V. ADRESAI FRAKTALUOSE. DINAMINĖS SISTEMOS

5.1 Taško adresas fraktale

Pirmą kartą, su fraktalo taškų adresavimo problema, susidūrėme konstruodami Kantoro aibę. Panagrinėkime šią problemą detaliau.

Priminsime, kad aibę S vadiname skaičia, jeigu ji ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei. Kitais atvejais ji arba baigtinė arba begalinė ir neskaiti.

Žinome, kad fraktalinės aibės nėra skaičios. Todėl numeruojant šių aibių elementus negalime naudoti natūraliųjų skaičių aibės. Apibrėšime neskaičią (kontinumo galios) aibę, kuria naudodamiesi spręsime fraktalinės struktūros taškų "adresavimo" problemą.

Fiksuokime N pirmųjų natūraliųjų skaičių. Sudarykime begalines sekas

$$x = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, \dots, \quad x_{i_j} \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Šių sekų aibę žymėsime simboliu Σ_N. Pastaroje aibėje apibrėžkime metriką tokiu būdu:

$$\rho_\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}, \tag{1}$$

čia $x, y \in \Sigma_N$. Tada (Σ_N, ρ_Σ) yra metrinė erdvė. Šią metrinę erdvę vadinsime *Kodų erdve.* Jeigu kodų aibės elementams sudaryti yra naudojami N simbolių, tai sakysime, kad kodų aibė apibrėžta $N-$ ainėje skaičiavimo sistemoje.

5.1 Teorema *Kodų aibė Σ yra neskaiti.*

$\ominus$

Tarkime, kad kodų aibė apibrėžta dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, naudojant simbolius 0 ir 1. Apibrėžkime funkciją $f : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$ tokiu būdu: $f(0) = 1, f(1) = 0$. Be to, tarkime priešingai, t.y., kad ši aibė skaiti. Vadinasi egzistuoja bijekcija $g : \mathcal{N} \longrightarrow \Sigma$. Apibrėžkime $\sigma \in \Sigma$ taip: $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$, ir čia, $\sigma_n = f((g(n))_n)$, čia $g(n)_n$ reiškia $n-$ ąjį $g(n)$ simbolį. Pastebėkime, kad g yra "numeruojanti", aibės Σ elementus, funkcija. Kokį numerį ši funkcija priskiria taškui σ? Pasirodo, kad nė vienam $n \in \mathcal{N}, g(n) \neq \sigma$. Pavyzdžiui, $g(3) \neq \sigma$, kadangi šių sekų tretieji simboliai skirtingi.

$\oplus$

Tarkime, kad duota IAS $\{X; \omega_1, \dots, \omega_n\}$. Be to, tegu $f : \Sigma \longrightarrow X_0$ yra bijekcija, čia X_0 yra IAS atraktorius. Tada sakysime, kad IAS yra *asocijuota su kodų erdve.*

Sakysime, kad metrinė erdvė X *susieta su kodų erdve* Σ, jeigu egzistuoja bijekcija $f : \Sigma \to X$.

5.1 Lema *Sakykime, kad $\{X; \omega_n,\ n = 1, \dots, N\}-$ IAS pilnoje metrinėje erdvėje (X, ρ). Tegu aibėje $K \in H(X)$, IAS yra spaudžianti. Tuomet egzistuoja aibė $L \in H(X)$, $K \subset L$ tokia, kad visos IAS transformacijos uždaros šioje aibėje, t.y.*

$$\omega_n : L \longrightarrow L,\ n = 1, \dots, N.$$

Kitaip tariant,

$$\{L; \omega_n,\ n = 1, \dots, N\}$$

yra IAS, kuriai priklauso pradinė kompaktiška aibė K.

$\ominus$

Tegu $W : H(X) \longrightarrow H(X)$, čia

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B),\ B \in H(X).$$

Norėdami sukonstruoti aibę L, panagrinėkime IAS su sankaupos aibe K,

$$\{X, \omega_n,\ n = 0, 1, \ldots, N\},$$

čia $\omega_0(K) = K$. Tada šios IAS atraktorius priklauso $H(X)$ (4.4 Teorema).

Parinkime

$$L = K \bigcup W^1(K) \bigcup W^2(K) \bigcup, \ldots, \bigcup W^n(K), \ldots.$$

Akivaizdu, kad $K \subset L$ ir, be to, $W(L) \subset L$.

$\oplus$

5.2 Lema *Tarkime, kad duota IAS $\{X; \omega_n; n = 1, \ldots, N\}$ metrinėje erdvėje (X, ρ), kurios sąspūdžio koeficientas s. Tarkime, kad (Σ, ρ_Σ) yra kodų aibė susieta su šia IAS. Visiems $\sigma \in \Sigma,\ n \in \mathcal{N},\ x \in X$, apibrėžkime*

$$\psi(\sigma, n, x) = \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n}(x), \quad \sigma_i \in \{0, 1\}.$$

Be to, tarkime, kad $K \subset X$ kompaktiška, netuščia aibė. Tuomet egzistuoja realus skaičius D toks, kad

$$\rho\big(\psi(\sigma, m, x_1), \psi(\sigma, n, x_2)\big) \le D s^{m \wedge n},\ \sigma \in \sum, n, m, \in \mathcal{N},\ x_1, x_2 \in K.$$

$\ominus$

Konstruokime aibę L tokiu pat būdu, kaip ir 5.1 Lemoje. Tarkime, kad $m < n$. Pastebėkime, kad

$$\psi(\sigma, n, x_2) = \psi\big(\sigma, m, \psi(\omega, n - m, x_2)\big),$$

kur $\omega = \sigma_{n-m+1}\sigma_{n-m+2} \ldots \sigma_n \ldots \in \sum$.

Tegu $x_3 = \psi(\omega, n - m, x_2)$. Tada $x_3 \in L$. Be to

$$\rho\big(\psi(\sigma, m, x_1), \psi(\sigma, n, x_2)\big) = \rho\big(\psi(\sigma, m, x_1), \psi(\sigma, n, x_3)\big) =$$

$$s\rho(\omega_{\sigma_2} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_m}(x_1), \omega_{\sigma_2} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_m}(x_3) \le$$

$$s^2\rho(\omega_{\sigma_3} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_m}(x_1), \omega_{\sigma_3} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_m}(x_3) \le s^m \rho(x_1, x_3) \le s^m D,$$

čia $D = \max\{\rho(x_1, x_3); x_1, x_2 \in L\}$. Kadangi L kompaktiška, tai D baigtinis.

$\oplus$

5.2 Teorema *Sakykime, kad $(X, \rho)-$ pilna metrinė erdvė. Be to, tarkime, kad $\{X, \omega_n; n = 1, \ldots, N\}$ IAS šioje erdvėje. Tegu, A yra šios IAS atraktorius, o*

$$(\Sigma, \rho_\Sigma)$$

kodų erdvė susieta su minėtąja metrine erdve.

Jeigu visiems

$$\sigma \in \Sigma,\ n \in \mathcal{N}, x \in X,\ \psi(\sigma, n, x) = \omega_{\sigma_1} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n}(x),$$

tai riba

$$\psi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} \psi(\sigma, n, x) \in A$$

egzistuoja ir nepriklauso nuo $x \in X$. Tuo atveju, kai K bet kuri erdvės X kompaktiška aibė, tai pastaroji riba konverguoja tolygiai aibėje K. Be to, atvaizdis $\psi : \Sigma \longrightarrow A$ yra tolydus ir siurjektyvus.

$\ominus$

Sakykime, kad $x \in X$ ir $K \in H(X)$ yra kompaktas, kuriam priklauso taškas x. Konstruokime kompaktišką aibę L kaip ir 5.1 Lemoje. Tegu $W : H(X) \longrightarrow H(X)$ apibrėžtas įprastiniu būdu. Žinome, kad W yra S.A. metrinėje erdvėje $(H(X), h(d))$. Tuomet išplaukia, kad

$$A = \lim_{n\to\infty} \{W^n(K)\},$$

be to, $\{W^n(K)\}$ yra Koši seka fraktalų erdvėje.

Pastebėkime, kad seka

$$\{\psi(\sigma, n, x)\},$$

bet kokiai fiksuotai σ reikšmei yra Koši seka, nes iš 5.2 Lemos išplaukia, kad

$$\rho\big(\psi(\sigma, m, x), \psi(\sigma, n, x)\big) \leq Ds^{m\wedge n},$$

o paskutiniosios nelygybės dešinioji pusė nykstamas dydis, kai m ir n neaprėžtai auga, be to, dešinioji pusė nepriklauso nuo x. Kadangi $\psi(\sigma, n, x) \in W^n(K)$, tai naudodamiesi fraktalų erdvės pilnumu gauname, kad riba

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\sigma, n, x)$$

egzistuoja ir priklauso aibei A.

Parodykime, kad atvaizdis $\psi : \sum \longrightarrow A$ yra tolydus. Tarkime, kad $\epsilon > 0$. Parinkime n tokį, kad $s^n D < \epsilon$ ir be to σ ir $\theta \in \Sigma$ tokius, kad

$$\rho_\Sigma(\sigma, \theta) < \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^m} = \frac{1}{(N+1)^{n+1}}.$$

Vadinasi, šiuo atveju pirmieji n, σ nariai sutampa su atitinkamais θ nariais, t.y. $\sigma_1 = \theta_1, \dots \sigma_n = \theta_n$. Tada

$$\rho\big(\psi(\sigma, m, x), \psi(\theta, m, x)\big) = \rho\big(\psi(\sigma, n, x_1), \psi(\sigma, n, x_2)\big)$$

visiems $x_1, x_2 \in L$, kai tik $m \geq n$. Remdamiesi 5.2 Lema, gauname, kad paskutiniojo reiškinio dešinioji pusė mažesnė už $s^n D$ ir tuo pačiu už ϵ. Taigi, kai $m \to \infty$, tai $\rho\big(\psi(\sigma), \psi(\theta)\big) < \epsilon$. Gauname, kad atvaizdis ψ tolydus. Parodykime, kad jis ir siurjektyvus. Sakykime, kad $a \in A$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\{x\}) \in A,$$

ir tegu seka

$$\{\theta^{(n)} \in \Sigma; n = 1, \dots\}$$

yra tokia, kad riba

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\theta^{(n)}, n, x) =: a$$

egzistuoja. Erdvė (Σ, ρ_Σ) yra kompaktiška (įrodykite !), todėl seka $\{\theta^{(n)} \in \Sigma : n = 1, \dots\}$ turi konverguojantį posekį, kurio riba priklauso Σ. Sakykime, kad $\lim_{n\to\infty} \theta^{(n)} = \theta$. Tada $\theta^{(n)}$ ir θ sutampančių narių skaičius neaprėžtai auga, kai $n \to \infty$. Taigi,

$$\rho(\psi(\theta, n, x), \psi(\theta^{(n)}, n, x)) \leq s^{\alpha(n)} D,$$

čia $\alpha(n) = |\{j \in \mathcal{N} : \theta_k^{(n)} = \theta_k,\ 1 \leq k \leq j\}|$. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname, kad $\rho(\psi(\theta), a) = 0$. Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad $\psi(\theta) = a$. Bet $a \in A$ buvo parinktas laisvai, todėl atvaizdis $\psi : \Sigma \longrightarrow A$ yra siurjektyvus.

$\oplus$

Tarkime, kad $\{X; \omega_n, n = 1, \ldots N\}$ IAS, asocijuota su kodų erdve Σ. Turime, kad atvaizdis $\psi : \Sigma \longrightarrow A$ yra tolydus ir siurjektyvus, čia A yra IAS atraktorius. Tada taško $a \in A$ *adresu* vadinsime $\sigma \in \Sigma$, tokį, kad $\psi(\sigma) = a$. Aibę

$$\psi^{-1}(A) = \{\theta \in \Sigma; \psi(\theta) \in A\}$$

vadinsime, atraktoriaus A elementų, *adresų aibe.*

Apibrėžimas *Sakysime, kad IAS yra visiškai nesusijusi, jeigu bet kuris šios IAS atraktoriaus taškas turi vienintelį adresą. IAS vadinsime besiliečiančia, (turinčia bendrą sieną), jeigu ši IAS nėra visiškai nesusijusi, be to jos atraktoriuje galime nurodyti netuščią atvirą aibę O tokią, kad*

1) $$\omega_i(O) \cap \omega_j(O) = \emptyset, \; i, j \in \{1, \ldots, N\}, i \neq j;$$

2) $$\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(O) \subset O.$$

Jeigu IAS nei visiškai nesusijusi, nei besiliečianti, tai ji vadinama persidengiančia.

5.3 Teorema *Sakykime, kad duota IAS $\{X; \omega_n, n = 1, \ldots, N\}$ yra spaudžianti, kurios atraktorius A. Tuomet IAS yra visiškai nesusijusi, jeigu*

$$\omega_i(A) \cap \omega_j(A) = \emptyset; \; i, j \in \{1, \ldots, N\}, i \neq j.$$

$\ominus$

Jeigu IAS visiškai nesusijusi, tai bet koks atraktoriaus taškas turi vienintelį adresą. Tarkime priešingai, t.y IAS nėra visiškai nesusijusi. Tuomet bent vienas taškas turi du skirtingus adresus. Bet tuomet du skirtingi pirmvaizdžiai turi tą patį vaizdą. Bet tai prieštarauja teoremos prielaidai.

$\oplus$

Parodysime, kad IAS $\{\mathcal{R}; \omega_1 = x/2; \omega_2 = x/2 + 1/2\}$ yra besiliečianti. Tarkime, kad A yra šios aibės atraktorius ir

$$O = \big((0, 0.5) \cap A\big) \cup \big((0.5, 1) \cap A\big).$$

Vadinasi $\omega_1(O) = (0, 0.25) \cup (0.25, 0.5)$, $\omega_2(O) = (0.5, 0.75) \cup (0.75, 1)$, kurios nesikerta. Be to

$$\bigcup_{i=1}^{2} \omega_i(O) \subset O.$$

Dar daugiau, O atvira aibėje A, nes ji atvirų aibių baigtinė sąjunga. Matome, kad abi apibrėžimo sąlygos 1), 2) išpildytos.

Parodysime, kad IAS $\{\mathcal{R}; \frac{x}{2}, 0.75x + 0.25\}$ yra persidengianti. Šios IAS atraktorius yra aibė $[0, 1]$. Matome, kad

$$\omega_1([0, 1]) = [0, 0.5], \; \omega_2([0, 1]) = [0.25, 1].$$

Be to

$$\omega_1([0, 1]) \cup \omega_2([0, 1]) = [0, 1].$$

Pastebėkime, kad egzistuoja atvira aibė $(0.25, 0.5)$ tokia, kad

$$(0.25, 0.5) \subset \omega_1(A) \cap \omega_2(A) = [0.25, 0.5]$$

Taigi ši IAS yra persidengianti.

Tuo tarpu IAS $\{[0,1];\omega_1(x)=\frac{x}{3},\omega_2(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$ yra visiškai nesusijusi. Aišku, kad atraktorius $A\subset[0,1]$ ir $\omega_1([0,1])=[0,\frac{1}{3}],\ \omega_2([0,1])=[\frac{2}{3},1]$. Be to

$$\omega_1([0,1]\cap\omega_2([0,1])=\emptyset.$$

Matome, kad

$$\omega_1(A)\cap\omega_2(A)\subset\omega_1([0,1])\cap\omega_2([0,1])=\emptyset.$$

Iš pastarųjų sąryšių išplaukia, kad IAS visiškai nesusijusi.

5.4 Teorema *Sakykime, kad Σ kodų erdvė, apibrėžta $N-$ ainėje skaičiavimo sistemoje. Tarkime, kad metrikos apibrėžtos tokiu būdu :*

$$\rho_{\Sigma_1}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{(N+1)^i},\ \rho_{\Sigma_2}1(x,y)=|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i-y_i}{(N+1)^i}|.$$

Tada erdvės (Σ,ρ_{Σ_1}) ir (Σ,ρ_{Σ_2}) yra ekvivalenčios.

$\ominus$

Tarkime, kad $N=10$. Fiksuokime kokius nors $x,y\in\Sigma$. Iš metrikų apibrėžimo išplaukia, kad

$$\rho_{\Sigma_2}(x,y)\le\rho_{\Sigma_1}(x,y).$$

Mes įrodysime, kad egzistuoja konstanta C tokia, kad

$$\rho_{\Sigma_2}(x,y)\ge\rho_{\Sigma_1}(x,y).$$

Parinkime $C=1/19$. Be to tarkime, kad kokiam nors $k\in\{1,2,\ldots\},\ x_1=y_1,\ldots,x_{k-1}=y_{k-1},x_k\neq y_k$. Tuomet

$$\rho_{\Sigma_2}(x,y)=|\sum_{i=k}^{\infty}\frac{x_i-y_i}{(11)^i}|\ge\frac{|x_k-y_k|}{11^k}-\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{(11)^i}\ge$$

$$\frac{|x_k-y_k|}{11^k}-\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{9}{11^i}=\left(|x_k-y_k|-\frac{9}{10}\right)\frac{1}{11^k}\ge\frac{1}{19}\left(|x_k-y_k|+\frac{9}{10}\right)\frac{1}{11^k}\ge$$

$$\frac{1}{19}\left(\frac{|x_k-y_k|}{11^k}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{9}{11^i}\right)\ge\frac{1}{19}\frac{|x_k-y_k|}{11^k}+\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{11^i}\right)\ge$$

$$\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{11^i}=\frac{1}{19}\rho_{\Sigma_1}(x,y).$$

$\oplus$

Remiantis šia teorema galime įrodyti, kad kodų erdvė metriškai ekvivalenti Kantoro aibei, kuri yra visiškai nesusijusi aibė. Siūlome šią užduotį skaitytojui. Galima naudoti tokią IAS $\{[0,1];\omega_n(x)=\frac{x}{N+1}+\frac{n}{N+1},\ n=1,\ldots,N\}$.

Sakykime, kad duota IAS $\{X;\omega_1,\ldots,\omega_N\}$, kurios atraktorius yra aibė A. Tašką $a\in A$ vadinsime *periodiniu tašku*, jeigu egzistuoja skaičių rinkinys $(\sigma(n);\sigma:\{1,\ldots,P\}\to\{1,\ldots,N\})$ toks, kad

$$a=\omega_{\sigma(P)}\circ\omega_{\sigma(P-1)}\circ\ldots\circ\omega_{\sigma(1)}(a).$$

Jeigu $a\in A$ yra periodinis taškas, tai mažiausias natūralusis skaičius P, kuriam teisinga paskutinioji lygybė, bus vadinamas taško a periodu. Kitaip tariant, atraktoriaus taškas yra periodinis, jeigu jį transformavę baigtinį skaičių kartų, vėl grįžtame į pradinę padėtį.

Sakykime, kad $a \in A$ yra periodinis taškas ir paskutiniojo apibrėžimo lygybė galioja šiam taškui. Tegu σ yra kodų erdvės elementas, apibrėžtas tokiu būdu:

$$\sigma = \sigma(P)\sigma(P-1)\ldots\sigma(1)\sigma(P)\sigma(P-1)\ldots = \overline{\sigma(P)\sigma(P-1)\ldots\sigma(1)}. \tag{2}$$

Kodų erdvės elementus, kuriuos galima užrašyti (2) lygybe, vadinsime periodiniais adresais. Kodas, kurio pradiniai simboliai bet kokie, o pradedant kuriuo nors simboliu, kodo dalis yra periodinė, vadinsime *beveik periodiniu simboliu.*

5.5 Teorema *Tarkime, kad IAS $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_N\}$, kurios atraktorius A. Tada žemiau pateikti teiginiai ekvivalentūs:*

1) $x \in A$ yra periodinis taškas;

2) $x \in A$ turi periodinį adresą.

$\ominus$

1) $\Rightarrow$ 2). Jei x periodinis, tai egzistuoja baigtinė transformacijų seka $\omega_{\sigma_1}, \ldots, \omega_{\sigma_n}$ tokia, kad

$$\omega_{\sigma_1} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n}(x) = x.$$

Apibrėžkime $f(x)$ tokiu būdu:

$$f(x) = f^m(x) = x = (\omega_{\sigma_1} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n}) \circ \ldots \circ (\omega_{\sigma} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n})(x),$$

čia paskutiniąją kompoziciją sudaro m vienodų grupių, tai tada x adresas- $\overline{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Tarkime, kad šis x adresas yra periodinis. Tada

$$x = \psi(\overline{\sigma_1 \ldots \sigma_n}) = \psi(\sigma_1 \ldots \sigma_n \overline{\sigma_1, \ldots \sigma_n}) = \omega_{\sigma_1} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n} \psi(\overline{\sigma_1 \ldots \sigma_n}) =$$

$$\omega_{\sigma_1} \circ \ldots \circ \omega_{\sigma_n}(x).$$

Taigi gavome, kad $x-$ periodinis taškas.

Tarkime, kad duota IAS $\{\mathcal{R}; \omega_1(x) = 0,\ \omega_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\}$. Rasime šios transformacijos visus periodinius taškus. Duotoji IAS turi sankaupos aibę $\{0\}$, todėl atraktorių galime užrašyti taip

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_2^n(0) \bigcup \{0\}.$$

Bet koks atraktoriaus taškas $p \in A$ yra periodinis, nes egzistuoja $k \in \mathcal{N}$ toks, kad $p = \omega_2^k(0)$. Iš tikrųjų,

$$p = \omega_2^k(\omega_1(p)) = \omega_2^k \circ \omega_1(p).$$

Be to matome, kad p yra $k+1$ periodinis. Visiškai nesusijusi IAS yra apverčiama, kadangi egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis tarp kodų aibės ir atraktoriaus taškų. Taigi, visi atraktoriaus taškai- periodiniai.

5.6 Teorema *IAS atraktorius sutampa su šios IAS periodinių taškų uždariniu.*

$\ominus$

Pastebėkime, kad kodų aibė yra periodinių kodų uždarinys. Sakykime, kad $\psi : \Sigma \longrightarrow A$, kur ψ tolydus atvaizdis iš metrinės erdvės į metrinę erdvę A, čia A IAS atraktorius. Jeigu $S \subset \Sigma$ toks, kad $\overline{S} = \Sigma$, tai išplaukia, kad $\overline{\psi(S)} = A$.

$\oplus$

5.2 Dinaminės sistemos

Apibrėžimas *Tarkime, kad* (X, ρ) *yra metrinė erdvė, o* $f : X \longrightarrow X-$ *transformacija. Tada dinamine sistema vadinsime porą* $\{X; f\}$. *Seką* $\{f^n(x), n \in \mathcal{N}\}$ *vadinsime taško* $x \in X$ *orbita.*

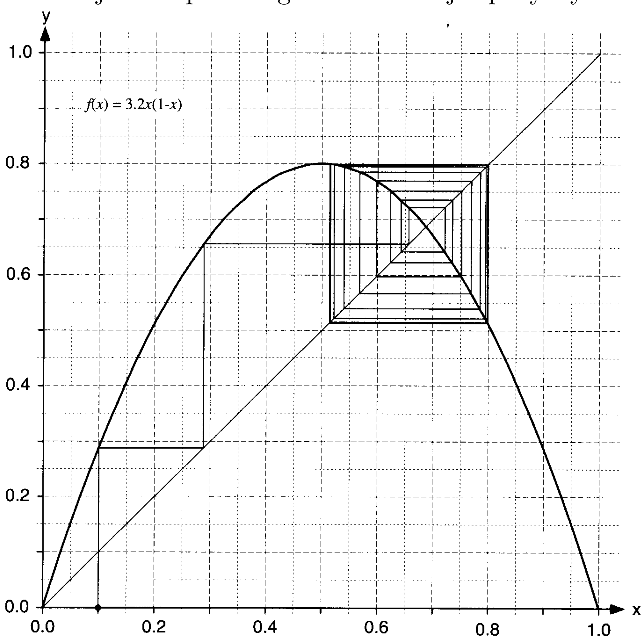
Tarkime, kad $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ apibrėžta lygybe

$$f(x_1x_2x_3\ldots) = x_3x_4\ldots.$$

Tada $(\sum, f)$ - dinaminė sistema.

Sakykime, kad $(X, f)-$ dinaminė sistema. Sakysime, kad erdvės taškas x yra periodinis, transformacijos f atžvilgiu, jeigu egzistuoja natūralusis skaičius n toks, kad $f^n(x) = x$. Mažiausią natūralųjį skaičių n, kuriam teisinga lygybė $f^n(x) = x$, vadinsime *taško periodu.* Periodinio taško orbitą vadinsime transformacijos f *ciklu* tame taške. Minimalus ciklo periodas yra skirtingų taškų skaičius, kuris priklauso šiam periodui. Ciklo elementų skaičių vadinsime šio *ciklo eile.*

Nurodysime algoritmą, kuriuo naudodamiesi galėsime grafiškai vaizduoti taškų orbitas. Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{\mathcal{R}; f(x)\}$. Ieškosime taško $x_0 \in \mathcal{R}$ orbitos, $\{x_n = f^n(x_0), n = 1, \ldots\}$. Paprastumo dėlei tarkime, kad $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Nubrėžkime kvadratą $\{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$, funkcijos $y = f(x)$ grafiką, bei tiesę $y = x$. Fiksavę plokštumos tašką (x_0, x_0), sujunkime jį atkarpa su tašku $(x_0, x_1 = f(x_0))$. Toliau elgsimės analogiškai. Sujungsime pastarąjį tašką su tašku (x_1, x_1), o paskutinįjį su tašku $(x_1, x_2 = f(x_1))$ ir taip toliau. Atlikę šią konstrukciją, gauname tiesės taškų seką $\{(x_n, y_n)\}$, kuri konverguoja į nejudamą transformacijos tašką. 5.1 pav. iliustruojamas aptartos grafinės iteracijos pavyzdys.



5.1 pav.

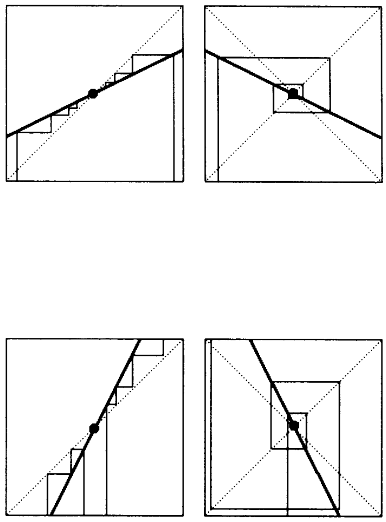
Tarkime, kad G_f yra transformacijos f grafikas. Jeigu taškas x_f yra nejudamas, dinaminės sistemos (X, f) taškas, tai $(x_f, x_f) \in G_f$.

Tarkime, kad x_f yra dinaminės sistemos (X, f) *nejudamas taškas.* Tašką x_f vadinsime *pritraukiančiu dinaminės sistemos tašku*, jeigu egzistuoja $\epsilon > 0$ toks, kad transformacija f rutulį $B(x_f, \epsilon)$ atvaizduoja į jį patį ir f yra suspaudžiantis atvaizdis šiame rutulyje

$$B(x_f, \epsilon) = \{y \in X; \rho(x_f, y) \leq \epsilon\}.$$

Tašką x_f vadinsime *atstumiančiu,* dinaminės sistemos tašku, jeigu egzistuoja $\epsilon > 0$ ir $c > 1$ tokie, kad

$$\rho(f(x_f), f(y)) \geq c\rho(x_f, x),\ y \in B(x_f, \epsilon).$$



5.2 pav.

Kaip būtų galima geometriškai atskirti ar nejudamas taškas yra atstumiantis ar pritraukiantis? Pasirodo, kad jei taške x_f, transformacijos grafiko liestinės krypties koeficiento absoliuti reikšmė yra didesnė už 1, tai šis nejudamas taškas yra atstumiantis, o jei absoliuti reikšmė mažesnė už vienetą, tai pritraukiantis. 5.2 yra pavaizduoti keli dinaminės sistemos grafinės iteracijos nariai, kai iteruojami taškai "netoli" pritraukiančiojo (viršutiniame pav.) ir atstumiančiojo taškų (apatiniame pav.).

Pritraukiantieji ir atstumiantieji dinaminės sistemos taškai dar yra skirtomi į klases priklausomai nuo to, ar grafinė iteracija yra "laiptuota" ar "spiralinė". Pastarosios galimybės taip pat vaizduojamos 5.2 pav.. Pasirodo, kad iteracija yra "laiptuota", jeigu krypties koeficientas yra teigiamas, ir "spiralinė," jeigu neigiamas (kodėl?).

Tarkime, kad taškas x_f yra $n-$ os eilės periodinis transformacijos taškas. Tada šis taškas yra transformacijos f^n nejudamas taškas. Sakysime, kad $n-$ os eilės periodo ciklas yra pritraukiantysis transformacijos f ciklas, jeigu cikle yra transformacijos f $n-$ os eilės pritraukiančių, periodinių taškų. $n-$ os eilės periodinis taškas yra *atstumiantysis*, jeigu jis yra nejudamas, atstumiantysis, transformacijos f^n taškas.

Tarkime, kad $\{X, f\}$ yra dinaminė sistema. Tašką $x \in X$ vadinsime *galimu periodiniu* f tašku, jeigu kokiam nors $m \in \mathcal{N}$, $f^m(x)$ yra periodinis.

Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{[0, 1]; \frac{x}{2}(1 - x)\}$ turi pritraukiantį nejudamą tašką $x_f = 0$. Ar turi ši dinaminė sistema nejudamą atstumiantį tašką?

Visų pirma parodysime, kad taškas $x = 12\overline{12}$ yra periodinis, kurio periodas lygus 2. Skaičiuodami gauname,

$$f(12\overline{12}) = 2\overline{12} = 21\overline{21},\ f^2(12\overline{12}) = f(21\overline{21}) = 1\overline{21} = 12\overline{12}.$$

Iš tiesų matome, kad šio taško periodas lygus 2. Pavyzdžiui, transformacijos $y = 3.18x(1-x)$ taškas $x_0 = 0.2$ yra periodinis, kurio periodas lygus 2 (žr. 5.3 pav.)

Parodysime, kad $x_f = 12\overline{12}$ yra atstumiantysis taškas. Tegu $y \in \Sigma$. Tuomet

$$\rho\big(f^2(x_f), f^2(y)\big) = \rho\big(x_f, f^2(y)\big) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^{i-2}} = 9 \cdot \Big(\rho\big(x_f, y\big) - \big(3|1-y_1| + |2-y_2|\big)\Big).$$

Tarkime, kad $1/9 > \epsilon > 0$. Tada visiems $y \in B_\epsilon(x_f)$ mes gausime, kad $y_1 = 1,\ y_2 = 2$. Vadinasi, bet kokiam $\epsilon > 0$

$$\rho\big(x_f, f^2(y)\big) \geq \rho\big(x_f, y\big).$$

Taigi, nagrinėjamas taškas atstumiantis ir tuo pat metu ciklas irgi atstumiantis.

Dinaminė sistema $\{[0,1];\ 2x(1-x)\}$ turi pritraukiantį nejudamą tašką $x_f = 0.5$. Nesunku matyti, kad 0 taip pat nejudamas transformacijos taškas. Panagrinėkime nulio aplinką. Iš pradžių pastebėkime, kad jeigu $x \to 0$ tai dydis $1 - x \to 1$. Taigi, kai $x \to 0$, tai $f(x) \sim 2x$. Kadangi visiems $x > 0$ turime

$$\rho\big(2x, 0\big) = 2\rho\big(x, 0\big) > \rho\big(x, 0\big)$$

tai nulis yra atstumiantis nejudamas taškas. Pavyzdžiui, paimkime $\epsilon = 0.1$. Tada

$$\rho\big(0, f(x)\big) = 1.8\rho\big(0, x\big),$$

bet kokiam $x \in B_\epsilon(0)$.

Apibrėžimas *Dinaminę sistemą (X, f) vadinsime tranzityvia, jeigu duotai kokios nors aibių klasės atviroms aibėms A ir B galime nurodyti tokį numerį n_0, kad visiems $n > n_0$, $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*

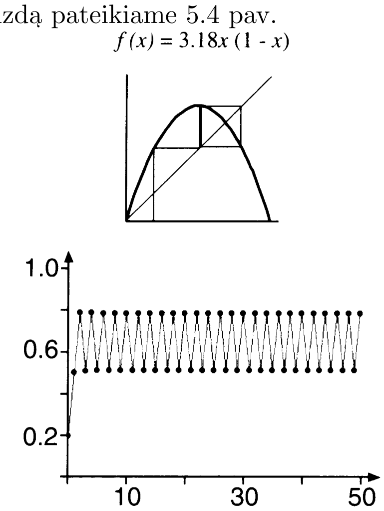
Pažymėkime: $f(x) = \min\{2x, 2-2x\}$, $X = [0,1]$. Tada dinaminė sistema (X, f) yra tranzityvi. Įrodykite.

Apibrėžimas *Sakysime, kad dinaminė sistema yra jautri pradinių sąlygų atžvilgiu, jeigu visiems $x \in X$ ir bet kokiam $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis skaičius $n \in \mathcal{N}$, kad*

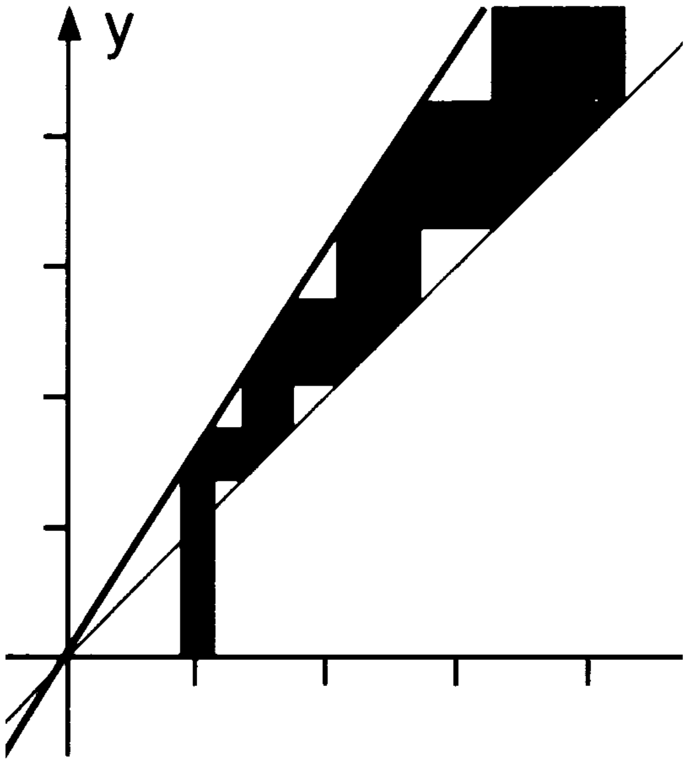
$$\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta,$$

jei tik $y \in B(x, \epsilon)$, čia $\delta > 0$ yra laisvai pasirinktas, fiksuotas teigiamas skaičius.

Kitaip tariant, jei orbitos startuoja iš "artimų" taškų, tai augant iteracijų skaičiui, atstumas tarp orbitų auga. Pastarosios transformacijos vaizdą pateikiame 5.4 pav.



5.3 pav.



5.4 pav.

Šis jautrumo fenomenasm praktiniuse uždaviniuose labai svarbus. E. Lorencas (Lorenz) 1960 metais modeliuodamas ilgalaikes oro prognozes susidūrė su šia problema iš esmės. Minėtąjį fenomeną jis pavadino "drugelio efektu," kurį suformulavo tokiu būdu- ar gali drugelio sparnelų plazdenimas Brazilijos džiunglėse sukelti uraganą Amerikoje. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, švelniai tariant, keistas klausimas, bet tik iš pradžių. Pastebėsime, kad jei dinaminė sistema yra jautri, kitaip tariant lengvai pažeidžiama, tai ir labai maži pokyčiai, pavyzdžiui apytikslis pradinių duomenų parinkimas, gali sukelti didžiulius neatitikimus. T.y. rezultatai bus tolimi nuo prognozuojamų. Kad ir kaip tiksliai skaičiuotų kompiuteriai, vis tik skaičiavimams yra naudojamos realiųjų skaičių iteracijos, taigi, skaičių paklaidos. Kas garantuoja, kad skaičiavimo rezultatais galima pasikliauti? Būtent su šia problema ir susidūre E. Lorencas. Jis, labai nedaug keisdamas pradinius duomenis ir iteruodamas labai panašiomis funkcijomis, gaudavo visiškai skirtingus rezultatus.

Apibrėžimas *Dinaminę sistemą vadinsime chaotine, jeigu pastaroji yra:*

1) ji trazityvi;

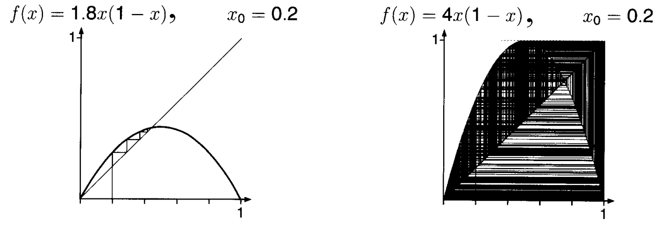
2) jautri pradinių duomenų atžvilgiu;

3) transformacijos f, periodinių orbitų aibė tiršta metrinėje erdvėje X.

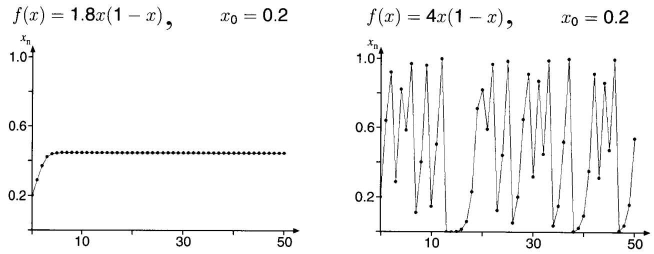
Chaotinės dinaminės sistemos jautrumas pasireiškia tuo, kad iteruodami "artimus" pradinius taškus, gauname orbitas, tolstančias vieną nuo kitos. Tranzityvumo dėka, bet koks mažas intervalas yra "užtempiamas" ant visos erdvės. Trečioji savybė reiškia, kad periodinių taškų aibė yra tiršta, neperiodinių taškų aibėje.

5.5 pav. yra pateiktos dviejų dinaminių sistemų grafinės iteracijos.

5.6 pav. pateikiamas iteracijos reikšmių elgesys, kai n didėja.



5.5 pav.



5.6 pav.

Kuri iš pateiktų dinaminių sistemų yra chaotinė, o kuri ne?

Transformacija $f(x) = ax(1-x)$ plačiai taikoma gamtos moksluose, t.y. fizikoje, metereologijoje, biologijoje ir t.t.. Beje, gana daug fraktalinių struktūrų gaunama iteruojant šias transformacijas, todėl ir dėmesys šiai transformacijai išskirtinis. Pavyzdžiui, populiacijos dinamikai tirti, buvo pasiūlyta nagrinėti transformaciją (logistinę transformaciją)

$$P(t+1) = P(t) + rP(t)(1 - P(t)),$$

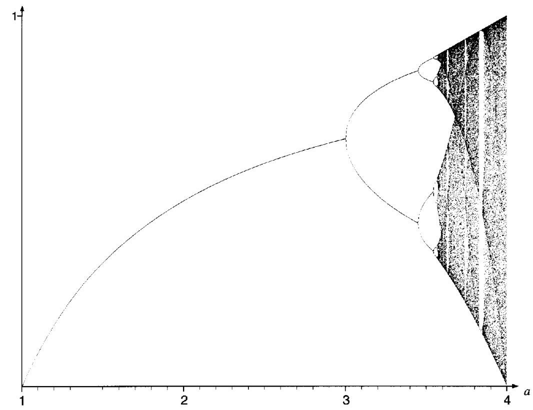
čia $t \in \mathcal{N}$ laikas, $P(t)-$ populiacijos apimtis, $r \in [0,3]$, parametras.

5.7 pav. yra pateikti funkcijų $y = ax(1-x), x \in [0,1]$, skirtingoms parametro reikšmėms, to paties iteruojamo taško orbitos. Jeigu $a = 3.18$, tai šio taško iteracijos pateikiamos 5.3 pav.. Keisdami parametrą a nuo 0 iki 4, gauname transformacijas, kurių atraktoriai, tampa vis sudėtingesni. Tiksliau kalbant, kai $a \in (0,3)$, tai transformacijos $f(x)$ atraktorių sudaro vienas taškas (kiekvienai a reikšmei kitas.) Kai $a \in [0,4]$, tai atraktorius tampa vis sudėtingesnis, t.y intervale maždaug tarp 3 ir 3.5 atraktorių sudaro antros eilės periodiniai taškai, kiek didesnei a reikšmei, ketvirtos eilės periodiniai taškai ir t.t. (žr. 5.8 pav.). Kuo artimesnė parametro a reikšmė skaičiui 4 tuo didesnis yra ciklo taškų skaičius. Tiksliau kalbant, atraktorius tampa vis labiau chaotinis. Šią kvadratinės transformacijos savybę pastebėjo Amerikos fizikas M. J. Feigenbaumas (Feigenbaum). 5.7 pav. pateiktas grafinis šių atraktorių aibės, kuri vadinama *Feigenbaumo atraktoriumi*, vaizdas.

Jei pažymėsime raidėmis $b_i, i = 1, \ldots$ intervalų galus, kuriuose pasikeičia atraktorius sudarančių ciklo taškų skaičius. Tegu $I_i = [b_{i+1}, b_i]$, $b_1 = 3, b_2 = 3.4494\ldots, b_3 = 3.544090\ldots$, ir t.t. Pažymėkime $d_i = |I_i|$. Feigenbaumas įrodė, kad riba

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = 4.6692\ldots.$$

Pasirodo, kad ši konstanta yra universali. T.y. ta pati konstanta tinka gana plačiai iteracijų šeimai. T.y. ar nagrinėtume logistinę transformaciją ar transformaciją $g_a(x) = ax^2 \sin(\pi x)$.



5.7 pav.

Tarkime, kad $\{X;\omega_1,\dots,\omega_N\}$ sudaro suspaudžiančios transformacijos. Tuomet pora $\{H(B);W\}$ yra dinaminė sistema, kurios

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N}\omega_n(B),\ B\in H(X).$$

Dinaminė sistema, kurioje operuojama aibėmis, kartais vadinama aibių dinamine sistema. Pasirodo, kad dinaminės sistemos $\{H(X),W\}$ atraktorius yra šios sistemos atstumiantysis nejudamas taškas. Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš tokių paprastų samprotavimų. Pradinę IAS sudarančios transformacijos yra suspaudžiančios, todėl laikome, kad sąspūdžio koeficientas $s<1$. Be to žinome, kad dinaminės sistemos $\{H(X);W\}$ vienintelis nejudamas taškas yra atraktorius. Todėl visiems $B,\ C\in H(X)$ turime:

$$h\big(W(B),W(C)\big)\geq s\cdot h\big(B,C\big)\ \Rightarrow\ d\big(W(B),W(C)\big)=d\big(A,W(B)\big)\geq s\cdot d\big(B,C\big).$$

5.3 Lema *Sakykime, kad duota IAS $\{X;\omega_n,n=1,\dots,N\}$ apibrėžta suspaudžiančiomis transformacijomis. Jeigu IAS visiškai nesusijusi, tai visiems $n\in\{1,\dots,N\}$, transformacijos $\omega_n:A\longrightarrow A$ yra injektyvios, čia A IAS atraktorius.*

$\ominus$

Tarkime, kad n koks nors fiksuotas natūralusis skaičius iš minėtosios aibės ir taškai $a_1,a_2\in A$ tokie, kad

$$\omega_n(a_1)=\omega_n(a_2)=a\in A.$$

Jeigu taško a_1 adresas yra ω, o taško a_2 adresas yra σ tuomet taškas a įgyja du adresus $n\omega$ ir $n\sigma$. Bet tokia situacija negalima visiškai nesusijusioje erdvėje. Šis prieštaravimas ir patvirtina lemos tvirtinimo teisingumą.

$\oplus$

Tarkime, kad duota IAS

$$\{X;\omega_n,n=1,\dots,N\},$$

kurios atraktorių žymėkime A. Atraktoriaus A postūmio transformacija vadinsime transformaciją $S:A\longrightarrow A$ apibrėžtą tokiu būdu:

$$S(a)=\omega_n^{-1}(a),\ a\in A.$$

Tarkime, kad transformacija ω_n apibrėžta ir reikšmes įgyja atraktoriuje. Dinaminę sistemą $(A;S)$ vadinsime su IAS susietu *postūmio atvaizdžiu.* Kitaip tariant, postūmio atvaizdis nusako atraktoriaus taško a pirmvaizdžių aibę. Su šia sąvoka susidursime kiek vėliau.

Užduotys

1. Nurodykite metodą, kaip būtų galima suteikti adresus Sierpinskio trikampio elementams.

2. Įrodykite, kad IAS $\{\mathcal{R}; x/2, x/2+1/2\}$ yra besiliečianti.

3. Įrodykite, kad IAS $\{[0,1]; x/3, x/3+2/3\}$ yra visiškai nesusijusi.

4. Raskite IAS $\{\mathcal{R}; \omega_1(x)=0, \omega_2=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\}$ periodinius taškus.

5. Kokias sąlygas turi tenkinti IAS atraktorius, kad jo neskaitus taškų poaibis turėtų nevienareikšmius adresus.

6. Taikydami grafinį iteracijų metodą raskite taškų $0.5,\ 0.75,\ 1$ orbitas, kai $f(x)=4x(1-x)$.

7. Tarkime, kad $f(x)=x^2+0.35$. Grafinės iteracijos būdu raskite taško 0.1 iteraciją. Jei egzistuoja, raskite šios transformacijos atstumiančius ir pritraukiančius taškus.

8. Naudodami skaičiuotuvą patikrinkite ar taškas 0.51304 yra transformacijos $f(x)=g(g(x)),\ \ g(x)=3.2x(1-x)$ nejudamas taškas.

9. Tarkime, kad IAS apibrėžta tokiu būdu:

$$\{[0,1]; 0.5x,\ 0,5x+0.5\}.$$

Tarkime, kad adresų aibė apibrėžta dvejetainėje skaičiavimo sistemoje. Raskite $W^6(A)$ aibei priklausančių intervalo galų adresus. (Beje, šie intervalo galai priklauso nagrinėjamos IAS atraktoriui).

10. Nurodykite IAS, kurios atraktorius yra Sierpinskio trikampis. Tarkime, kad adresų aibė apibrėžta trejetainėje skaičiavimo sistemoje. Raskite taškų $(2/3,0), (2/3,1/3), (1/81,4/243)$ adresus, jei jie priklauso IAS atraktoriui.

11. Parodykite, kad IAS $[0,1]; x/2,\ 3/4x+1/4$ yra persidengianti.

12. Raskite transformacijų

$$\omega_1(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4},\ \omega_2(x)=\frac{x}{4}+\frac{3}{4},\ \omega_3(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{2},$$

nejudamus taškus ir nustatykite ar jie pritraukiantys ar atstumiantys.