

## VII. MANDELBROTO AIBĖS

### 7.1 Parametrinės aibės žemėlapis

Tarkime, kad duota IAS arba dinaminių sistemų šeima, kurios priklauso nuo dviejų realių (arba vieno kompleksinio) parametrų. Minimą parametrų aibę ateityje žymėsime raide  $P$  ir vadinsime parametrų erdve. Pavyzdžiui  $P = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{R}^2; |\lambda_1|, |\lambda_2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$  galėtų būti žemiau pateiktos IAS

$$\{\mathcal{C}; (\lambda_1 + \lambda_2)z + 1, (\lambda_1 + \lambda_2)z - 1\}$$

parametrų erdvė. Su kiekviena parametro reikšme  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P$  mes susiejame IAS, kurios atraktorių žymėsime  $A(\lambda)$ . Trumpai tariant, su kiekviena parametro reikšme  $\lambda$  mes susiejame vienintelį fraktalą. Natūralu tikėtis, kad jei parametrų erdvės elementus parinksime arti viena kito, šios erdvės metrikos atžvilgiu, tai gausime, kad ir šias reikšmes atitinkantys fraktalai taip pat bus artimi, bet jau Hausdorfo metrikos atžvilgiu.

Panagrinėkime dar vieną pavyzdį. Tarkime, kad  $P = \mathcal{C}$  ir su šiuo parametru susiekime dinaminę sistemą:

$$\{\bar{\mathcal{C}}; f_\lambda(z) = z^2 - \lambda\}.$$

Matome, kad kiekvienai fiksuotai parametro  $\lambda$  reikšmei turime vieną dinaminę sistemą. Kiekviena ši dinaminė sistema atstovauja kokią nors Julijaus aibę. Vėlgį turime ryšį tarp parametrų erdvės ir tarp Julijaus aibių. Įsitikinome, kad galime nurodyti ryšį tarp parametrų ir fraktalų erdvių elementų.

Ateityje laikysime, kad parametrų erdvės yra arba  $\mathcal{R}^2$  arba išplėstinės kompleksinės plokštumos poaibiai. Tarkime, kad parametrų erdvę  $P$  sudaro koks nors plokštumos kvadratas. Šį kvadratą galime sutapatinti su kompiuterio ekranu, tiksliau, parametru  $\lambda$  šiuo atveju galime laikyti fiksuotos ekrano dalies, bet kokį tašką. Pasirinkime, bet kokį tašką ekrane (žinoma, tam turime nurodyti jo koordinatas). Pasirinktąjį tašką nuspalvinsime kokia nors pasirinkta spalva, jei šį tašką  $\lambda$  atitinkantis fraktalas  $A(\lambda)$  turi numatytą savybę. Šią savybę nurodome mes patys. Nesunku suprasti, kad atlikę ekrano spalvinimo procedūrą mes gausime parametrų erdvės "žemėlapi", kuriame bus išskirtos taškų grupės, kurios atitinka fraktalus su nurodytom savybėm.

Tarkime, kad  $P \subset \mathcal{R}^2$ . Be to sakykime, kad apibrėžta funkcija  $f : P \rightarrow H(X)$ . Ši funkcija turi savybę: kiekvienam parametrui  $\lambda$  priskiria kokią nors fraktalų erdvės aibę, tarkime  $A(\lambda)$ . Susitarkime plokštumos tašką  $\lambda$  žymėti pasirinkta spalva, jei aibė  $A(\lambda)$  yra jungi, priešingu atveju tašką žymėsime kita spalva. Teisinga tokia teorema:

**7.1 Teorema** Tarkime, kad spaudžianti IAS  $\{X; \omega_1, \omega_2\}$  turi atraktorių  $A$ . Be to tarkime, kad transformacijos  $\omega_1, \omega_2$  yra injekcijos, į aibę  $A$ . Jei

$$\omega_1(A) \cap \omega_2(A) = \emptyset,$$

tai aibė  $A$  yra visiškai nejungi. Jei

$$\omega_1(A) \cap \omega_2(A) \neq \emptyset,$$

tai atraktorius  $A$  yra jungi aibė.

Šios teoremos neįrodysime, tik pastebėsime, kad šios teoremos įrodymas panašus į 4.6 teoremos įrodymą.

**Apibrėžimas** Tarkime, kad duota IAS  $\{X; \omega_1, \omega_2\}$ , kuri priklauso nuo parametrų, iš erdvės  $P \subset \mathcal{R}^2$ . Tarkime, kad  $A(\lambda)$  yra šios IAS atraktorius. Tada parametrų erdvės aibė  $\mathcal{M} \subset P$ , kurios elementai turi savybę:

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in P; A(\lambda) \text{ yra jungi}\}$$

yra vadinama IAS -os Mandelbroto aibe.

Iš pradžių aptarsime atskirų IAS arba dinaminių sistemų Mandelbroto aibes. Todėl kiekvieną kartą, prieš pradėdami jas nagrinėti, mes nurodysime IAS (arba dinamines sistemas) apie kurias kalbėsime.

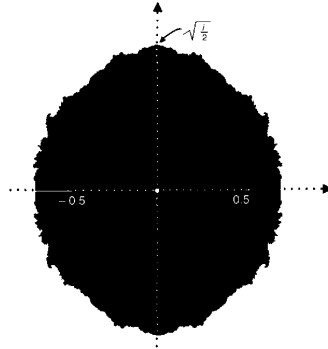
Pradėsime nuo tokios IAS:

$$(1) \quad \{\mathcal{C}; \lambda z - 1, \lambda z + 1\},$$

čia  $P = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}; |\lambda| < 1\}$ . 7.1 pav. yra vaizduojama minėtosios IAS Mandelbroto aibė  $\mathcal{M}$ . Juoda spalva yra pavaizduotos parametro  $\lambda$  reikšmės, su kuriomis IAS atraktorius yra visiškai neįjungti aibė, o balta spalva – minėtoji Mandelbroto aibė. Kitaip tariant, nurodytoje srityje surinktos visos parametro  $\lambda$  reikšmės, su kuriomis (1) IAS atraktorius yra įjungti aibė. Pateiksime algoritmą, kurio dėka būtų galima gauti, (1) IAS-os Mandelbroto aibės vaizdą.

Raide  $O$  žymėsime kompleksinį skaičių  $0 + 0i$ . 1) Pradžioje parenkame natūralųjį skaičių  $L$ . Šis skaičiaus vaidmuo toks pat, kaip ir *stabdymo skaičiaus*  $N$  kintamojo laiko algoritme.

2) Fiksuokime parametrų aibę  $P = \{\lambda \in \mathcal{C}; |\lambda| < 1\}$ . Tai galime išvaizduoti ir kaip skritulį monitoriuje. Sekančiuose žingsniuose kiekviena  $\lambda$  reikšmė yra išvedama į ekraną.



7.1 pav.

3) Tarkime, kad parinktam  $\lambda$  radome atraktorių  $A(\lambda)$ . Parinkime rutulį, kurio centras koordinatinių pradžios taške, tokį, kad

$$A(\lambda) \subset B(O, R),$$

čia  $R$  yra rutulio spindulys.

4) Tegū  $W = \omega_1 \cup \omega_2$ . Raskime:

$$H = \min \{d(x, y); x \in \omega_1(W^L(\{O\})), y \in \omega_2(W^L(\{O\}))\}.$$

Jei  $H \leq 2|\lambda|^{L+1}R$ , tai tada taškas  $\lambda \in \mathcal{M}$  ir jį galime atitinkamai spalvinti.

Paskutinis žingsnis pagrįstas tokiais samprotavimais: IAS atraktorius priklauso aibei

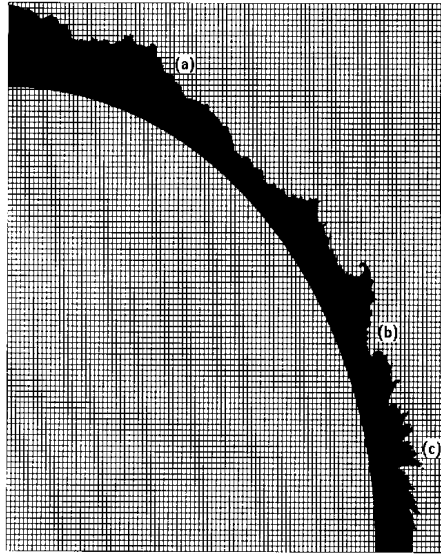
$$W^{(L+1)}(B(O, R)),$$

o pastaroji sudaryta iš  $2^{(L+1)}$  rutulių, kurių spinduliai yra lygūs  $|\lambda|^{L+1}R$ , sąjungos. Šių rutulių centrai priklauso aibei

$$\omega_1(W^L(\{O\})) \cup \omega_2(W^L(\{O\})).$$

Ir tada, kai  $H$  yra didesnis negu  $2|\lambda|^{L+1}R$ , tai atraktorius  $A(\lambda)$  yra neįjungti aibė.

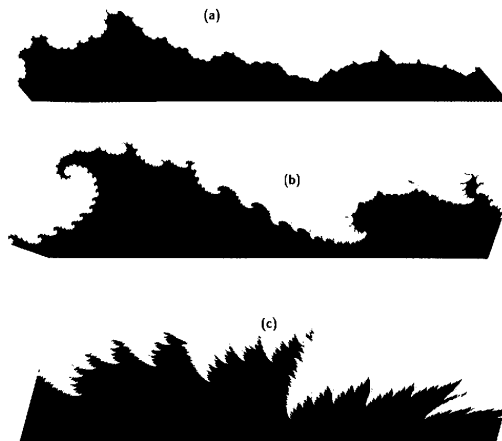
7.2 pav. yra pavaizduotas vienas, 7.1 pav. pateiktos Mandelbroto aibės, ketvirtis. 7.3 pav. yra dar labiau išryškinta Mandelbroto aibės siena ties nurodytais 7.2 pav. taškais a), b), c). Be įrodymo pateiksime tokią teoremą:



7.2 pav.

**7.2 Teorema** (1) IAS-os atraktorius  $A(\lambda)$  yra visiškai nejungti aibė, jei  $|\lambda| < \frac{1}{2}$  ir jungti, jei  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1$ . Šios IAS Mandelbroto aibės siena yra aibėje

$$\frac{1}{2} \leq |\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



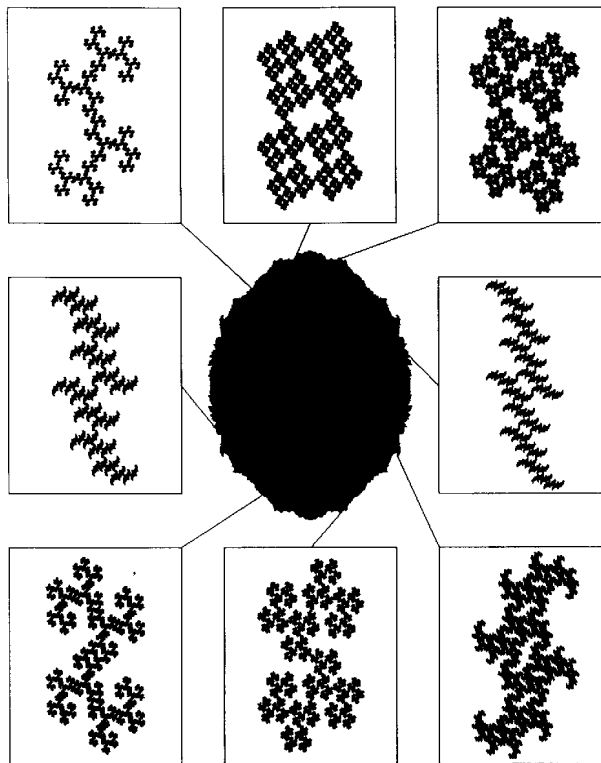
7.3 pav.

7.4 pav. pateikiami IAS

$$\{\mathcal{C}; \lambda z - 1, \lambda z + 1\}$$

fraktalai, kai parametrai  $\lambda$  parenkami netoli Mandelbroto aibės sienos.

Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad egzistuoja panašumas tarp sienos vaizdo, iš kurios imama parametro  $\lambda$  reikšmė, ir fraktalo, atitinkančio šią parametro reikšmę. Apie tai kiek plačiau kalbėsime kiek vėliau.



7.4 pav.

## 7.2 Julijaus ir Mandelbroto aibių ryšys

Šiame skyrelyje apsiribosime dinaminės sistemos

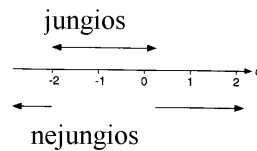
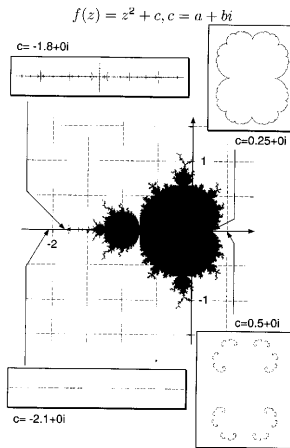
$$(2) \quad \{\bar{\mathcal{C}}; f_\lambda(z) = z^2 - \lambda\},$$

čia  $P = \mathcal{C}$ , nagrinėjimu. Paskutinioji IAS yra taikoma fizikinių bei biologinių sistemų modeliavimui. Tiksliau kalbant, minėtųjų sistemų iliustravimui, naudojant kompiuterinę grafiką.

(2) dinaminės sistemos Mandelbroto aibe  $\mathcal{M}$  vadinsime

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in P; J(\lambda) \text{ yra jungi } \}.$$

Prisiminkime, kad transformacijos  $f_\lambda(z)$  Julijaus aibė  $J(\lambda)$  yra simetriška koordinatinių pradžios taško  $O$  atžvilgiu. Beje, taškas  $O$  yra nagrinėjamos dinaminės sistemos nejudamas, pritraukiantysis taškas. 7.5 pav. yra pateikta šios dinaminės sistemos Mandelbroto aibė. Skaitytojui siūlome atkreipti dėmesį į tai, kokioms  $c$  reikšmėms Julijaus aibės yra susijusios, o kokioms ne.



**7.5 pav.**

**7.3 Teorema** *Dinaminės sistemos (2) Julijaus aibė yra jungi tik tada, kai taško  $O$  orbitos yra aprėžtos.*  
*Simboliškai*

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in P; |f_\lambda^n(O)| < \infty, n \rightarrow \infty\}.$$

Remdamiesi paskutiniąja teorema Mandelbroto aibę galime apibrėžti ir taip:

$$\mathcal{M} = \{\lambda \in \mathcal{C}; \lambda \rightarrow \lambda^2 - \lambda \rightarrow \dots \text{ yra aprėžta } \}.$$

Beje, pastarasis apibrėžimas labai panašus į transformacijos konvergavimo aibės apibrėžimą.

Aptarkime algoritmą, kurio dėka, naudodami kompiuterinę grafiką, galėtume plokštumoje nubraižyti Mandelbroto aibę.

Visų pirma atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei parametras  $|\lambda| > 2$  (žr. skyrelį apie Julijaus aibes), tai iteracijų seka  $f_\lambda^n(O)$  yra neaprėžta. Vadinasi, Mandelbroto aibei nepriklauso plokštumos taškai  $|z| > 2$ . Jei parametrus imsime iš šios aibės, tai transformacijos Julijaus aibės bus visiškai nejungios. 7.3 Teoremoje yra pateiktas atsakymas- kaip teoriškai nustatyti transformacijos Mandelbroto aibę. Tačiau akivaizdu, kad norėdami pritaikyti šią teoremą praktiniams poreikiams mes turime begalinius sąryšius šiek tiek "prikirpti." Kitaip tariant mes turime susitarti- nuo kada laikysime, kad pradinio taško orbita yra neaprėžta.

Apibrėžkime aibę

$$(3) \quad M_k = \{\lambda \in \mathcal{C}; \left| \frac{\log_2 |z_l|}{2^l} \right| \leq 2^k, z_0 = \lambda\},$$

čia  $z_{l+1} = z_l^2 + \lambda$ ,  $l = 0, 1, \dots, k \in \mathcal{Z}$ .

Tarkime, kad  $R$  yra skritulys, kurio spindulys ne mažesnis už 2. Pažymėkime

$$T^{(-k)}(R) = \{\lambda \in \mathcal{C}; z_k \in R, z_0 = \lambda\}, k = 0, 1, \dots$$

Nesunku įsitikinti, kad, jei taškas  $z_k \in R$ , tai ir  $z_l \in R$ , kai  $l = 0, 1, \dots, k - 1$ . Taigi, iš pastarųjų apibrėžimų išplaukia, kad aibei  $T^{(-k)}(R)$  priklauso tos parametro  $\lambda$  reikšmės, kurios atlikus pirmąsias  $k$  iteracijas, pasilieka aibėje  $R$ . Taip apibrėžta aibė  $T^{(-k)}(R)$  yra aibės  $\mathcal{M}$  aproksimacija. Kuo skaičius  $k$  didesnis, tuo aibė  $T^{(-k)}$  yra arčiau (hausdorfo metrikos prasme) prie aibės  $\mathcal{M}$ . Susitarkime žymėti  $T^{(0)}(R) = R$ . Aišku, kad  $\mathcal{M} \subset T^{(-k)}(R)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , be to, aibių seka

$$\{T^{(-k)}(R)\}$$

yra mažėjanti. Kiekviena mažėjanti seka turi ribą. Vadinasi,

$$\mathcal{M} = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{(-k)}.$$

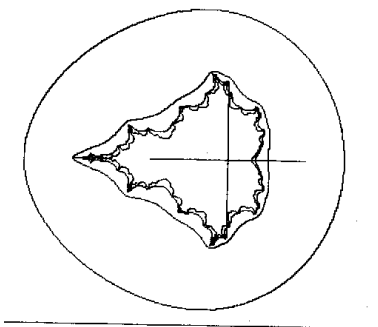
Iki šiol nagrinėtasis skritulys  $R$  nebuvo griežtai nusakytas. Pasirinkime skritulį plokštumoje tokiu būdu:

$$D^l = \{z; \log_2 |z| \leq 2^l\}, l = 0, 1, 2.$$

Apibrėžkime  $M_k = \lim_{l \rightarrow \infty} T^{(k-l)}(D^l)$ . Suteikime šiai formulei patogesnę pavidalą. Mes žinome, kad  $\lambda \in T^{(k-l)}(D^l)$ , jeigu  $\log_2 |z_{l-k}| \leq 2^l$ . Paskutiniąją nelygybę galime perrašyti ir taip:

$$\log_2 \frac{|z_{l-k}|}{2^{l-k}} \leq 2^k.$$

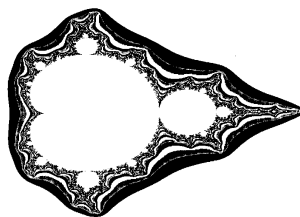
Akivaizdu, kad, jei  $l \rightarrow \infty$ , tai ir  $l - k \rightarrow \infty$ . Iš pastarųjų samprotavimų mes gauname (3) formulę aproksimacinėms aibėms  $M_k$  skaičiuoti. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad, jei  $k$  yra didelis, tai gana daug plokštumos taškų, atliekant iteraciją  $z \rightarrow z^2 + \lambda$ , pasilieka aibėje  $M_k$ . Tuo tarpu, jei  $k \in \mathcal{Z}$ , bet  $k$  yra neigiamas ir didelis absoliutine reikšme, tai gaunamos aibės geometrija artima Mandelbroto aibei. 7.6 pav. yra pateiktas pavyzdys, kai  $k \in [-10, 0]$ . Šio skyrelio pabaigoje norėtume pastebėti, kad (3) formulė yra teorinio pobūdžio, todėl tiesiogiai ją taikyti praktikoje negalėsime. Praktiškai naudodami šią formulę mes turime pasirinkti natūralųjį skaičių  $m$  tokį, kad, jei sekos  $\{z_n\}$   $m$ -asis narys priklauso aibei  $R$ , tai laikysime, kad  $\lambda \in T^{(-m)}(R)$ , o pastarąją aibę laikysime aibės  $R$  aproksimacija.



7.6 pav.

Nagrinėsime (1) dinaminę sistemą. Apibrėžkime konvergavimo ir divergavimo aibes tokiu būdu:

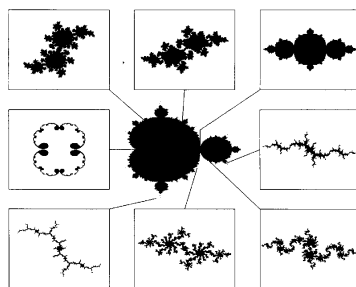
$$W = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}; |\lambda_1|, |\lambda_2| \leq 2\}, V(R) = \{z \in \mathcal{C}; |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$



7.7 pav.

Yra žinoma, kad iteracinės sekos  $\{f_\lambda^n(z)\}$  orbitos yra neaprežtos, jeigu jos kertasi su aibe  $V(R)$ , kai  $R > 0.75 + |\lambda|$ . 7.7 pav. yra pateiktas Mandelbroto aibės vaizdas, kai  $R = 10$ . Baltai centrinei sričiai priklauso tos  $\lambda$  reikšmės, kurioms sekos  $\{f_\lambda^n(O)\}$  pirmieji  $N$  nariai (čia  $N$  yra iteracijos stabdymo skaičius) nepasiekia srities  $V(R)$ . Taigi, minėtoji balta sritis reprezentuoja (1) dinaminės sistemos Mandelbroto aibę. Sekanti, mišrių spalvų sritis, atstovauja  $\lambda$  reikšmėms, kurioms atitinkančios dinaminės sistemos  $\{f_\lambda^n(O)\}$  orbitos kerta aibę  $V(R)$ , kai iteracijos numeriai  $n \leq N$ . Kuo sritis labiau nutolusi nuo centro (hausdorfo metrikos prasme) tuo taško  $O$  iteracijos greičiau pasiekia aibę  $V(R)$ .

Pastebėsime dar keletą įdomių faktų. Skaitytojas tikriausiai jau atkreipė dėmesį į tai, kad, jei parametras priklauso Mandelbroto aibės sienai (praktiškai yra arti sienos), tai tuomet tas parametro reikšmės atitinka Julijaus aibės  $J_f$ , kurias generuoja (1) dinaminė sistema. Beje, jau esame minėję, kad sritis, iš kurios parenkame parametro  $\lambda$  reikšmes yra "panaši" į aibės  $J_f$  geometriją. Žinoma, vizualiai to pastebėti neįmanoma. 7.8 pav. yra nurodytos Julijaus aibės  $J_{f_\lambda}$ , kurias gauname parinkę nurodytu būdu parametro  $\lambda$  reikšmes.



7.8 pav.

### 7.3 Kintamo laiko algoritmo taikymas fraktalų šeimos, priklausančios nuo parametro, grafinio vaizdo nustatymui

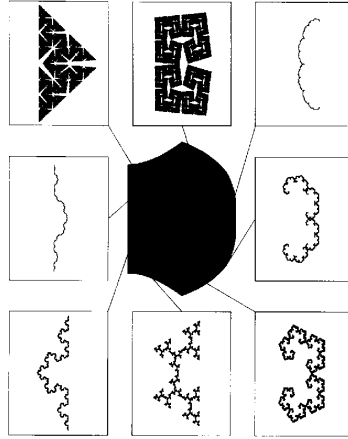
Šiame skyrelyje mes pateiksime bendrą algoritmą, kurį taikant, galima nustatyti bet kokios IAS Mandelbroto aibę. Nagrinėsime tokią IAS:

$$(4) \quad \{\mathcal{C}; \omega_1(z) = \lambda z + 1, \omega_2(z) = \lambda^* z - 1\}, P = \{\lambda \in \mathcal{C}; |\lambda| < 1\},$$

čia  $\lambda^*$  yra parametro  $\lambda$  kompleksinis jungtinis skaičius. Pastebėsime, kad (4) IAS-os abi transformacijos yra panašumo atvaizdžiai, kurių mastelis yra  $|\lambda|$ .

**7.4 Teorema** (4) IAS-os Mandelbroto aibė  $\mathcal{M}$  yra jungi. Šios aibės sieną sudaro skaiti glodžių kreivių sąjunga.

7.9 pav. tamsia spalva vaizduojamas (4) IAS Mandelbroto aibės papildinys. Mandelbroto aibės siena yra glodi. Šiame pat pav. pavaizduoti įvairūs fraktalai, kuriuos atitinka nurodytos parametro  $\lambda$  reikšmės.



7.9 pav.

Pateiksime šios IAS Mandelbroto aibės "žemėlapi". Pažymėkime (4) IAS-os atraktorių  $A(\lambda)$ . Yra įrodyta, kad šis atraktorius yra simetriškas  $y$  ašies atžvilgiu. Antra vertus, parametro  $\lambda$  reikšmės priklauso Mandelbroto aibei tik tada, kai  $A(\lambda)$  kerta  $y$  ašį. (4) IAS atitinkančią dinaminę sistemą galime apibrėžti tokiu būdu:

$$(5) \quad f_{\lambda}(z) = \begin{cases} \omega_1^{-1}(z), & \text{jei } \operatorname{Re} z \geq 0; \\ \omega_2^{-1}(z), & \text{jei } \operatorname{Re} z < 0; \end{cases}$$

Pastebėsime, kad paskutiniosios transformacijos kiekvienam fiksuotam  $\lambda$ , atraktorius yra jungi aibė. Tokiu būdu mes faktiškai apibrėžiame dinaminę sistemą  $\{C; f_{\lambda}\}$  ir aibė  $A(\lambda)$  yra atstumiančioji dinaminės sistemos aibė. Taigi dinaminė sistema gali būti naudojama atraktoriaus  $A(\lambda)$  vaizdui nustatyti, taikant KLA. Žemiau pateikiamas algoritmas, kurio gaunamas dinaminės sistemos šeimos  $\{\mathcal{R}^2; f_{\lambda}, \lambda \in P\}$  "žemėlapis". Čia  $f_{\lambda}$  yra bet kokia dinaminė sistema.

1) Pradžioje parenkamas *stabdymo skaičius*  $N$ . Turime parinkti tašką  $q \in \mathcal{R}^2$  tokį, kad  $q \in A(\lambda)$ , kokioms nors parametro  $\lambda \in P$  reikšmėms (nebūtinai visoms).

2) Parinkime rutulį  $B \subset \mathcal{R}^2$  tokį, kad kiekvienai parametro reikšmei iš  $\lambda \in P$ ,  $A(\lambda) \subset B$ . Apibrėžiame divergavimo sritį tokiu būdu:

$$V = \mathcal{R}^2 \setminus B.$$

3) Fiksuokime parametrų erdvę  $P$  ir tuo pačiu nurodykime ją monitoriaus ekrane.

4) Skaičiuokime seką

$$\{f_{\lambda}^n(q); n = 0, 1, \dots, N\},$$

čia  $N$  stabdymo skaičius. Taškas  $\lambda$  yra spalvinamas tam tikra spalva, kurią parenkame priklausomai nuo  $n$ , jei

$$(6) \quad f_{\lambda}^n(q) \in V.$$

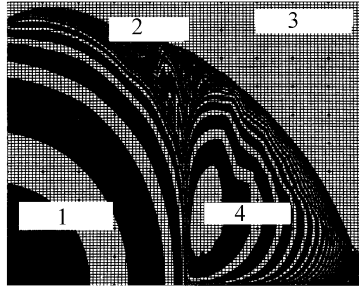
Beje,  $n$  yra pirmoji reikšmė kuriai teisingas (6) sąryšis. Jei visiems  $n \leq N$ , tai taškas  $\lambda$  spalvinamas juodai.

Taikant šį algoritmą (5) dinaminei sistemai, kai  $q = 0$ , gauname vaizdą, vaizduojamą 7.10 pav. Taško  $O$  aplinka yra pažymėta koncentruota juoda spalva (1), pav. kairiojo kampo apačioje. Dešiniojo kampo viršutinė dalis (3) vaizduoja  $P \setminus \mathcal{M}$  sritį, kurios taškus atitinkantys atraktoriai arba visiškai nejungūs, arba besiliečiantys. Dešinioji apatinė (4) sritis yra dar neišnagrinėta. Tuo tarpu viršutinės (2) srities taškai atstovauja atraktoriaus, kurie vaizduojami 7.10 pav. Beje, 7.10 pav. pateikiamas padidintas "lango", kurio matmenys yra tokie,

$$\lambda_1 \in [0.4123, 0.4139; \lambda \in [0.6208, 0.6223],$$

vaizdas.





7.10 pav.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad (4) IAS-os Mandelbroto aibė nėra labai išraiškinga. Tuo tarpu šią sistemą atitinkančios dinaminės sistemos vaizdas (7.11 pav.), gautas KLA-u pagalba, yra išraiškingesnis šia prasme, kad šio grafinio vaizdo padidinta dalis turi tą pačią fraktalinę struktūrą, kaip ir dinaminės sistemos, kuri gaunama iš tos srities paėmus parametro  $\lambda$  reikšmę, atraktorius. Pavyzdžiui, 7.12 pav. yra 7.10 paveikslo (2) srities padidintas vaizdas. Šios srities parametro reikšmę  $\lambda$  atitinkančio atraktoriaus vaizdas, gautas naudojant KLA, pateiktas 7.13 pav.

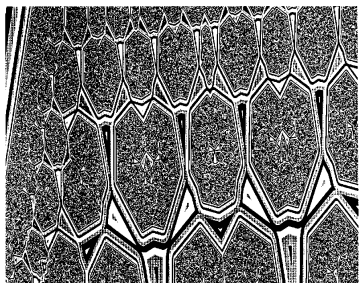


7.11 pav.

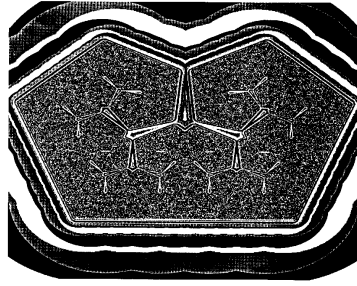
Šiame skyrelyje pateiktas algoritmas gali būti pritaikytas gana plačiai dinaminių sistemų šeimai. Tarkime, kad  $\lambda \in P \subset \mathcal{R}^2$ . Tarkime, kad  $X \subset \mathcal{R}^2$  yra kompaktiška aibė, o transformacija  $f_\lambda : X \rightarrow \mathcal{R}^2$  yra tolydi ir, be to,  $f_\lambda \supset X$ . Tuomet transformacija  $f_\lambda$  turi invariantinę aibę  $A(\lambda) \in H(X)$ , kurią galime išreikšti tokiu būdu:

$$A(\lambda) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda^{(n)}(X).$$

$A(\lambda)$  yra sudaryta iš tų aibės  $X$  taškų, kurių orbitos aprėžtos.



7.12 pav.



7.13 pav.

### Uždaviniai

1. Tarkime, kad duota transformacija  $f(x) = ax(1-x)$ ,  $a \geq 1$ . Įsitikinkite, naudodami grafinę iteraciją, kad šios transformacijos konvergavimo aibė yra susijusi, jeigu šios transformacijos maksimali reikšmė priklauso intervalui  $[0.25, 1]$ . Nurodykite invariantinį intervalą. Be to įsitikinkite, kad konvergavimo aibė yra visiškai nesusijusi, jeigu transformacijos maksimali reikšmė didesnė už 1. Ar nurodyta transformacija turi konvergavimo taškų intervalo  $[0, 1]$  papildinyje?
2. Kokia transformacijos  $f(x) = 6(0.5 - |x - 0.5|)$  maksimali reikšmė? Koks divergavimo intervalo intervalo ilgis, jeigu  $D(f) = [0, 1]$ .
3. Naudodami "dėžės testą" nustatykite transformacijos  $f(x) = x^2 - 0.75$  maksimalų intervalą. Raskite šios transformacijos grafiko ir transformacijos  $y = x$  grafiko bendrus taškus.
4. Tarkime duota transformacija  $f(x) = x^2 + c$ . Raskite kritinę  $c \in [-1, -4]$  reikšmę, nuo kurios priklauso taško 0 priklausomybė aibėms  $D_f$  ir  $K_f$ . Kokioms  $c$  reikšmėms narinėjamos Julijaus aibės yra susiję, o kokioms visiškai nesusiję?