezę taip pat atmetėme, o sprendimo tikrumą „matavome“ tikimybe

$$t = P(Z \leqslant u|\mathbf{H}_0) = \Phi(u).$$

Panašų matą galime naudoti mūsų uždavinio kriterijui sudaryti. Jeigu iš imties duomenų gavome reikšmę $S_n = u, u > np_0$, skaičiuokime

$$t = P(S_n \geqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=u}^{n} C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i}. \tag{4.6}$$

Jeigu gausime $t \leqslant \alpha/2$, hipotezę $\mathbf{H}_0$ atmeskime. Kuo t reikšmė mažesnė, tuo mažiau galime abejoti, kad pasielgėme teisingai. Jeigu sėkmių skaičius $S_n < np_0$, skaičiuokime

$$t = P(S_n \leqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=0}^{u} C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i}. \tag{4.7}$$

ir atmeskime pagrindinę hipotezę, kai $t < \alpha/2$.

Jeigu pagrindinės hipotezės alternatyva yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$, tai t skaičiuojame pagal (4.6), ir pagrindinę hipotezę atmetame, jei $t \leqslant \alpha$. Kai pagrindinės hipotezės alternatyva yra $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, tai t skaičiuojame pagal (4.7), ir pagrindinę hipotezę atmetame, jei $t \leqslant \alpha$.

69 pavyzdys. Ar simetriška moneta?

Norime patikrinti hipotezę, kad moneta simetriška, t. y. ar ją metus herbas ir skaičius atvirsta su tokiomis pačiomis tikimybėmis. Pagrindinė ir alternatyvi hipotezės:

$$\mathbf{H}_0 : p = 1/2;$$
$$\mathbf{H}_1 : p \neq 1/2.$$

Ketiname mesti monetą tik $n = 15$ kartų, reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}1$. Tegu S_n – atvirtusių herbų skaičius. Su kokiomis S_n reikšmėmis hipotezę, kad moneta simetriška, atmesime?

Suprantama, hipotezę atmesime, jeigu moneta atvirs herbu per mažai arba per daug kartų. Pažymėkime

$$t_1(u) = P(S_n \leqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=0}^{u} C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i} = 2^{-n} \sum_{i=0}^{u} C_n^i,$$

$$t_2(u) = P(S_n \geqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=u}^{n} C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i} = 2^{-n} \sum_{i=u}^{n} C_n^i.$$

Jeigu atvirtusių herbų skaičius u tenkins nelygybę $t_1(u) \leqslant \alpha/2 = 0{,}05$ – hipotezę, kad moneta simetriška, atmesime todėl, kad herbų atvirto per mažai. Jeigu atvirtusių herbų skaičius u tenkins nelygybę $t_2(u) \leqslant \alpha/2 = 0{,}05$ – hipotezę, kad moneta simetriška, atmesime todėl, kad herbų atvirto per daug. Pasinaudoję binominių koeficientų savybe $C_n^i = C_n^{n-i}$ galime $t_2(u)$ užrašyti taip:

$$t_1(u) = 2^{-n} \sum_{i=u}^{n} C_n^i = 2^{-n} \sum_{i=u}^{n} C_n^{n-i} = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n-u} C_n^i = t_2(n-u).$$

Taigi suraskime patį didžiausią skaičių u, su kuriuo $t_2(u) \leqslant 0{,}05$. Kiek paskaičiavę gautume, $t_2(4) \approx 0,0176, t_2(5) \approx 0{,}05923$. Taigi, bijodami apsirikti, pripažinsime monetą nesimetriška tik tuo atveju, kai, metus $n = 15$ kartų, moneta atvirs herbu $0, 1, 2, 3, 4$ arba $11, 12, 13, 14, 15$ kartų. Šitaip elgdamiesi išbrokuosime maždaug vieną iš dešimties simetriškų monetų. O kiek nesimetriškų monetų pripažinsime simetriškomis, tiksliau – kokios nesimetriškų monetų dalies nesimetriškumo neatpažinsime? Ne taip lengva pasakyti. Jeigu nesimetriškumas nedidelis, t. y. herbo atvirtimo tikimybė artima $1/2$, tai įvyks labai dažnai. Panagrinėkime supaprastintą atvejį. Tarkime, naudodamiesi šiuo kriterijumi tikriname tik dviejų rūšių monetas: simetriškas $p = 0{,}5$ ir nesimetriškas su herbo atvirtimo tikimybe $p = 0{,}6$, t. y. alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p = 0{,}6$. Apskaičiuokime antros rūšies klaidos tikimybę:

$$t = P(4 < S_n < 12|\mathbf{H}_1) = \sum_{i=5}^{11} C_n^i 0,6^i 0,4^{n-i} \approx 0{,}9.$$

Taigi iš 10 pasitaikiusių nesimetriškų monetų vos vieną atpažinsime! Prastoki rezultatai. Jeigu nesimetriškų monetų herbo atvirtimo tikimybė būtų $p = 0{,}8$, gautume antros rūšies tikimybės reikšmę $\approx 0{,}35$, taigi atpažintume apie du trečdalius nesimetriškų monetų.

Hipotezės apie sėkmės tikimybę, kai bandymų nedaug

Tegu stebimas atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 1, jei bandymas baigiasi sėkme, ir reikšmę 0, jei baigiasi nesėkme, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė imtis, n – nedidelis skaičius, α – reikšmingumo lygmuo,

$$P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p.$$

Pagrindinė hipotezė $\mathbf{H}_0 : p = p_0$, gautoji iš imties dydžio

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

reikšmė lygi u,

$$t_1 = P(S_n \geqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=u}^{n} C_n^i p_0^i (1 - p_0)^{n-i},$$

$$t_2 = P(S_n \leqslant u|\mathbf{H}_0) = \sum_{i=0}^{u} C_n^i p_0^i (1 - p_0)^{n-i}.$$

Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p \neq p_0$, tai ją priimame, jei viena iš tikimybių t_1, t_2 mažesnė už $\alpha/2$.
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$, tai ją priimame, jei $t_1 < \alpha$.
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, tai ją priimame, jei $t_2 < \alpha$.

Uždaviniai

1. *Du žurnalistai nutarė patikrinti hipotezę, kad 60 % gyventojų teigiamai vertina ekonominę šalies raidą, su alternatyva, kad teigiamai vertinančių dalis mažesnė. Apklausus $n = 1225$ gyventojų, teigiamai vertinančiųjų skaičius buvo $m = 720$. Abu žurnalistai naudojo kriterijų, pagrįstą centrine ribine teorema. Pirmas pasirinko reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$. Koks buvo jo sprendimas? Antras žurnalistas pagrindinę hipotezę atmetė. Įvertinkite, kokį reikšmingumo lygmenį jis naudojo?*

2. *Vienas lošėjas tvirtina, kad metus lošimo kauliuką šešios akutės atvirsta su tikimybe $p = 1/6$, o kitas – kad dažniau. Buvo nutarta patikrinti hipotezę $\mathbf{H_0} : p = 1/6$ su alternatyva $\mathbf{H_0} : p > 1/6$. Lošėjai nutarė mesti kauliuką $n = 1000$ kartų. Pirmasis pasirinko kriterijaus reikšmingumo lygmenį $\alpha_1 = 0{,}05$, o antrasis – $\alpha_2 = 0{,}2$. Kiek kartų turėtų atvirsti šešios akutės, kad pirmas lošėjas atmestų pagrindinę hipotezę? Kiek kartų turėtų atvirsti šešios akutės, kad antras lošėjas atmestų pagrindinę hipotezę?*

3. *Dviejose iš pažiūros visai vienoduose maišuose yra miežių grūdų su avižų priemaišomis. Viename maiše avižos sudaro 20 %, kitame – 30 %. Norėtume pasirinkti maišą, kuriame priemaišų mažiau. Pasirinkę vieną maišą pasėmėme iš jo dalį grūdų ir juos peržiūrėjome. Iš viso buvo pasemta $n = 758$ grūdai, avižų grūdų buvo $m = 166$. Patikrinkite* *hipotezę, kad atsirinkome maišą su mažesne priemaišų dalimi, jeigu reikšmingumo lygmuo lygus* $\alpha = 0{,}2$.

4. *Jeigu moneta yra simetriška, kiekvienas gali atspėti maždaug pusės metimų baigtį. Fokusininkas tvirtina, kad jis gali atspėti daugiau kaip pusę simetriškos monetos metimų baigčių. Norime patikrinti hipotezę, kad jo sugebėjimai tokie patys kaip ir visų žmonių, su alternatyva, kad jis gali atspėti geriau. Tegu reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0{,}1$. *Jeigu monetą mestume* $n = 15$ *kartų, kiek kartų fokusininkas turėtų atspėti baigtis, kad juo patikėtume?*

5. *Jeigu fokusininkas gali geriau nei kiti žmonės atspėti simetriškos monetos metimo rezultatus, tai turėtų atspėti ir nesimetriškos. Tarkime,* $n = 15$ *kartų ruošiamės mesti monetą, kuri herbu atvirsta su tikimybe* $p = 0{,}6$. *Tikrinsime hipotezę, kad fokusininkas neturi ypatingų sugebėjimų atspėti rezultatus su alternatyva, kad turi. Pasirinkime reikšmingumo lygmenį* $\alpha = 0{,}1$. *Kiek kartų fokusininkas turėtų atspėti metimo baigtį, kad patikėtume jo sugebėjimais?*

Atsakymai

1. *Statistikos reikšmė* $Z = -0{,}8716$, *o pirmo žurnalisto kritinė reikšmė* $u = -1{,}645$, *todėl jis priėmė pagrindinę hipotezę. Kadangi antras žurnalistas atmetė pagrindinę hipotezę, tai jo kritinė reikšmė* $v \geqslant -0{,}8716$. *Tada jo reikšmingumo lygmuo* $\alpha \geqslant \Phi(-0{,}8716) \approx 0{,}19$.

2. *Daugiau kaip* 186 *ir* 177 *kartus.*

3. *Statistikos reikšmė* $Z = 1{,}308$, *kritinė reikšmė* 1,645, *todėl pagrindinė hipotezė, kad pasirinktas maišas su mažiau priemaišų, priimtina.*

4. *Daugiau kaip* 10 *kartų.*

5. *Daugiau kaip* 11 *kartų.*

4.12 Hipotezės apie normaliojo dydžio dispersiją

Jeigu automatas, pilstantis gėrimus į skardines, išsiderino, jis dažniau įpila šiek tiek daugiau arba šiek tiek mažiau nei nustatyta. Kitaip tariant, gėrimo kiekio skardinėje dispersija padidėja. Kad galėtume tai pastebėti, reikia hipotezės apie dispersijos reikšmę tikrinimo kriterijaus.

Sudarysime kriterijų hipotezėms apie normaliojo dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dispersiją tikrinti. Tarkime, vidurkis μ yra žinomas, o hipotezės

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2;$$
$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

Naudodamiesi dydžio imtimi sudarykime statistiką

$$U = \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}, \quad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Šią statistiką naudojome sudarydami pasikliautinius intervalus normaliojo dydžio dispersijai. Jeigu hipotezė $\mathbf{H}_0$ yra teisinga, t. y. $\sigma^2 = \sigma_0^2$, tai

$$U = \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n).$$

Galime manyti, kad tokiu atveju mažos arba didelės statistikos U reikšmės pasitaiko retai. Taigi kritinę sritį galime sudaryti iš mažų ir didelių reikšmių. Tegu α yra pasirinktas reikšmingumo lygmuo, o kritinė sritis

$$K = [0, u_1] \cup [u_2, \infty), \quad F_{\chi_n}(u_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - F_{\chi_n}(u_2) = \frac{\alpha}{2}, \quad \chi_n \sim \chi^2(n),$$

sudaryta pasinaudojant pagal $\chi^2(n)$ dėsnį pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio $\alpha/2$ ir $1-\alpha/2$ lygmens kvantiliais. Taigi pagrindinę hipotezę priimsime, kai $u_1 < U < u_2$, ir atmesime, kai statistikos reikšmė nepriklauso šiam intervalui.

Kai alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, kriterijų konstruosime su iš vieno spindulio sudaryta kritine sritimi

$$K = [0, u_1], \quad F_{\chi_n}(u_1) = \alpha, \quad \chi_n \sim \chi^2(n).$$

Alternatyvios hipotezės $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ atveju kriterijaus kritinė sritis

$$K = [u_2, \infty), \quad 1 - F_{\chi_n}(u_2) = \alpha, \quad \chi_n \sim \chi^2(n).$$

Hipotezės apie normaliojo dydžio dispersiją, kai vidurkis žinomas

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *vidurkis* μ *žinomas,* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *dydžio imtis. Hipotezės:*

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2;$$
$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

α *– reikšmingumo lygmuo,* u_1, u_2 *dydžio* $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$ *kvantiliai:*

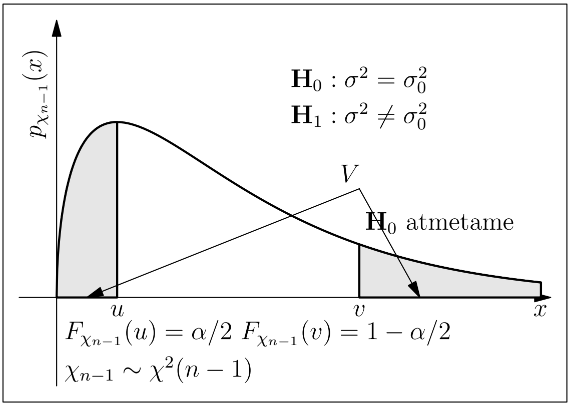
$$F_{\chi_n}(u_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad F_{\chi_n}(u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$
$$U = \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}, \quad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Kriterijus: jei $u_1 < U < u_2$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *priimama, kitais atvejais atmetama.*
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *priimama, kai* $U > u_1, F_{\chi_n}(u_1) = \alpha$.
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, *hipotezė* $\mathbf{H}_0$ *priimama, kai* $U < u_2, F_{\chi_n}(u_2) = 1 - \alpha$.

Jeigu vidurkis μ yra nežinomas, statistiką U keisime į

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1), \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Kriterijų sudarymas visiškai toks pats kaip anksčiau, tik naudojame kito dydžio kvantilius.



Hipotezės apie normaliojo dydžio dispersiją, kai vidurkis nežinomas

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, vidurkis μ žinomas, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ dydžio imtis. Hipotezės:

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2;$$
$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

α – reikšmingumo lygmuo, u_1, u_2 dydžio $\chi^2_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$ kvantiliai:

$$F_{\chi_{n-1}}(u_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad F_{\chi_{n-1}}(u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$
$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Kriterijus: jei $u_1 < U < u_2$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ priimama, kitais atvejais atmetama. Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ priimama, kai $U > u_1, F_{\chi_{n-1}}(u_1) = \alpha$. Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ priimama, kai $U < u_2, F_{\chi_{n-1}}(u_2) = 1 - \alpha$.

Uždaviniai

1. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *imtimi*

$$-2{,}44;\ -0{,}142;\ 2{,}49;\ 0{,}421;\ -1{,}70;\ 2{,}21;\ 1{,}13;\ 0{,}351;\ -0{,}947;\ 1{,}57$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 = 2;$$
$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > 2,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1; 0{,}05$.

2. *Pasinaudoję atsitiktinio dydžio* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *imtimi*

$$0{,}571;\ 1{,}70;\ 0{,}552;\ 0{,}561;\ 1{,}21;\ 0{,}867;\ 0{,}937;\ 1{,}95;\ -0{,}296;\ 1{,}51$$

nuspręskite, kurią iš hipotezių reikia priimti:

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 = 1;$$
$$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 < 1,$$

kai reikšmingumo lygmenys yra $\alpha = 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1; 0{,}05$.

Atsakymai

1. *Statistikos reikšmė* $V = 5{,}615$, *o kritinės reikšmės* 6,39; 5,38; 4,17; 3,32, *todėl pagrindinė hipotezė atmetama, kai reikšmingumo lygmuo yra* $\alpha = 0{,}3$, *ir priimama kitais atvejais.*

2. *Statistikos reikšmė* $V = 3{,}956$, *o kritinės reikšmės* 6,39; 5,38; 4,17; 3,32, *todėl pagrindinė hipotezė priimama, kai reikšmingumo lygmuo yra* $\alpha = 0{,}05$, *ir atmetama kitais atvejais.*

5 skyrius

Sąvokos, terminai etc.

Čia surinkti ne griežti matematiniai sąvokų apibrėžimai, bet neformalūs paaiškinimai, kurių nereikia priimti už visiškai gryną pinigą. Žalos jie jums nepadarys, o šiek tiek padėti gali.

Statistinis bandymas
Bandymas, kurio baigties negalime numatyti, tačiau kurį galime kartoti daug kartų. Paprasčiausi statistinio bandymo pavyzdžiai – monetos ar lošimo kauliuko metimas, atsitiktinis kokios nors aibės elemento parinkimas ir kt. Aišku, jeigu spėsite aklai, kartais baigtį įspėsite teisingai. Tačiau baigtį įspėti nuolat neįmanoma, nebent sukčiaujate atlikdami bandymą. Tada jūsų bandymas nėra statistinis.

Bandymo baigčių aibė
Visų galimų rezultatų, kuriuos ketiname fiksuoti atlikę bandymą, rinkinys. Bandymas gali baigtis tik viena baigtimi. Baigčių užrašymas priklauso niuo bandymo pobūdžio. Pavyzdžiui, metę lošimo kauliuką, nustatome, kiek akučių yra ant atvirtusios sienelės. Tokiu atveju galimos šešios bandymo baigtys, jas užrašome skaičiais.

Atsitiktinis įvykis
Įvykis, susijęs su bandymu, apie kurį iš anksto neįmanoma pasakyti, ar jis įvyks. Tikimybių teorijos požiūriu atsitiktinis įvykis yra baigčių aibės poaibis, sudarytas iš jam palankių baigčių. O kas yra įvykis ne tikimybių teorijoje, bet tikrovėje – niekas jums dorai nepaaiškins. Įvykis yra įvykis ir tiek.

Būtinasis įvykis
Įvykis, kuris atlikus bandymą, visada įvyksta. Žodžiais būtinąjį įvykį galima nusakyti įvairiai. Pavyzdžiui, lošimo kauliuko metimo bandymo atveju įvykiai „atvirs

mažiau kaip septynios akutės“, „atvirs teigiamas akučių skaičius“ yra būtinieji. Tikimybių teorijos požiūriu būtinasis įvykis – aibė, sudaryta iš visų bandymo baigčių. Saulės patekėjimas ryte nėra būtinasis įvykis, nes, kad saulė patekėtų, jūs nededate jokių pastangų ir neatliekate jokio bandymo.

Negalimas įvykis
Įvykis, kuris, atlikus bandymą, niekada neįvyksta. Jeigu bandymas – lošimo kauliuko metimas, tai įvykis „atvirs daugiau kaip septynios akutės“ yra negalimas. Negalimas įvykis neturi nei vienos palankios baigties, taigi jį atitinka tuščia baigčių aibė. Ar neatrodo keista, kad tuščią vietą vadiname taip įmantriai – negalimuoju įvykiu?

Priešingas įvykis
Priešingu įvykiui A vadinamas įvykis, kurį sudaro nepalankios įvykiui A baigtys. Jį žymime $\overline{A}$. Priešingas įvykis įvyksta tada ir tik tada, kai A neįvyksta. Tarp priešingų pažiūrų žmonių būna nesantaikos ir ginčų, bet priešingi įvykiai niekada vienas kitam nekliudo.

Nesutaikomi įvykiai
Tai įvykiai, susiję su tuo pačiu bandymu, negalintys įvykti vienu metu. Nesutaikomi įvykiai neturi nė vienos bendros palankios baigties. Pavyzdžiui, jeigu bandymas – rutulio traukimas iš urnos, kurioje yra balti, juodi ir raudoni rutuliai, tai įvykiai „ištrauktas baltas rutulys“, „ištrauktas juodas rutulys“ yra nesutaikomi. Apie nesutaikomus įvykius galvokite kaip apie nesusisiekiančias ant popieriaus ištėkštas rašalo dėmes, bet ne kaip apie nesutaikomus politikos ar sporto varžovus.

Įvykio tikimybė
Vienetinio intervalo $[0;1]$ skaičius, nusakantis įvykio galimybes įvykti atlikus bandymą. Įvykių tikimybės apibrėžiamos naudojantis konkrečiomis bandymo aplinkybėmis, tačiau taip, kad būtų patenkintos būtinos visiems apibrėžimams sąlygos. Apskritai apie tikimybę galite galvoti kaip apie matą, panašų į geometrinį ilgį ar plotą. Tikimybė ir yra atsitiktinio įvykio matas, matuojantis jo galimybes atlikus bandymą įvykti.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas
Įvykio tikimybė apibrėžiama palankių jam ir visų galimų bandymo baigčių santykiu. Toks apibrėžimas taikomas tuo atveju, kai bandymo baigčių aibė baigtinė ir visos jos yra vienodai galimos. Daugelio klaidų šaltinis – klasikinio apibrėžimo taikymas, kai baigtys nėra vienodai galimos.

Gretinys su pasikartojimais

Jeigu iš N elementų aibės renkame k elementų, užsirašydami ką pasirinkome ir grąžindami elementą atgal, tai gautoji elementų eilė yra gretinys iš N elementų po k su pasikartojimais. Pavyzdžiui, žodį VILNIUS galime suvokti kaip gretinį iš 32 (lietuviškos abėcėlės raidžių skaičius) po 7 su pasikartojimais.

Gretinys be pasikartojimų

Jeigu iš N elementų aibės renkame k elementų jų negrąžindami atgal, bet rikiuodami į eilę, tai gautoji elementų eilė yra gretinys iš N elementų po k be pasikartojimų. Pavyzdžiui, $1, 2, 5$ arba tiesiog 125 galime suvokti kaip gretinį iš 10 (dešimtainių skaitmenų kiekis) po 3 be pasikartojimų. Sekos 125 ir 152 atitinka skirtingus gretinius.

Derinys

Jeigu iš N elementų aibės renkame k elementų ir sudarome iš jų poaibį, gautasis poaibis vadinamas deriniu iš N po k. Pavyzdžiui, dešimtainių skaitmenų poaibis $\{1, 2, 5\}$ yra derinys iš 10 po 3. Kadangi elementai nėra rikiuojami į eilę, tą patį derinį galime užrašyti ir taip: $\{1, 5, 2\}$. Kodėl poaibį pervadiname deriniu? Galėtume ir nepervadinti, bet žodis „derinys“ – konkretesnis.

Geometrinis tikimybės apibrėžimas

Jeigu bandymo baigtys vaizduojamos geometrinės srities Ω, turinčios baigtinį nenulinį matą, taškais ir visos baigtys „turi vienodas galimybes pasirodyti“ atlikus bandymą, įvykio A tikimybė apibrėžiama geometrinių A ir Ω matų santykiu. O ką reiškia „turi vienodas galimybes pasirodyti“? Neįmanoma visko paaiškinti, kartais reikia tiesiog jausti.

Atsitiktinių įvykių sankirta

Veiksmas, kurį galima atlikti su dviem ar daugiau su bandymu susijusių įvykių. Atsitiktinių įvykių A ir B sankirta – naujas įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta abu įvykiai A ir B. Pavyzdžiui, įvykio „vidurdienį lis“ ir „vidurdienį švies saulė“ sankirta yra įvykis „vidurdienį lis šviečiant saulei“. Taigi tokiu atveju tikriausiai matysime vaivorykštę. Įvykių sankirta – tai įvykis, sudarytas iš baigčių, palankių visiems įvykiams. Įvykių A, B sankirta žymima $A \cap B$.

Atsitiktinių įvykių sąjunga

Veiksmas, kurį galima atlikti su dviem ar daugiau su bandymu susijusių įvykių. Atsitiktinių įvykių A ir B sąjunga – naujas įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A ir B (arba ir abu). Pavyzdžiui, įvykio „vidurdienį lis“ ir „vidurdienį švies saulė“ sąjunga yra įvykis „vidurdienį lis arba švies saulė“. Įvykių sąjunga – tai įvykis, sudarytas iš baigčių, kurios yra palankios bent vienam iš įvykių. Įvykių A, B sąjunga žymima $A \cup B$.

Atsitiktinių įvykių algebra

Su tuo pačiu bandymu susijusių įvykių šeima $\mathcal{A}$, tenkinanti tam tikras savybes: būtinasis ir negalimas įvykis priklauso šiai šeimai; kiekvieno įvykio $A \in \mathcal{A}$ priešingas įvykis taip pat priklauso šiai šeimai; baigtinės $\mathcal{A}$ įvykių sekos sankirta ir sąjunga taip pat priklauso $\mathcal{A}$. Jeigu ši savybė teisinga ir begalinėms sekoms, tai įvykių šeima vadinama σ-algebra. Taigi, atlikdami veiksmus su įvykiais iš $\mathcal{A}$, vėl gauname tos pačios šeimos įvykius. Jeigu yra skaičių algebra, vektorių algebra, tai gali būti ir įvykių algebra.

Tikimybinė erdvė

Matematinis modelis bandymui su atsitiktinėmis baigtimis nagrinėti. Tikimybinę erdvę sudaro: baigčių aibė, įvykių σ-algebra ir tikimybinis matas – taisyklė, priskirianti įvykiams intervalo $[0; 1]$ skaičius – įvykių tikimybes. Baigtys yra šios erdvės „taškai“, įvykiai – „figūros“, tačiau jokios koordinačių sistemos nėra!

Diskrečioji tikimybinė erdvė

Tikimybinė erdvė, naudojama nagrinėti bandymams, kurių baigtis galima sunumeruoti. Baigčių aibė gali būti tiek baigtinė, tiek begalinė. Baigčių tikimybės nebūtinai yra vienodos.

Sąlyginė tikimybė

Įvykio A tikimybė, apskaičiuota padarius prielaidą, kad įvykis B įvyko, vadinama įvykio A sąlygine tikimybe su sąlyga B, žymima $P(A|B)$. Taigi skaičiuojant sąlyginę tikimybę laikoma, kad bandymo baigčių aibė sutampa su įvykiui B palankių baigčių aibe. Sąlyginė tikimybė išreiškiama besąlyginėmis tikimybėmis: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Tikimybių sandaugos formulė

Reiškinys, siejantis įvykių sankirtos tikimybę su sąlyginėmis tikimybėmis:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}).$$

Sankirtos tikimybės skaičiavimas keičiamas sąlyginių tikimybių skaičiavimo uždaviniu. Pastarąsias dažnai būna paprasčiau apskaičiuoti nei besąlygines. Nota bene: dažnai klystama dauginant ne sąlygines, bet besąlygines tikimybes.

Pilnosios tikimybės formulė

Reiškinys įvykio A tikimybei skaičiuoti, panaudojant sąlygines tikimybes $P(A|H_j)$:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots ,$$

čia H_j – nesutaikomi įvykiai, kurių sąjunga lygi visai baigčių aibei, o tikimybės teigiamos. Naudojantis šia formule dažnai sudėtingas įvykio tikimybės skaičiavimo uždavinys pakeičiamas paprastesniais sąlyginių tikimybių skaičiavimo uždaviniais. Taigi ši formulė – lyg pienovežis, suvežantis ūkininkų pristatytą pieną į vieną vietą.

Nepriklausomi įvykiai

Jeigu prielaida, kad įvykis B įvyko, nesuteikia galimybių patikslinti žinių apie įvykį A, t. y. $P(A|B) = P(A)$, tai įvykis A nepriklauso nuo B. Tada ir B nepriklauso nuo A. Įvykių nepriklausomumui apibrėžti patogiau naudotis sąlyga

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Naudojantis panašia sąlyga apibrėžiamas ir didesnių (baigtinių ir begalinių) įvykių sistemų nepriklausomumas. Jokiu būdu nepainiokite nesutaikomų ir nepriklausomų įvykių sąvokų! Jeigu brolis ir sesuo turi atskirus kambarius, mokosi ar dirba skirtingose įstaigose, vadinasi jų gyvenimai yra nepriklausomi vienas nuo kito. Tačiau tai nereiškia, kad tarp jų yra nesantaika. Kartais jie galbūt netgi gali kartu žiūrėti tą pačią televizijos laidą.

Bernulio schema

Tikimybinė erdvė, sudaryta vienodų ir nepriklausomų bandymų su dviem baigtimis (sėkme ir nesėkme) sekoms nagrinėti. Svarbiausi schemos dydžiai – vieno bandymo sėkmės tikimybė p ir bandymų skaičius n. Be abejo, Bernulis apie Bernulio schemą nieko nebuvo girdėjęs, tačiau kas tai yra – išmanė.

Tikėtiniausias sėkmių skaičius Bernulio schemoje

Sėkmių skaičius, kurį gauti atlikus Bernulio schemos bandymus, tikimybė yra didžiausia. Jeigu bandymų skaičius yra n, o vieno bandymo sėkmės tikimybė p, tai tikėtiniausias sėkmių skaičius yra didžiausias natūrinis skaičius, tenkinantis nelygybę $m \leqslant (n+1)p$. Pokštas: simetriška moneta metama vieną kartą. Koks labiausiai tikėtinas atvirtusių herbų (skaičių) kiekis?

Polinominė schema

Tikimybinė erdvė, skirta nepriklausomų ir vienodų bandymų su r ($r \geqslant 2$) baigčių sekoms nagrinėti. Bernulio schemos apibendrinimas.

Ribinės teoremos

Teiginiai apie tam tikrų įvykių, priklausančių nuo kintamo parametro, tikimybių elgesį, kai parametras neaprėžtai didėja arba artėja prie ribinės reikšmės. Pavyzdžiui, Puasono ir Muavro ir Laplaso teoremos Bernulio schemai nusako sėkmių skaičiaus tikimybių elgesį, kai bandymų skaičius neaprėžtai didėja.

Atsitiktinis dydis

Funkcija, apibrėžta bandymo baigčių aibėje ir įgyjanti skaitines reikšmes: $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Papildoma sąlyga reikalauja, kad ši funkcija būtų tam tikru būdu suderinta su nagrinėjamų atsitiktinių įvykių algebra, t. y. kad tikimybės $P(X < x)$ būtų apibrėžtos. Jei tos sąlygos nebūtų, dydžio negalėtume tirti tikimybiniais metodais.

Atsitiktinis vektorius

Atsitiktinis vektorius tai atsitiktinių dydžių rinkinys $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_m \rangle$. Jeigu rinkinyje yra m komponenčių, vektorius vadinamas m-mačiu.

Pasiskirstymo funkcija

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija apibrėžiama taip: $F_X(x) = P(X < x)$, čia $x \in \mathbb{R}$. Naudodamiesi pasiskirstymo funkcija galime reikšti kitų su atsitiktiniu dydžiu susijusių įvykių tikimybes, pavyzdžiui, $P(a \leqslant X < b) = F_X(b) - F_X(a)$. Taigi pasiskirstymo funkcija saugo visą tikimybinę informaciją apie dydį.

Diskretusis atsitiktinis dydis

Jeigu atsitiktinio dydžio reikšmes galima sunumeruoti, dydis vadinamas diskrečiuoju. Taigi dydžiai, kurių reikšmių aibės yra baigtinės – diskretieji dydžiai. Tačiau diskrečiojo dydžio reikšmių aibė gali būti ir begalinė. Pavyzdys: lošimo kauliukas mėtomas tol, kol atvirsta šešios akutės. Dydžio X reikšmė – metimų skaičius. Šis dydis yra diskretusis.

Išsigimęs atsitiktinis dydis

Tai funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, kuri visoms baigtims prisikiria tą pačią reikšmę, t. y. egzistuoja toks skaičius a, kad $P(X = a) = 1$. Tokie dydžiai dažnai pasitaiko kaip ribiniai atsitiktinių dydžių sekų dydžiai, todėl tikslinga ir juos įtraukti į atsitiktinių dydžių šeimą, nors kasdienės logikos požiūriu keistoka vadinti atsitiktiniu dydį, kurio reikšmę iš anksto žinome.

Binominis atsitiktinis dydis

Tai dydis X, kurį galima suvokti kaip sėkmių skaičių, gautą atlikus n vienodų ir nepriklausomų bandymų su dviem baigtimis – sėkme ir nesėkme. Jeigu sėkmės tikimybė yra p, tai

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Simboliškai žymima $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Dar sakoma, kad X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį su parametrais n, p.

Geometrinis atsitiktinis dydis
Tai dydis X, įgyjantis reikšmes $m = 1, 2, \ldots$ su tikimybėmis

$$P(X = m) = (1 - p)^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Simboliškai rašome $X \sim \mathcal{G}(p)$. Dydį galima suvokti kaip Bernulio schemos bandymų, atliekamų iki pirmos sėkmės, skaičių.

Puasono atsitiktinis dydis
Tai dydis X, įgyjantis reikšmes $m = 0, 1, 2, \ldots$ su tikimybėmis

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

čia $\lambda > 0$ – fiksuotas skaičius. Simboliškai rašome $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sakome, kad dydis X pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru λ. Puasono dydžio reikšmių tikimybės artimos atitinkamoms binominio dydžio $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ tikimybėms, kai n didelis, ir $np \approx \lambda$.

Tolydusis atsitiktinis dydis
Jeigu atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas neturi trūkio taškų, dydis vadinamas tolydžiuoju. Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių šeimoje svarbiausi yra tie dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcijų grafikai beveik visuose taškuose turi liestines, t. y. beveik visuose taškuose egzistuoja pasiskirstymo funkcijų išvestinės. Tokie tolydieji atsitiktiniai dydžiai vadinami absoliučiai tolydžiaisiais. Taigi tolydžiųjų dydžių šeimoje yra dydžių, kurie tolydesni už kitus.

Atsitiktinio dydžio tankis
Jeigu atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ beveik visur turi išvestinę, tai

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} p(x)\mathrm{d}x, \quad p(x) = p_X(x) = F_X(x)'.$$

Funkcija $p(x)$ vadinama atsitiktinio dydžio (tikimybiniu) tankiu. Tankio funkcija neneigiama, $p(x) \geqslant 0$, plotas po tankio grafiku virš Ox ašies lygus 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Tankio funkcija gali įgyti bet kokias teigiamas reikšmes. Jeigu teisinga nelygybė $p_X(x_1) > p_X(x_2)$, tai dydis dažniau įgyja reikšmes, artimas x_1 negu artimas x_2. Tai ir paaiškina, kodėl funkcija vadinama tankiu.

Tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis
Sakoma, kad atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes iš intervalo $[a; b]$, yra tolygiai

pasiskirstęs šiame intervale, jeigu jis turi tankį $p_X(x)$, kuris su visais $x \in (a;b)$ įgyja tą pačią reikšmę $p_X(x) = c$. Kadangi plotas po tankio grafiku lygus vienam, tai $c = 1/(b-a)$. Tankis yra pastovus, tai su visais $x_1, x_2 \in (a;b)$ atsitiktinis dydis X reikšmes, artimas x_1, linkęs įgyti taip pat dažnai kaip reikšmes artimas x_2. Simboliškai žymime $X \sim \mathcal{T}([a;b])$.

Eksponentinis dydis

Jeigu atsitiktinis dydis X, įgyjantis tik neneigiamas reikšmes, turi tankį $p_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, x \geqslant 0$, jis vadinamas eksponentiniu. Dar sakoma, kad jis pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ. Simboliškai rašome $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Eksponentiniais dydžiais aprašoma daugelis gamtos reiškinių. Pavyzdžiui, laikotarpis nuo radioaktyvaus atomo stebėjimo pradžios iki jo skilimo momento yra eksponentinis atsitiktinis dydis. Muilo burbulo gyvavimo trukmė – irgi.

Pareto atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktinis dydis X, įgyjantis reikšmes $x \geqslant C, C > 0$, vadinamas Pareto atsitiktiniu dydžiu, jeigu jo pasiskirstymo funkcija yra $F_X(x) = 1 - (C/x^\alpha)$, čia $C > 0, \alpha > 0, x \geqslant C$. Simboliškai žymime $X \sim \mathcal{P}ar(\alpha)$. Vilfredas Pareto naudojo šio dydžio pasiskirstymo funkciją gyventojų daliai, kuriai priklauso turto, kurio vertė mažesnė už x, vertinti.

Standartinis normalusis atsitiktinis dydis

Atsitiktinį dydį X vadiname stadartiniu normaliuoju, jeigu jis turi tankį

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Kitaip tariant, X yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį. Simboliškai rašome $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tikrovėje pasitaikantys atsitiktiniai dydžiai dažnai būna panašūs į normaliuosius, štai kodėl taip dažnai matome panašius į varpą grafikus ir diagramas.

Normalieji atsitiktiniai dydžiai

Jeigu atsitiktinio dydžio X tankis yra

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

sakome, kad dydis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais μ, σ^2, rašome $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Parametrų prasmė tokia: μ yra dydžio vidurkis, $\mu = \mathbf{E}[X]$, σ^2 yra dispersija, $\sigma^2 = \mathbf{D}[X]$. Normalųjį dydį $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ galima išreikšti per standartinį normalųjį $X = \mu + \sigma X_0, X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Atsitiktinio dydžio kvantilis

Jeigu atsitiktinis dydis X yra tolydusis, tai α lygio kvantiliu vadiname lygties $F_X(x) = \alpha$ sprendinį, čia $0 < \alpha < 1$, o $F_X(x)$ yra dydžio pasiskirstymo funkcija. Jeigu pasiskirstymo funkcija yra griežtai didėjanti, tai su visomis α reikšmėmis sprendinys yra vienintelis.

Atsitiktinio dydžio kritinė reikšmė

Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X β lygio kritine reikšme $(0 < \beta < 1)$ vadiname skaičių x, su kuriuo yra teisinga lygybė $P(X \geqslant x) = \beta$. Kritinė reikšmė yra lygties $1 - F_X(x) = \beta$ arba $F_X(x) = 1 - \beta$ sprendinys. Taigi β lygio kritinė reikšmė yra $1 - \beta$ lygio kvantilis. Kritinės reikšmės terminas paprastai vartojamas statistinių hipotezių tikrinimo uždaviniuose.

Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Kasdienėje kalboje sakoma, kad dydis X nepriklauso nuo Y, jei pirmo dydžio reikšmė nedaro įtakos antrajam. Pavyzdžiui, mano šiandien ištartų žodžių skaičius nedaro jokios įtakos rytoj iškrisiančių kritulių kiekiui. O tikimybių teorijoje atsitiktiniai dydžiai X, Y vadinami nepriklausomais, jeigu atsitiktiniai įvykiai $\{X < x\}, \{Y < y\}$, susiję su atsitiktiniais dydžiais, yra nepriklausomi, t. y. su visomis x, y reikšmėmis $P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$. Analogiškai apibrėžiama didesnės atsitiktinių dydžių sistemos sąvoka.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

Jeigu diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots$, tai jo vidurkiu vadinamas skaičius

$$\mathbf{E}[X] = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Atsitiktinio dydžio vidurkis gali nepriklausyti atsitiktinio dydžio reikšmių aibei. Pavyzdžiui, jeigu X – akučių, atvirtusių ant simetriško lošimo kauliuko, skaičius, tai toks dydis gali įgyti reikšmes $1, 2, 3, 4, 5, 6$, o jo vidurkis nėra dydžio reikšmė: $\mathbf{E}[X] = 3{,}5$. Tačiau jeigu kauliuką mesime daug kartų ir sudarysime aritmetinį gautų reikšmių vidurkį, labai tikėtina, kad šis skaičius mažai skirsis nuo atsitiktinio dydžio vidurkio, t. y. gausime $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \approx \mathbf{E}[X]$. Egzistuoja atsitiktiniai dydžiai, neturintys vidurkio.

Vidurkio adityvumo savybė

Jeigu atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots, X_n$ turi vidurkius, tai vidurkį turi ir jų suma. Be to, visiems atsitiktiniams dydžiams, turintiems vidurkius, teisinga lygybė

$$\mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \cdots + \mathbf{E}[X_n].$$

Ši svarbi savybė vadinama vidurkio adityvumo savybe.

Absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių vidurkis
Absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio X, turinčio tankį $p_X(x)$, vidurkis apibrėžiamas lygybe

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Vidurkį galima apibrėžti ne tik diskretiesiems bei absoliučiai tolydiesiems dydžiams. Pavyzdžiui, sumuodami du dydžius – vieną diskretųjį, kitą absoliučiai tolydų, galime gauti dydį, kuris nepriklauso nė vienai iš šių šeimų. Bendroje teorijoje pateikiamas vidurkio apibrėžimas, tinkamas visais atvejais.

Atsitiktinio dydžio dispersija
Atsitiktinio dydžio dispersija, apibrėžiama lygybe

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2],$$

nusako atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo didumą. Atsitiktinio dydžio dispersija – neneigiamas skaičius. Išsigimusio atsitiktinio dydžio dispersija lygi nuliui, nes jo reikšmės nėra išsibarsčiusios iš viso (jis įgyja vienintelę reikšmę). Egzistuoja atsitiktiniai dydžiai, neturintys dispersijos.

Atsitiktinio dydžio standartinis nuokrypis
Atsitiktinio dydžio X standartiniu nuokrypiu vadinamas dydis

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}[X]}.$$

Jis taip pat nusako atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo didumą.

Dispersijos adityvumo savybė
Jeigu atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi ir turi dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją, be to

$$\mathbf{D}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \cdots + \mathbf{D}[X_n].$$

Ši savybė vadinama dispersijos adityvumu. Nuo vidurkio adityvumo savybės ji skiriasi tuo, kad ją turi tik nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Didžiųjų skaičių dėsnis
Tai ribinė teorema, nusakanti nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos elgesį, kai dėmenų skaičius didėja. Dėsnio esmė tokia: jeigu $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$, tai su didelėmis n reikšmėmis atsitiktinis dydis $Y_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ dažniausiai įgyja tik artimas skaičiui a reikšmes, t. y. „supanašėja“ su išsigimusiu atsitiktiniu dydžiu, įgyjančiu

reikšmę a. Didžiųjų skaičių dėsnį taiko visi, net ir nežinantys, kas tai yra.

Čebyšovo nelygybė

Paprasta nelygybė, kuria naudojantis galima įvertinti atsitiktinio dydžio X reikšmių nuokrypių nuo vidurkio tikimybes:

$$P(|X - \mathbf{E}[X]| > \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}[X]}{\epsilon^2}.$$

Nelygybė naudojama įvairiuose teoriniuose samprotavimuose ir įrodymuose, kai nereikia žinoti tikslios tikimybės reikšmės, bet būtina – jos viršutinį rėžį. Pavyzdžiui, pasinaudojus ja nesunku įrodyti didžiųjų skaičių dėsnį vienodai pasiskirsčiusiems nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, turintiems dispersijas.

Atsitiktinių dydžių kovariacija

Atsitiktinių dydžių X, Y kovariacija apibrėžiama lygybe

$$cov(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])].$$

Kovariacija nebūtinai egzistuoja, tačiau jeigu atsitiktiniai dydžiai turi dispersijas, tai galima apskaičiuoti ir kovariaciją. Jeigu atsitiktiniai dydžiai X, Y yra nepriklausomi, jų kovariacija lygi nuliui.

Teigiamai koreliuoti atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktiniai dydžiai X, Y vadinami teigiamai koreliuotais, jeigu $cov(X, Y) > 0$. Tai reiškia, kad dydžius sieja ryšys: didesnes vieno dydžio reikšmes paprastai atitinka didesnės kito dydžio reikšmės. Jeigu iš dydžių stebėjimų gautas reikšmes $\langle x_i, y_i \rangle$ pavaizduotume plokštumos taškais, matytume polinkį grupuotis apie tam tikrą tiesę su teigiamu krypties koeficientu.

Neigiamai koreliuoti atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktiniai dydžiai X, Y vadinami neigiamai koreliuotais, jeigu $cov(X, Y) < 0$. Tai reiškia, kad dydžius sieja ryšys: didesnes vieno dydžio reikšmes atitinka mažesnės kito dydžio reikšmės. Jeigu iš dydžių stebėjimų gautas reikšmes $\langle x_i, y_i \rangle$ pavaizduotume plokštumos taškais, matytume polinkį grupuotis apie tam tikrą tiesę su neigiamu krypties koeficientu.

Nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktiniai dydžiai X, Y vadinami nekoreliuotais, jeigu $cov(X, Y) = 0$. Pavyzdžiui, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai yra nekoreliuoti. Dydžiai gali būti nekoreliuoti, tačiau priklausomi.

Koreliacijos koeficientas

Dydis, nusakantis atsitiktinių dydžių X, Y ryšio savybes. Koreliacijos koeficientas apibrėžiamas lygybe

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}[X]\mathbf{D}[Y]}}.$$

Koreliacijos koeficientas įgyja reikšmes iš intervalo $[-1;1]$. Jeigu $\rho(X,Y) = \pm 1$, tai dydžiai tiesiškai susiję, t.y. egzistuoja skaičiai a, b, c, ne visi lygūs nuliui, kad $P(aX + bY = c) = 1$. Jeigu $\rho(X,Y) > 0$, dydžiai yra teigiamai koreliuoti, jei $\rho(X,Y) < 0$, dydžiai neigiamai koreliuoti. Kuo koreliacijos koeficiento modulis $|\rho(X,Y)|$ didesnis, tuo dydžių ryšys panašesnis į tiesinį.

Centrinė ribinė teorema

Ribinė teorema, nusakanti nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos elgesį, kai dėmenų daugėja. Tegu $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Centrinės ribinės teoremos esmę galima suformuoluoti taip: jei

$$Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\mathbf{D}[S_n]},$$

tai didėjant n dydis Y_n savo tikimybinėmis savybėmis darosi vis panašesnis į standartinį normalųjį dydį. Kad centrinė ribinė teorema būtų teisinga, iš dydžių X_i reikalaujama nedaug. Todėl centrinė ribinė teorema valdo daug tikrovės reiškinių.

Muavro ir Laplaso teorema

Centrinės ribinės teoremos atskiras atvejis Bernulio schemai vadinamas Muavro ir Laplaso teorema. Jos esmė: dydis

$$Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[S_n]}},$$

čia S_n – sėkmių skaičius Bernulio schemoje, savo tikimybinėmis savybėmis darosi vis panašesnis į standartinį normalųjį dydį, kai bandymų skaičius n didėja.

Populiacija

Populiacija, arba generalinė aibė, – statistinio tyrimo objektų visuma. Tiriamų objektų savybės reiškiamos kintamųjų reikšmėmis, kurios gali būti tiek skaitinės (kiekybiniai kintamieji), tiek simbolinės (kokybiniai kintamieji).

Atsitiktinė imtis

Kadangi visi populiacijos objektai dažniausiai negali būti ištirti, atrenkama jų dalis ir pagal juos tiriant gautus duomenis daroma išvada apie visos populiacijos savybes. Atranka gali būti vykdoma įvairiais metodais. Matematinėms išvadoms geriausiai tinka atsitiktinis atrankos būdas: objektai atrenkami tyrimui atsitiktinai ir nepriklausomai su grąžinimu. Atrinktų objektų tyrimą galima interpretuoti kaip nepriklausomus bandymus, kuriuose stebimos vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių reikšmės. Todėl matematinė sąvoka, atitinkanti tokį tyrimą, yra atsitiktinis vektorius

$$\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle,$$

kurio komponentės – atsitiktiniai ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Šis vektorius vadinamas atsitiktine imtimi. Konkrečiuose tyrimuose gauname šių dydžių reikšmes. Šių reikšmių rinkinys $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ vadinamas atsitiktinės imties realizacija arba tiesiog imtimi. Atsitiktinės imties ir jos realizacijos ryšys – toks pat kaip funkcijos ir jos reikšmės.

Aprašomoji statistika
Statistiniame tyrime gautų duomenų tvarkymo, sisteminimo ir vaizdavimo metodai. Jų tikslas – palengvinti duomenų apžvalgą, parengti juos skaičiavimams ir vertinimams.

Imties duomenų dažniai
Natūriniai skaičiai, gauti nustačius, kiek kartų imtyje pasikartoja duomenų reikšmės. Padalijus duomenų dažnius iš bendro duomenų skaičiaus, gaunami santykiniai dažniai.

Stulpelinė diagrama
Grafinis duomenų dažnių lentelės vaizdavimas. Abscisių ašyje pažymimi taškai, atitinkantys skirtingus imties duomenis, virš jų brėžiami stulpeliai, kurių aukščiai proporcingi duomenų dažniams.

Skritulinė diagrama
Grafinis duomenų dažnių lentelės vaizdavimas. Skirtingas duomenų reikšmes atitinka skritulio sektoriai, kurių centriniai kampai proporcingi duomenų dažniams.

Histograma
Sugrupuotų imties duomenų stulpelinė diagrama. Visa imties duomenų sritis dalijama į vienodo ilgio intervalus, skaičiuojama, kiek duomenų yra dalijimo intervaluose, ir virš šių intervalų braižomi stulpeliai, kurių aukščiai proporcingi dažniams. Proporcingumo koeficientas parenkamas taip, kad bendras diagramos stulpelių plotas būtų lygus 1.

Imties variacinė eilutė
Imties duomenų eilutė, gauta išdėsčius imties duomenis didėjimo tvarka.

Empirinė pasiskirstymo funkcija
Pasiskirstymo funkcija, sudaryta pagal imties duomenų dažnių lentelę. Šią lentelę galima interpretuoti kaip diskrečiojo atsitiktinio dydžio reikšmių ir tikimybių lentelę: reikšmės x_i tikimybė lygi santykiniam šios reikšmės dažniui. Jeigu sudarysime dvi to paties atsitiktinio dydžio imtis, jas atitinkančios empirinės pasiskirstymo funkcijos bus skirtingos. Tačiau jeigu imtyse duomenų bus daug, abi jos bus panašios į „tikrąją“ atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją.

Imties kvantiliai
Imties $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ q-osios eilės kvantilis – tai skaičius v_q, „dalijantis“ imties duomenis į dvi dalis: į kairę nuo v_q yra ne mažiau kaip qn duomenų, į dešinę – ne mažiau kaip $(1-q)n$.

Mediana
Mediana vadinamas imties kvantilis, kurio eilė $q = 1/2$.

Kvartiliai
Imties kvantiliai, kurių eilės yra $1/4; 2/4; 3/4$, vadinami kvartiliais ir paprastai žymimi Q_1, Q_2, Q_3. Kvartilis Q_2 yra mediana. Galėtume kvartilį lietuviškai vadinti imties ketvirčio ženklu, o medianą – imties pusės ženklu. Tačiau pavadinimas taptų ilgesnis, be to, – skambėtų ne taip moksliškai.

Imties vidurkis
Imties $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ vidurkiu vadinamas skaičius

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Imties vidurkį galima suvokti kaip vidurkį diskrečiojo atsitiktinio dydžio, kurio reikšmės ir tikimybės duotos imties reikšmių ir santykinių dažnių lentele. Norėčiau skaitančių šias eilutes paprašyti trumpam užsimerkti ir pagalvoti, ar nepainiojate atsitiktinio dydžio ir imties vidurkio sąvokų.

Imties dispersija
Imties $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ dispersija vadinamas skaičius

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Imties dispersija nusako imties duomenų išsibarstymo didumą.

Statistika

Atsitiktinė imtis $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra atsitiktinių dydžių seka, atitinkanti nepriklausomų dydžio, išreiškiančio populiacijos objektų savybes, stebėjimų seką. Darant išvadas dažnai svarbios ne pavienės atsitiktinės imties komponentės, bet iš jų sudaryti reiškiniai. Tokie reiškiniai (funkcijos) $T = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vadinami imties statistikomis. Imties statistika – naujas atsitiktinis dydis. Įstatę konkretaus tyrimo duomenis, gauname šio dydžio reikšmę.

Taškinis parametro įvertis

Naudojantis imties duomenimis siekiama nustatyti stebimo atsitiktinio dydžio nežinomo parametro θ reikšmę. Šiam tikslui sudaroma atitinkama statistika $\theta^* = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Tokia statistika vadinama taškiniu nežinomo parametro įverčiu. Iš tiesų, gauname vieną skaičių ir mūsų valia – pasikliauti juo ar ne.

Nepaslinktasis parametro įvertis

Nežinomo parametro θ taškinis įvertis $\theta^* = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yra atsitiktinis dydis, kurio reikšmes gauname iš konkrečių imties duomenų $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. Įvertis vadinamas nepaslinktuoju, jeigu $\mathbf{E}[\theta^*] = \theta$, t. y. įverčio reikšmės yra „taisyklingai išsibarsčiusios“ apie tikrąją parametro reikšmę.

Empirinis momentas

Atsitiktinės imties $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ k-osios eilės empiriniu momentu vadinamas dydis

$$a_k = \frac{X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k}{n}.$$

Tai naujas atsitiktinis dydis, jo reikšmes gauname naudodamiesi atsitiktinės imties realizacija (iš konkrečių stebėjimų gautais duomenimis). Empirinio momento reikšmės yra taškiniai teorinių momentų įverčiai. Beje, empiriniai momentai turi prasmę ir tada, kai teoriniai iš viso neegzistuoja!

Momentų metodas

Taškinių įverčių sudarymo metodas, kurio esmė – teorinių ir empirinių dydžio momentų sulyginimas.

Pasikliautinis intervalas

Intervalą $I = (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n); \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n))$, sudarytą naudojant dvi imties statistikas, vadiname nežinomo parametro θ pasikliautiniu intervalu su pasikliovimo lygmeniu $0 < Q < 1$, jei

$$P(\theta \in (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n); \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \geqslant Q.$$

Naudodamiesi imties realizacijos duomenimis, sudarome konkretų pasikliautinį intervalą. Pasikliovimo lygmuo nurodo „tikėtinumo laipsnį“, kad nežinomas parametras priklauso sukonstruotam intervalui. Taigi pasikliautinį intervalą galite įsivaizduoti kaip gaubtelį, po kuriuo su duota garantija yra tikroji rūpimo parametro reikšmė.

Chi kvadratu dėsnis
Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji dydžiai, o $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, tai sakoma, kad dydis χ_n^2 yra pasiskirstęs pagal chi kvadratu dėsnį su n laisvės laipsnių. Dydis χ_n^2 yra absoliučiai tolydus, simboliškai žymime $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Studento dėsnis
Jeigu $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji dydžiai, o

$$T_n = \frac{X_0}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}},$$

tai sakoma, kad dydis T_n yra pasiskirstęs pagal Studento dėsnį su n laisvės laipsnių. Dydis T_n yra absoliučiai tolydus, simboliškai žymime $T_n \sim \mathcal{S}t(n)$.

Tiesinės regresijos uždavinys
Žinoma, kad atsitiktiniai dydžiai Y_x turi tiesinį dėmenį $\alpha+\beta x$: $Y_x = \alpha + \beta x + U_x$, čia U_x yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys nulinį vidurkį ir teigiamą dispersiją. Parametrai α, β yra nežinomi. Iš bandymų gaunamos dydžių Y_x reikšmės y_i, kai $x = x_i$. Naudojantis duomenimis $\langle x_i, y_i \rangle$ reikia įvertinti nežinomų parametrų α, β reikšmes.

Mažiausiųjų kvadratų metodas
Tai metodas tiesinės regresijos uždaviniui spręsti. Uždavinyje reikalaujama rasti nežinomų sąryšio $Y_x = \alpha + \beta x + U_x$, parametrų α, β įverčius, naudojantis iš stebėjimų gautomis reikšmėmis $\langle x_i, y_i \rangle, y_i = Y_{x_i}$. Metodo esmė – nustatyti, su kokiomis α, β reikšmėmis reiškinio

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i - y_i)^2$$

reikšmė yra mažiausia.

Statistinė hipotezė
Statistinė hipotezė, tai teiginys apie stebimo atsitiktinio dydžio (arba dydžių) pasiskirstymo dėsnį. Paprastai formuluojamos dvi hipotezės: pagrindinė ir alternatyvi. Vieną iš jų reikia priimti naudojantis imties duomenimis. Jeigu hipotezės

yra teiginiai apie skaitines pasiskirstymo dėsnio parametrų reikšmes, jos vadinamos parametrinėmis, jeigu kito pobūdžio teiginiai – neparametrinėmis. Taigi statistinės hipotezės priimamos ar atmetamos remiantis duomenų analize, o ne būrimo iš kavos tirščių rezultatais.

Pirmos rūšies klaida

Klaidingas sprendimas tikrinant statistines hipotezes, kai atmetama pagrindinė hipotezė, nors ji yra teisinga. Taigi priimama alternatyvi hipotezė, nors ji yra klaidinga. Pavyzdžiui, jeigu pagrindinė hipotezė yra $\mathbf{H}_0$: *aš galiu, jeigu pasimokysiu, gauti gerą tikimybių teorijos egzamino pažymį,* yra teisinga, bet ją atmesite, padarysite pirmos rūšies klaidą.

Antros rūšies klaida

Klaidingas sprendimas tikrinant statistines hipotezes, kai primama pagrindinė hipotezė, nors ji yra klaidinga. Pavyzdžiui, jeigu pagrindinė tėvų hipotezė, kad sūnus rūko, tai jie tikriausiai padarys antrosios rūšies klaidą, suradę tarp nerūkančio sūnaus vadovėlių cigaretę, kurią paliko tuos vadovėlius kažkada pasiskolinęs draugas.

Kriterijaus reikšmingumo lygmuo

Hipotezių tikrinimo uždaviniui spręsti sudaromas tam tikras kriterijus. Jeigu taikant šį kriterijų, tikimybė padaryti pirmos rūšies klaidą neviršija skaičiaus $\alpha, 0 < \alpha < 1$, tai šis skaičius vadinamas kriterijaus reikšmingumo lygmeniu. Galite suvokti kriterijaus reikšmingumo lygmenį kaip dydį, atvirkštinį baimės padaryti pirmos rūšies klaidą didumui. Kuo baimė didesnė, tuo reikšmingumo lygmuo mažesnis.

Kritinė sritis

Hipotezių tikrinimo uždaviniui spręsti sudaromas kriterijus, kuris remiasi tam tikra imties statistika. Šios statistikos reikšmės, su kuriomis pagrindinė hipotezė yra atmetama, sudaro sritį, kuri vadinama kriterijaus kritine sritimi. Taigi kritinė sritis yra teisingos pagrindinės hipotezės atmetimo sritis. Neieškokite panašumų su kritinio paauglystės amžiaus ar kitomis kasdienio žmonių gyvenimo sąvokomis.

Literatūra

Tikimybių teorijos vadovėlių, monografijų – daugybė. Visuose vadovėliuose dėstomi tie patys pagrindai. Kuris geresnis? Tas, iš kurio galite daugiausia išmokti. Išmokti galime iš tų knygų, kuriose dėstomi mums nauji dalykai, be to, – suprantamai. Studijuoti reiškia aiškintis, versti nesuprantamus dalykus suprantamais, aiškiais. Taigi ir „geriausiojo vadovėlio“ titulą, kaip kokią pereinamąją sporto taurę, rimtai studijuojant turėtų pelnyti vis kitos knygos.

Tikimybių teorijos ir matematinės statistika nematematinių specialybių studentams

1. A. Apynis, E. Stankus. *Matematika.* Vilnius: TEV, 2001.
2. A. Bakštys. *Statistika ir tikimybė.* Vilnius: TEV, 2006.
3. V. Čekanavičius, G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai, 1, 2 t.* Vilnius: TEV, 2002.
4. A. Žemaitis. *Trumpas tikimybių teorijos ir matematinės statistikos kursas.* Vilnius: Technika, 2002.

Akademiniai tikimybių teorijos ir matematinės statistikos kursai

1. A. Aksomaitis. *Tikimybių teorija ir statistika.* Kaunas: Technologija, 2000.
2. J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilnius, 1996.

Tikimybių teorija internete

1. http://www.mathcs.carleton.edu/probweb/probweb.html
2. http://books.google.com/ Ieškokite: Probability

Rodyklė

Vilius Stakėnas
Tikimybių mokslo pagrindai

Kalbos redaktore *Danutė Petrauskienė*
Viršelio dailininkė *Audronė Uzielaitė*

Tiražas 200 egz.
Išleido Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 3, LT-01513 Vilnius
Spausdino UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, LT-09109 Vilnius