IV. SUSPAUDŽIANTYS ATVAIZDŽIAI

4.1. Suspaudžiantys atvaizdžiai metrinėse erdvėse

Tarkime, kad $X-$ metrinė erdvė. Transformaciją $f : X \longrightarrow X$ vadinsime suspaudžiančiu atvaizdžiu (ateityje trumpai S.A.), jeigu egzistuoja konstanta $0 \leq s < 1$ tokia, kad

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y), \forall x, y \in X.$$

Skaičius s vadinamas sąspūdžio koeficientu (trumpai s.k.).

4.1 Teorema *Tarkime, kad f yra S.A. metrinėje erdvėje X. Tada transformacija f yra tolydi.*

Teoremą įrodyti siūlome skaitytojui.

4.2 Teorema *Tarkime f yra S.A. apibrėžtas kompaktiškoje metrinėje erdvėje (X, ρ). Tada skaičius $s_0 = \inf\{s \in \mathcal{R}, s$ trasformacijos f s.k.$\}$, taip pat transformacijos f sąspūdžio koeficientas.*

$\ominus$

Kadangi visi s.k. $s \in [0, 1)$, tai $s_0 \in [0, 1)$, jeigu jis egzistuoja. Kitaip tariant, mums reikia įrodyti, kad sąspūdžio koeficientų aibės tikslus apatinis rėžis priklauso tai pačiai aibei. Taigi, mums pakanka įrodyti, kad

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s_0\rho(x, y), \ x, y \in X.$$

Tarkime priešingai, t.y., galime nurodyti porą $x, y \in X$ tokią, kad

$$\rho(f(x), f(y)) > s_0\rho(x, y).$$

Bet tuomet šiai porai teisingas sąryšis:

$$\rho(f(x), f(y)) - s_0\rho(x, y) > 0.$$

Antra vertus, iš S.A. apibrėžimo išplaukia, kad

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y) < \rho(x, y), \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) - \rho(x, y) < 0.$$

Iš paskutiniųjų nelygybių ir Koši vidurinių reikšmių teoremos gauname, kad egzistuoja $s' \in (s_0, 1)$ toks, kad

$$\rho(f(x), f(y)) - s'\rho(x, y) = 0.$$

Pastebėkime, kad s' yra mažesnis negu visi kiti s.k., todėl egzistuoja intervalas (s_0, s'), kuriame nėra sąspūdžio koeficientų. Bet tuomet s_0 nėra sąspūdžio koeficientų apatinė riba. Taigi, prielaida buvo klaidinga.

$\oplus$

4.3 Teorema *Sakykime, kad $f : X \longrightarrow X$ yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje (X, ρ). Tada egzistuoja vienintelis nejudamas taškas $x_0 \in X$, kad visiems $x \in X$ seka*

$$\{f^n(x); n \in \mathcal{N}\} \longrightarrow x_0, \text{ kai } n \to \infty.$$

$\ominus$

Tarkime, kad $x \in X$ fiksuotas taškas, o $s \in [0, 1]$ yra transformacijos f, s.k.. Sakykime, kad $n > m$, $m, n = 0, 1, \dots$, tada

(1) $$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^m \rho(x, f^{n-m}(x)).$$

Matome, kad remdamiesi trikampio nelygybe, visiems $k = 0, 1, \dots$ gauname tokią nelygybę:

$$\rho(x, f^k(x)) \leq \rho(x, f(x)) + \rho(f(x), f^2(x)) + \dots + \rho(f^{k-1}(x), f^k(x))$$
$$\leq (1 + s + s^2 + \dots s^{k-1})\rho(x, f(x)) \leq (1 - s)^{-1}\rho(x, f(x)).$$

Pasinaudoję (1)- ąja nelygybe, iš paskutiniosios gauname

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{m \wedge n}(1 - s)^{-1}\rho(x, f(x)).$$

Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad seka

$$\{f^n(x), n \in \mathcal{N}\}$$

yra Koši seka. Remdamiesi tuo, kad nagrinėjamoji erdvė pilna, tvirtiname, kad Koši seka konverguoja, be to šios sekos riba, tarkime x_0, priklauso tai pačiai metrinei erdvei. Dar daugiau, nagrinėjamas atvaizdis-suspaudžiantysis, taigi jis ir tolydus (4.1 Teorema), tad visiems $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y) < \epsilon,$$

kai tik $\rho(x, y) < \delta = \epsilon/s$. Vadinasi

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Ar šis taškas vienintelis? Tarkime, kad ne. Tuomet egzistuoja taškas $y_0 \in X, x_0 \neq y_0$ toks, kad ir $y_0 = f(y_0)$. Iš nelygybės

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq s\rho(x_0, y_0).$$

išplaukia, kad

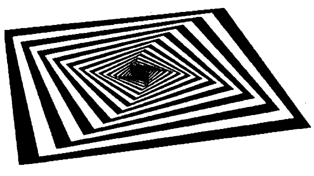
$$(1 - s)\rho(x_0, y_0) \leq 0.$$

Bet tada, $\rho(x_0, y_0) = 0$, ir $x_0 = y_0$.

$\oplus$

Siūlome skaitytojui įrodyti, kad S.A. aibė yra uždara atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu, t.y. S.A. kompozicija yra spaudžiantis atvaizdis.

4.1 pav. pateikiamas S.A., kuris kvadratą spaudžia ir suka apie tašką.



4.1 pav.

4.4 Teorema *Tarkime* (X, ρ) *- kompaktiška metrinė erdvė, o* $f : X \longrightarrow X$ *S.A. Tada aibė*

$$\{f^n(X),\ n \in \mathcal{N}\}$$

yra fraktalų erdvės $(H(X), h)$ *Koši seka ir be to*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(X) = \{x_0\},$$

čia x_0 *yra transformacijos* f *nejudamas taškas.*

$\ominus$

Visų pirma išsiaiškinkime, ar $\{f(X)\} \subset H(X)$. Žinome, kad f tolydi, todėl kompaktiškos aibės tolydus vaizdas yra kompaktiška aibė. Taigi, $f(X)$ kompaktiška aibė, tuo pačiu ir $f(X) \subset H(X)$. Naudodami matematinę indukciją gauname (įrodykite kantrusis skaitytojau!), kad ir bet kokiam n, $f^n(X)$ - kompaktiška ir netuščia aibė. Tuomet $f^n(X) \in H(X),\ n \in \mathcal{N}$. Be to pastebėkime, kad kiekvienam n, $x_0 \in f^n(X)$, čia x_0 yra atvaizdžio f nejudamas taškas.

Įsitikinsime, kad ši seka yra fraktalų erdvės elementų Koši seka. Pastebėkime, kad erdvė X yra kompaktiška, taigi ir pilna. Tą patį galime pasakyti ir apie fraktalų erdvę. T.y. jeigu $\{f^n(X)\}$ Koši seka, tai jos riba priklauso $H(X)$.

Jeigu $m > n$, tai

$$f^m(X) \subset f^n(X)$$

ir tuo pačiu

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x\in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)).$$

Bet šis atstumas ne didesnis už $\operatorname{diam}(f^n(X))$, kuris apibrėžiamas taip:

$$\operatorname{diam}(f^n(X)) = \max_{x,y\in f^n(X)} \rho(x, y).$$

Taigi

$$\operatorname{diam}\ (f^n(X)) \leq s^n \operatorname{diam} X,$$

čia s transformacijos f, s.k. Parinkime n_0 tokį, būtų teisinga nelygybė:

$$s^{n_0} \operatorname{diam} X < \epsilon.$$

Tuo pačiu, mes užtikriname, kad

$$h(f^m(X), f^n(X)) = \max_{x\in f^n(X)} \rho(x, f^m(X)) \leq s^{n_0} \operatorname{diam} X < \epsilon,$$

kadangi visi atstumai neviršija aibės $\{f^n(X)\}$ diametro. Bet pastarosios nelygybės dėka galime tvirtinti, kad nagrinėjamoji S.A. seka yra Koši seka pilnoje fraktalų erdvėje. Taigi, ši seka turi ribą, kuri priklauso fraktalų erdvei.

Liko parodyti, kad šios sekos riba yra minėtasis teoremos formuluotėje taškas x_0. Jau žinome, kad $x_0 \in \lim\limits_{n\to\infty} f^n(X)$. Ar šios ribinės aibės diametras lygus nuliui?

Turime, kad $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} f^n(X) \leq \lim\limits_{n\to\infty} s^n \operatorname{diam}\ (X) = 0$. Vadinasi, jei $y \in \lim\limits_{n\to\infty} f^n(X)$, tai $\rho(x_0, y) = 0$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $x_0 = y$. Taigi, fraktalų erdvės elementų sekos riba yra kompaktiška aibė, kurią sudaro vienas elementas. Todėl

$$\lim_{n\to\infty} f^n(X) = \{x_0\}.$$

$\oplus$

4.2 Suspaudžiantys atvaizdžiai metrinėje fraktalų erdvėje

Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $(H(X), h)$ yra fraktalų aibė. Žinome, kad $H(X)$ elementai yra kompaktiški, netušti, metrinės aibės poaibiai. Teisinga tokia teorema:

4.5 Teorema *Sakykime, kad $\omega : X \longrightarrow X$ yra tolydus atvaizdis metrinėje erdvėje (X, ρ). Tada šis atvaizdis fraktalų erdvę atvaizduoja į ją pačią.*

$\ominus$

Kitaip sakant, kompaktiškos netuščios aibės atvaizduojamos į kompaktiškas netuščias aibes. Sakykime, kad $S \subset X$ erdvės X netuščias kompaktas. Kadangi ω tolydus atvaizdis, tai $\omega(S) = \{\omega(x); x \in S\}$ irgi netuščia ir be to kompaktiška, nes jei $\{y_n = \omega(x_n); x \in S\}$ yra taškų iš S seka, tai $\{x_n\} \subset S$. Bet S kompaktas, tuomet išplaukia, kad galime surasti posekį, x_{N_n} tokį, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_{N_n} = x_0 \in S$. Naudodamiesi transformacijos ω tolydumu gauname, kad seka $\{y_{N_n} = \omega(x_{N_n})\}$ yra sekos $\{y_n\}$ posekis, kuris konverguoja į $y_0 = f(x_0) \in \omega(S)$.

$\oplus$

Sekanti teorema nusako metodą, kurio dėka galime sukonstruoti suspaudžiantį atvaizdį fraktalų erdvėje, kai žinomas S.A. metrinėje erdvėje (X, ρ).

4.6 Teorema *Sakykime, kad $\omega : X \longrightarrow X$ yra metrinės erdvės (X, ρ) S.A., kurio sąspūdžio koeficientas yra s. Tada S.A., $\omega : H(X) \longrightarrow H(X)$, fraktalų erdvėje gali būti apibrėžtas tokiu būdu :*

$$\omega(B) = \{\omega(x); x \in B\}, \quad B \in H(X).$$

Pastarojo suspaudžiančio atvaizdžio sąspūdžio koeficientas yra s.

$\ominus$

Atvaizdis $\omega : X \longrightarrow X$ yra S.A., taigi šis atvaizdis tolydus, be to $\omega : H(X) \longrightarrow H(X)$. Kitaip tariant, suspaudžiantis atvaizdis apibrėžtas metrinėje erdvėje, indukuoja atvaizdį fraktalų erdvėje $H(X)$. Tada, visiems $B, C \subset H(X)$ teisinga nelygybė:

$$d(\omega(B), \omega(C)) = \max\{\min\{\rho(\omega(x), \omega(y)); x \in B\}; y \in C\} \leq \max\{\min\{s\rho(x, y); x \in B\}; y \in C\} = sd(B, C).$$

Analogiškai galima įrodyti, kad

$$d(\omega(C), \omega(B)) \leq sd(C, B).$$

Tada

$$h(\omega(B), \omega(C)) = d(\omega(B), \omega(C)) \vee d(\omega(C), \omega(B)) \leq s\big(d(B, C) \vee d(C, B)\big) \leq sd(B, C).$$

$\oplus$

4.7 Teorema *Sakykime, kad* (X,ρ) *metrinė erdvė ir* $\{\omega_n, n \in \{1,\dots N\}\}$ *suspaudžiančių atvaizdžių aibė erdvėje* $(H(X),h)$. *Be to tarkime, kad* $s_n, n \in \{1,\dots N\}$, *yra šių S.A. sąspūdžio koeficientai, atitinkamai. Apibrėžkime transformaciją* $W: H(X) \longrightarrow H(X)$ *tokiu būdu: visiems* $B \in H(X)$,

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \ldots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B).$$

Tada transformacija W *yra suspaudžiantis atvaizdis fraktalų metrinėje erdvėje* $(H(X),h)$, *be to šios transformacijos s.k. yra lygus tokiam skaičiui:* $s = \max_{n=1\ldots N}\{s_n\}$.

$\ominus$

Įrodysime teoremą, kai $N=2$. Jeigu $B, C \in H(X)$, tai

$$h(W(B),W(C)) = h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C)) \le$$
$$h(\omega_1(B),\omega_1(C)) \vee h(\omega_2(B),\omega_2(C)) \le s_1 h(B,C) \vee s_2 h(B,C) \le s h(B,C).$$

Pritaikę matematinės indukcijos metodą (ką tikimės su malonumu atliks skaitytojas), gausime teoremos įrodymą.

$\oplus$

4.3 Iteracinės atvaizdžių sistemos (IAS)

Tarkime, kad (X,ρ) yra pilna metrinė erdvė, o S.A. aibė

$$\{\omega_n,\ n = 1\ldots N\},$$

kurių sąspūdžio koeficientai $s_n,\ n \in \mathcal{N}$. Pažymėkime

$$s = \max\{s_n : n = 1,\dots,N\}. \tag{2}$$

Apibrėžimas *Iteracine atvaizdžių sistema (trumpai IAS) vadinsime S.A. šeimą,*

$$\{(X,\rho\}), \omega_n; n = 1,\dots,N, s\}, \tag{3}$$

kurios sąspūdžio koeficientas apibrėžtas (2) lygybe.

Kitaip tariant, IAS - tai S.A. aibė, veikianti fiksuotoje metrinėje erdvėje.

Iš 4.6, 4.7 teoremų išplaukia

4.1 Išvada *Tarkime, kad IAS apibrėžta (3) sąryšiu. Tada transformacija*

$$W: H(X) \longrightarrow H(X)$$

apibrėžta lygybe

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B),\ B \in H(X),$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X),h)$, *kurios s.k. apibrėžtas (2) lygybe. Taigi,* $h(W(B),W(C)) \le sh(B,C), B, C \in H(X)$. *Be to šios transformacijos vienintelis nejudamas taškas* $A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(A)$ *yra tokios sekos riba:*

$$A = \lim_{n\to\infty} W^n(B),\quad B \in H(X).$$

Transformacijos W nejudamą tašką $A \in H(X)$ vadinsime šios transformacijos *atraktoriumi.*

Panagrinėsime pavyzdį.
Tarkime duota metrinė erdvė $(\mathcal{R}, \rho = |x-y|)$ ir $(H(\mathcal{R}), h)$. Tarkime, kad IAS $\{\mathcal{R}; \omega_1, \omega_2\}$, čia

$$\omega_1(x) = \frac{x}{3},\ \omega_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Pažymėkite $B_0 = [0, 1]$. Tegu

$$B_n = W^n(B_0),\ n \in \mathcal{N}.$$

Įrodysime, kad šios sekos riba yra Kantoro aibė. Pažymėkime, bet kokiai $A \in \mathcal{R}$,

$$xA = \{xy; y \in A\},\ A + x = \{y + x; y \in A\}.$$

Suskaičiuokime apibrėžtos IAS s.k.. Turime

$$\rho(\omega_1(x), \omega_1(y)) = \frac{1}{3}|x-y| = \frac{1}{3}\rho(x,y)$$

ir

$$\rho(\omega_2(x), \omega_2(y)) = |\frac{x}{3} + \frac{2}{3} - (\frac{y}{3} + \frac{2}{3})| = \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Iš paskutiniųjų lygybių gauname, kad nagrinėjamų S.A. sąspūdžio koeficientai yra tokie $s_1 = 1/3,\ s_2 = 1/3$. Vadinasi, IAS s.k. $s = \max\{s_1, s_2\} = 1/3$.

Parodysime, kad šios IAS atraktorius yra Kantoro aibė. Tarkime, kad transformacija $W(B)$ yra uždaro intervalo vidurinės atviros dalies pašalinimo operacija. Sakykime, kad B_k yra šios transformacijos poveikio aibė, gauta atlikus $k < n$ žingsnių, o intervalas $[a, b]$ yra toks, kad

$$[a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \cup [b - \frac{1}{3}(b-a), b] \subset B_{k+1}$$

ir, be to,

$$(a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a)) \cap B_{k+1} = \emptyset.$$

Šį intervalą vadinsime aibės B_k komponente. Naudosime indukcijos metodą. Tarkime, kad $k = 0$. Tada

$$B_1 = W(B_0) = \omega_1(B_0) \cup \omega_2(B_0) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Sakykime, kad $[a, b] \subset B_n$ yra B_n komponentė. Tada egzistuoja intervalas $[a', b'] \subset B_{n-1}$, toks, kad $\omega_i([a', b']) = [a, b]$ kuriam nors i. Pagal prielaidą, intervalas $[a', b']$ aibėje B_n neturi savo vidurinės atvirosios dalies. Tada

$$[a', a' + \frac{1}{3}(b'-a')] \cup [b' - \frac{1}{3}(b'-a'), b']$$

ir

$$\omega_i[a', a' + \frac{1}{3}(b'-a')] \cup [b' - \frac{1}{3}(b'-a'), b'] = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \cup [b - \frac{1}{3}(b-a), b].$$

Taigi, iš intervalo $[a, b]$ išmetę vidurinį atvirą intervalą gauname aibę, priklausančią B_{n+1}.

Turime, $b' - a' \longrightarrow b - a$ ir tuo pačiu $a', b' \longrightarrow a, b$ atitinkamai. Taigi, šios aibės atraktorius yra Kantoro aibė.

Sakykime, kad IFS nusakyta tokiu būdu: $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Tarkime, kad A_0 kokia nors metrinės erdvės kompaktiška aibė. Tegu $W^0(A_0) = A_0$. Pačią kompaktiškų aibių seką, remdamiesi paskutiniąja teorema, skaičiuojame tokia rekurentine formule:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j(A_n),\ n = 1, \ldots.$$

Taip sukonstruotos sekos nariai yra fraktalų erdvės elementai. Be to ši seka konverguoja (hausdorfo metrikos atžvilgiu) į IAS atraktorių.

4.8 Teorema *Sakykime, kad IAS nusakyta tokia sistema:*

$$\{\mathcal{R}, \omega_1(x) = ax + b,\ \omega_2(x) = cx + d\},\ a, b, c, d.$$

Tada šios aibės atraktorius arba jungi arba visiškai nejungi aibė.

$\ominus$

Atraktorius $A \subset \mathcal{R}$ yra kompaktas, taigi ir aprėžta aibė. Tada šioje aibėje yra didžiausia ir mažiausia reikšmės. Remdamiesi tuo, mes galime tvirtinti, kad egzistuoja uždaras intervalas $[a, b]$ toks, kad $a = \min\{x \in A\},\ b = \max\{x \in A\}$. Tarkime, kad

$$\omega_1([a, b]) \cap \omega_2([a, b]) \neq \emptyset. \tag{4}$$

Intervalas $[a, b]$ jungi aibė, o $w_i,\ i = 1, 2$ tolydžios, todėl aibė

$$\omega_1([a, b]) \cup \omega_2([a, b])$$

irgi jungi aibė. Dar daugiau, egzistuoja taškai $a_1, b_1 \in A \subset [a, b]$ tokie, kad $a_1 = \omega_1(a),\ b_1 = \omega_2(b)$. Matome, kad transformacija W, aibę

$$\omega_1([a, b]) \cup \omega_2([a, b])$$

atvaizduoja į ją pačią, tuo pačiu ir atraktorių į jį patį. Vadinasi aibė A jungi, jeigu tenkinama (4) lygybė.

Sakykime, kad (4) nėra tenkinama, t.y sankirta tuščia. Be to tarkime, kad $[a', b']$ ilgiausia aibės A dalis. Kadangi $\omega_1(A) \cap \omega_2(A) = \emptyset$, tai išplaukia, kad egzistuoja $i \in \{1, 2\}$ ir intervalas $[a'', b'']$, kuris yra jungi aibės A komponentė tokie, kad

$$\omega_i[a'', b''] = [a', b'].$$

Tarkime, kad s_i yra ω_i sąspūdžio koeficientas. Tuomet

$$\rho(a', b') \leq s_i \rho(a'', b'').$$

Bet $[a'', b'']$ yra ilgesnis už $[a, b]$ arba abiejų intervalų ilgiai lygūs nuliui. Bet pirmoji prielaida prieštarauja tam, kad $[a', b']$ yra ilgiausia, susijusi aibės A, komponentė. Tada $a' = b'$. Bet tiktai taškas šiuo atveju gali būti susijusi aibės A komponentė. Iš pastarųjų samprotavimų gauname, kad $A-$ visiškai nejungi.

$\oplus$

4.4 Sankaupos aibės

Sakykime, kad (X, ρ) metrinė erdvė ir $C \in H(X)-$ kompaktiška netuščia aibė. Apibrėžkime transformaciją $\omega_0 : H(X) \longrightarrow H(X)$ tokiu būdu:

$$\omega_0(B) = C,\ B \in H(X).$$

Tokiu būdu apibėžtą transformaciją vadinsime sankaupos transformacija, o aibę C - sankaupos aibe. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad sankaupos transformacija yra suspaudžiantis atvaizdis metrinėje erdvėje $(H(X), h)$, kurios sąspūdžio koeficientas $s = 0$.

Apibrėžimas *Sakykime, kad duota IAS $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_n; s \in [0, 1]\}$. Be to tarkime, kad ω_0 kokia nors sankaupos transformacija. Tada IAS $\{X;\ \omega_0,\ \omega_1, \ldots, \omega_n; s\}$ vadinama sankaupos iteracine atvaizdžių sistema (SIAS) su s.k. s.*

Žemiau pateiktas teiginys, yra 4.1 išvados apibendrinimas, skirtas SIAS.

4.2 Išvada *Tarkime, kad duota SIAS*

$$\{X; \omega_n, n = 0, 1, \ldots, N; s\}.$$

Tada transformacija $W : H(X) \longrightarrow H(X)$, *apibrėžta lygybe*

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^{N} \omega_n(B),\ B \in H(X),$$

yra S.A. pilnoje metrinėje erdvėje $(H(X), h)$ *su tuo pačiu s.k.* s. *T.y.*

$$h(W(B), W(C)) = sh(B, C),\ B, C \in H(X).$$

Vienintelis nejudamas taškas $A \subset H(X)$ *yra lygus*

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^{N} \omega_n(A),$$

kuris yra tokios sekos riba:

$$A = \lim_{n \to \infty} W^n(B),\ B \in H(X).$$

Metrinės erdvės elementų seką $\{A_n\}$ vadinsime *didėjančia (mažėjančia)*, jeigu

$$A \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots (A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots).$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad mažėjanti aibių seka yra Koši seka. Be to, jeigu metrinė erdvė kompaktiška tai ir bet kokia didėjanti aibių seka yra Koši seka. Sakykime, kad $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ IAS, su sankaupos aibe C, be to tarkime, kad X kompaktiška. Pažymėkime,

$$W_0(B) = \bigcup_{n=0}^{N} \omega_n(B),\ B \in H(X)$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B).$$

Tarkime, kad $\{C_n = W_0^n(C),\ n \in \mathcal{N}_0\}$. Remdamiesi paskutiniąja teorema, gauname, kad seka $\{C_n\}$ yra Koši seka erdvėje $H(X)$, kuri konverguoja į IAS atraktorių. Be to, seka

$$C_n = C \cup W(C) \cup W^2(C) \cup \ldots \cup W^n(C)$$

yra didėjanti, kompaktiškų aibių seka. Vadinasi, $W_0(A) = A$.

Nagrinėsime metrinę erdvę $(\mathcal{R}^2, \rho_2)$, t.y. plokštumą. Tarkime, kad $C \subset \mathcal{R}^2$ yra medžio kamienas, su vienodu simetriškų šakų skaičiumi į abi kamieno puses, stovintis vertikaliai Ox ašiai, kurio pradžia taške $(0, 0)$. Be to kiekvienam $B \in H(X)$, $\omega_0(B) = C$ ir

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Parodysime, kad $(\mathcal{R}^2; \omega_0,\ \omega_1)$ yra IAS su sankaupos aibe, bei rasime jos sąspūdžio koeficientą. Pažymėkime

$$A_n = W^n(A_0),\ n \in \mathcal{N}$$

ir

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^{N} \omega_n(B),\ B \in H(\mathcal{R}^2).$$

Parodysime, kad A_n apima pirmuosius $n+1$ medžių, skaitant iš kairės į dešinę. Tam, kad parodyti, jog $\{\mathcal{R}^2; \omega_0, \omega_1)$ yra IAS, mums pakanka rasti šios IAS s.k..

Visų pirma pastebėkime, kad

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.75 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ir

$$\rho(\omega_1(x), \omega_1(y)) = \sqrt{(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}y_2)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \frac{3}{4}\rho(x,y).$$

Vadinasi, transformacijos ω_1 sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tuo pačiu ir nagrinėjamos IAS sąspūdžio koeficientas lygus $3/4$. Tarkime, kad pradinė sekos aibė $A_0 = C$. Skaičiuokime $\omega_1^n(A_0)$ naudodami afininę transformaciją

$$A(x - x_f) + x_f, \tag{5}$$

čia x_f yra atvaizdžio f nejudamas taškas. Tada šio taško koordinatės yra tokios:

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \Longrightarrow x = 1; y = \frac{3}{4}y \Longrightarrow y = 0.$$

Naudodami gautas reikšmes, (5) reiškinį perrašome tokiu būdu:

$$\omega_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (\frac{3}{4})^n \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad ${\omega^n}_1(A_0)$ yra aibės C suspaudimas dydžiu $(3/4)^n$ bei postūmis dydžiu $1-(3/4)^n$. Kitaip tariant, gauname vis mažesnių medžių seką, išsidėsčiusių vienoje tiesėje, kurie neaprėžtai traukiasi į šios aibės atraktorių, kuris tokios pat prigimties. Taigi

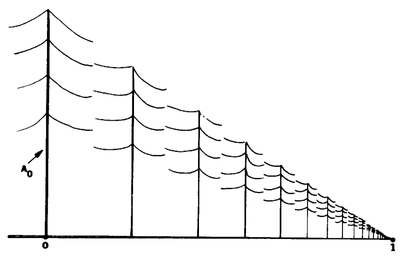
$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(A_0),$$

čia sekos aibės apibrėžiamos taip:

$$A_1 = C \cup \omega_1(C),\ A_2 = C \cup \omega_1(C \cup \omega_1(C)) = C \cup \omega_1(C) \cup \omega_1^2(C), \ldots,$$

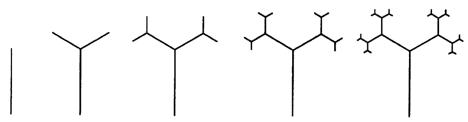
$$A_k = \bigcup_{i=0}^{k} \omega_1^k,\ k \leq n.$$

4.2 pav. pateikiama šios iteracijos vaizdinė interpretacija.



4.2 pav.

Skaitytojui siūlome panagrinėti žemiau pateiktą (4.3 pav.) IAS, erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_2)$. Sakykime, kad $C-$ medžio kamienas, kurio pagrindas remiasi į koordinačių pradžios tašką statmenai Ox ašiai, kitaip tariant, kamienas Oy ašyje. 'Apauginkime' šį kamieną lapais, naudodami IAS. Tarkime, $\omega_0(B) = C, \quad B \in H(X)$. Šios iteracijos grafinis vaizdas pateikiamas 4.3 pav.



4.3 pav.

SIAS realizuojančias iteracijas apibrėžiame taip:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kitaip tariant, ω_1 suka kamieną kampu ξ bei spaudžia dydžiu r. Transformacija ω_2 suka kamieną kampu $-\xi$ ir suspaudžia taip, kaip ir pirmoji.

Skaitytojui siūlome pačiam sugalvoti SIAS, kurios suktų bei spaustų nagrinėjamas figūras. Dar daugiau, sugalvokite atvaizdžių seką, kuri būtų didėjanti, ir kurios riba būtų kokia nors gerai žinoma aibėje. Kas yra bendro tarp IAS ir SIAS ir kuo šios transformacijų sekos skiriasi?

4.5 Fraktalų modeliavimo teorema

4.9 Teorema *Tarkime, kad (X, ρ) - pilna metrinė erdvė. Be to, $L \in H(X)$ kokia nors kompaktiška aibė iš fraktalų erdvės. Tegu $\epsilon > 0$ koks nors laisvai pasirinktas fiksuotas skaičius. Sudarykime IAS (SIAS) tokiu būdu:*

$$\{X; (\omega_0), \omega_1, \ldots, \omega_n, s\}$$

$s \in [0, 1)$,

$$h\big(L; \bigcup_{k=1(k=0)}^{n} \omega_k(L)\big) \leq \epsilon.$$

Tada

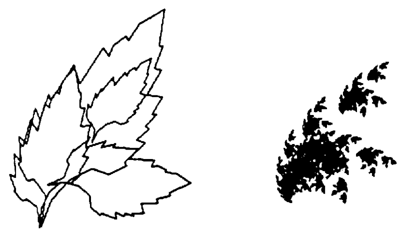
$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s},$$

čia A yra IAS (SIAS) atraktorius. Kitaip tariant,

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h\big(L, \bigcup_{k=1,(k=0)}^{n} \omega_n(L)\big), \forall L \in H(X).$$

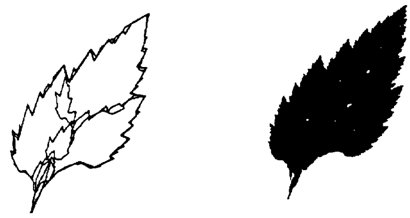
Ši teorema nurodo metodą, kurį naudodami galime rasti IAS, turinčią atraktorių arti kokios nors fiksuotos aibės. Taigi, reikia rasti suspaudžiančių transformacijų seką, apibrėžtų toje pat erdvėje kaip ir duotoji aibė, tokią, kad duotosios aibės vaizdų sąjunga (šios transformacijos atžvilgiu) būtų arti duotosios aibės. Beto, minimos teoremos dėka, mes galime nurodyti kreivių seką, kuria "užpildome" plokštumos sritį. Kiek plačiau šią problemą nagrinėsime vėliau.

Sakykime, kad $L \subset \mathcal{R}^2$ yra medžio lapo projekcija plokštumoje, kurio siena nusakyta kokia nors uždara laužte (lapo projekcija laikykime 4.4 pav. tamsų lapą). Ši laužtė ir bus mūsų iteracijų sekos pradinė aibė. Sakykime, kad IAS transformacijų aibę sudaro keturios suspaudžiančios transformacijos, kurių sąjunga pavaizduota 4.4 pav.. 4.4 pav. dešinėje pusėje pavaizduotas šios transformacijų sekos atraktorius. Nesunku matyti, kad atraktorius nėra panašus į originalą, o šio fenomeno priežastis ta, kad atstumas tarp atraktoriaus ir transformacijų sekos per didelis. (Pastebėkime, kad ir šiuo atveju gauname gana įdomų rezultatą!)



4.4 pav.

4.5 pav. pavaizduota kita IAS. Hausdorfo atstumas tarp keturių pirmųjų šios spaudžiančių transformacijų sąjungos ir originalo yra žymiai mažesnis, negu sekos, kuri buvo pavaizduota 4.4 pav. . Skirtumą tarp IAS atraktorius ir originalo, 4.5 pav., pabrėžia baltos dėmelės, pateiktame paveikslėlyje.



4.5 pav.

4.1 Lema *Sakykime, kad* (X, ρ) *pilna metrinė erdvė. Tegu* $f : X \longrightarrow X$ *koks nors S.A., kurio s.k.* $s \in [0, 1)$. *Sakykime, kad šios transformacijos nejudamas taškas* $x_f \in X$. *Tada teisinga nelygybė:*

$$\rho(x, x_f) \leq \frac{\rho(x, f(x))}{1 - s}, x \in X.$$

$\ominus$

Žinome, kad atstumas $\rho(a, x)$, $x \in X$, tolydi kintamojo x funkcija. Todėl

$$\rho(x, x_f) = \rho(x, \lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, f^n(x)) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m\leq n} \rho(f^{m-1}(x), f^m(x)) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x, f(x))(1 + \ldots + s^{n-1}) \leq \frac{1}{s-1}\rho(x, f(x)).$$

$\oplus$

Iš paskutiniosios lemos išplaukia 4.9 teoremos įrodymas.

$\oplus$

Sakykime, kad $(\mathcal{R}, \rho_2)$. Aišku, kad $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$. Apibrėžkime spaudžiančias transformacijas tokiu būdu:

$$\omega_1[0, 1] = [0, \frac{1}{2}],\ \omega_2[0, 1] = [\frac{1}{2}, 1],\ \omega_1 = \frac{x}{2},\ \omega_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Šių transformacijų atraktorius yra intervalas $[0, 1]$. Jis yra savo dviejų mažesnių kopijų sąjunga. Ką gausime riboje?

4.6 Plevenimas vėjyje. Fraktalai priklausantys nuo parametro

Paskutinioji teorema suteikia tokią galimybę - apversti priartinimo problemą. Tarkime, kad duotoje aibėje L, apibrėžėme IAS, kurios atraktorius yra fiksuota aibė. Tada teisinga tokia teorema.

4.10 Teorema *Tarkime, kad* (Y, ρ_y), (X, ρ_x) *dvi metrinės erdvės ir S.A. šeima* $f : Y \times X \longrightarrow X$, *kurios s.k.* $s \in [0, 1)$, *t.y. visiems* $y \in Y, f(y, \circ)$ *yra spaudžiantis atvaizdis erdvėje* X. *Jei* $x_f(y)$ *yra nejudamas šios transformacijos taškas, tai atvaizdis* $x_f : Y \longrightarrow X$ *yra tolydi funkcija.*

Kitaip tariant, nejudamas taškas nuo parametro priklauso tolydžiai.

$\ominus$

Turime, kad bet kokiam fiksuotam y, $x_f(y)$ atvaizdžio f nejudamas taškas, erdvėje X. Simboliškai, tai galime užrašyti taip: visiems $y \in Y$ S.A. $f(y, \circ)$ turi nejudamą tašką $x_f(y)$. Tarkime, kad $\epsilon > 0$, bet koks laisvai pasirinktas fiksuotas realus skaičius. Tada visiems $y_1 \in Y$ teisingos tokios nelygybės:

$$\rho\big(x_f(y), x_f(y_1)\big) \leq \rho\big(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y_1)\big) \leq$$

$$\rho\big(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y)\big) + \rho\big(f(y_1, x_f(y)), f(y_1, x_f(y_1)\big) \leq$$

$$\rho\big(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y)\big) + s\rho\big(x_f(y), x_f(y_1)\big),$$

Iš pastarųjų nelygybių gauname

$$\rho\big(x_f(y), x_f(y_1)\big) \leq (1-s)^{-1}\rho\big(f(y, x_f(y)), f(y_1, x_f(y))\big).$$

Matome, kad paskutiniosios nelygybės dešinioji pusė gali būti kiek norimai maža, kai y_1 yra kiek norimai arti y. Taigi $x_f(y) \to x_f(y_1)$, kai tik $y \to y_1$.

$\oplus$

Pavyzdžiui, transformacija $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, apibrėžta lygybe $f(x) = \frac{x}{2} + p$, yra S.A., kuris yra tolydus parametro p atžvilgiu.

Tarkime, kad IAS parametrizuota parametrų aibės P, elementais, t.y $\{X; \omega_{1_p}, \ldots, \omega_{N_p}\}$. Tegu visiems $\epsilon > 0$, egzistuoja $\delta > 0$ tokie, kad

$$\rho_p(p, q) < \delta \Longrightarrow h(\omega_p(B), \omega_q(B)) < \epsilon.$$

Sakykime, kad bet kokiam $p \in P, \omega_{i_p}(\circ)$ yra tolydi funkcija aibėje X. Tarkime, kad egzistuoja $k > 0$, nepriklausantis nuo x ir p toks, kad visiems $x \in X$ ir ω_{i_p} teisinga nelygybė

$$\rho(\omega_{i_p}(x), \omega_{i_q}(x)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Ši nelygybė vadinama Lipšico sąlyga. Pastarosios nelygybės dėka galime gauti įvertį, nepriklausantį nuo kintamojo x. Mes siekiame gauti analogišką nelygybę ir fraktalų erdvėje. Turėdami šį įvertį, 4.10 Teoremą galėtume perrašyti ir fraktalų erdvėje. Norint tai atlikti, mums pakanka įrodyti, kad visiems $B \in H(X)$ teisinga nelygybė:

$$h(\omega_{i_p}(B), \omega_{i_q}(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Žinome, kad

$$h(\omega_p(B), \omega_q(B)) = \rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) \vee \rho(\omega_p(B), \omega_q(B)),$$

kur

$$\rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) = \max_{x \in \omega(B)} \rho(x, \omega_q(B)),$$

$$\rho(x, \omega_q(B)) = \min_{y \in \omega(B)} \rho(x, y).$$

Tarkime, kad $x \in \omega_p(B)$. Tada išplaukia, kad egzistuoja $x_0 \in B$, kuriam teisingas sąryšis: $x \in \omega_p(x_0)$. Beto, egzistuoja taškas $\omega_p(x_0) \in \omega_q(B)$ toks, kad

$$\rho(x, \omega_q(x_0)) \leq k\rho_p(p, q) \Longrightarrow \min_{y \in \omega q(B)} \rho(x, y) \leq \rho(x, \omega_q(x_0)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Iš pastarųjų sąryšių išplaukia, kad

$$\rho(\omega_p(B), \omega_q(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Visiškai analogiškai samprotaudami, gauname įvertį

$$\rho(\omega_q(B), \omega_p(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Iš paskutiniųjų dviejų nelygybių išplaukia, kad

$$h(\omega_p(B), \omega_q(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Remdamiesi pastarąja nelygybe galime tvirtinti, kad 'nežymus' parametro kitimas, esant fiksuotam atvaizdžiui ω_p, 'nežymiai' keičia aibės $B \in H(X)$ vaizdą. Baigtinei atvaizdžių šeimai

$$\omega_{i_p}, \ldots, \omega_{N_p}$$

ir šiuos atvaizdžius atitinkančioms konstantoms $k_1, \ldots, k_N$, kai $k = \max_{i=1,\ldots,N} k_i$ gauname, kad

$$h(\omega_{i_p}(B), \omega_{i_q}(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Galime padaryti išvadą, kad tokių aibių vaizdų sąjungos pokytis, keičiant parametrą vieną kitu, skirsis ne daugiau negu

$$h(W_p(B), W_q(B)) \leq k\rho_p(p, q).$$

Turėdami šį rezultatą, mes 4.12 Teoremos išvadą perrašykime taip:

$$h(A_p, A_q) \leq (1-s)^{-1} h(A_p, W_q(A_p)) \leq (1-s)^{-1} k d_p(p, q)$$

Dabar esame pasiruošę perrašyti 4.10 Teoremą fraktalų erdvėje.

4.11 Teorema *Sakykime, kad (X, ρ) pilna metrinė erdvė ir be to $\{X; \omega_1, \ldots \omega_N\}$ IAS, kurios s.k. s. Tarkime, kad $\omega_n, n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ yra transformacijų seka, priklausanti nuo parametro $p \in (P, \rho_p)$, tenkinanti sąlygą - $\rho(\omega_{n_p}(x), \omega_{n_q}(x) \leq k\rho_p(p, q)$, visiems $x \in X$, be to k nepriklauso nuo n, p ir x. Tada atraktorius $A(p) \in H(X), p \in P$ yra tolydus Hausdorfo metrikos prasme, parametro $p \in P$ atžvilgiu.*

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad mažai pakeitus parametrą, mažai pakinta atraktorius ir taip, kad IAS nėra pažeidžiama. Taigi, mes žinome, kad duotosios IAS atraktorių galime 'tolygiai' kontroliuoti. Tuo pačiu tarpines atraktoriaus padėtis galime interpoliuoti (dėl tolydumo), o tai praktiškai gali būti naudojama animacijoje, priverčiant figūras judėti.

Tarkime, $\{\mathcal{R}^2; \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ kuri nors IAS. Parinkime bet kokią kompaktišką aibę $A_0 \subset \mathcal{R}^2$. Sudarykime kompaktiškų aibių seką $A_n = W^n(A_0)$, tokiu būdu:

(6)
$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j(A_n), \; j = 1, 2, \ldots.$$

Tokiu būdu, mes fraktalų erdvėje konstruojame kompaktiškų aibių seką:

$$\{A_n : n = 0, 1, \ldots\} \subset H(\mathcal{R}^2).$$

Be to, žinome, kad paskutinioji aibių seka konverguoja (hausdorfo metrikos prasme) į IAS atraktorių.

Tarkime IAS apibrėžta tokiu būdu:

$$\omega_i(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i x + t_i, \; i = 1, 2, 3.$$

Tegu $a_i = d_i = 0.5$, $b_i = c_i = 0$, $e_1 = f_1 = 1$, $e_2 = 1, f_2 = e_3 = f_3 = 50$, $i = 1, 2, 3$. Tarkime, kad auksčiau minėtoji aibė A_0 yra kvadratas. 4.6 pav. pateikiame (9) IAS iteracijas.

IAS atraktoriui, modeliuoti yra naudojamas ir taip vadinamas chaoso žaidimas. Trumpai aprašysime jo esmę. Tarkime, kad duota IAS $\{X; \omega_n : n = 1, \ldots, N\}$. Be tarkime, kad $\{p_i : i = 1, \ldots, N\}$ yra tokie skaičiai, kad

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1, p_i > 0, \; i = 1, \ldots, N.$$

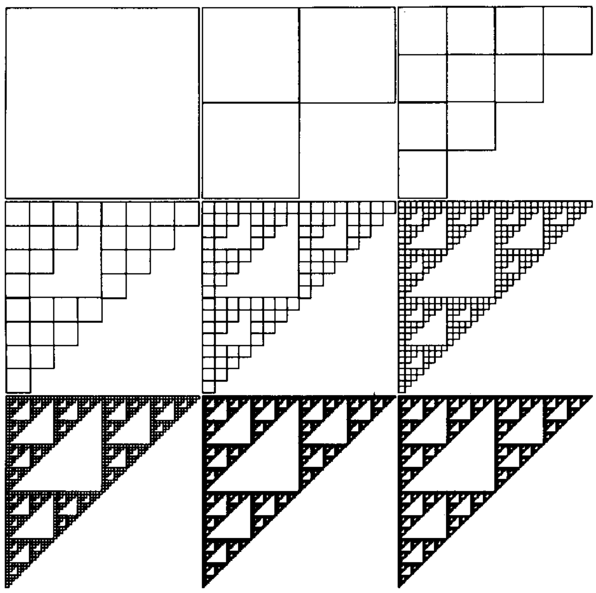
Tarkime, kad nagrinėjama IAS yra apibrėžta afininėmis transformacijomis. Apibrėžkime minėtuosius skaičius tokiu būdu:

(6)
$$p_i = \frac{\det A_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} |\det A_i|}.$$

Tarkime, kad $x_0 \in X$ bet koks, laisvai pasirinktas skaičius. Tada parinkime $x_n \in \{\omega_1(x_{n-1}), \ldots, \omega_N(x_{n-1})\}$, kai $n = 1, 2, \ldots$. Skaičiaus $x_n = \omega_i(x_{n-1})$ parinkimo dažnumas nusakomas tikimybe p_i. Tokiu būdu sukonstruojame seką $\{x_n\} \in X$. Tarkime, kad duota SIAS $\{X; \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Laikome, kad ir $p_i > 0$ visiems $i = 1 \ldots, n$ ir p_i apibrėžti (6) lygybėmis. Beje, kai reikšmė $\omega_0(x_{n-1}) = x_n$, kokiam nors n, tai tuomet x_n turėtų priklausyti sankaupos aibei. Be to seka $\{x_n\}$ konverguoja į SIAS atraktorių. Beje, jei koks nors $\det A_i = 0$, tai šiuo atveju parenkama maža (bet ne nulinė) skaičiaus $\omega_i(x_{n-1}) = x_n$ pasirodymo tikimybė. 4.8 paveikslėlyje iliustruojama, kaip didinant iteracijų skaičių "gimsta" lapas, realizuojamas transformacijomis

$$\omega_i(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i x + t_i, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Transformacijų duomenys pateikti 4.7 lentelėje.



4.6 pav.

ω_i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	p_i
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

4.7 pav.

4.8 pav.

Beje, tą patį paparčio lapą galime modeliuoti ir kitu (deterministiniu) būdu. Tarkime, kad IAS apibrėžta transformacijomis

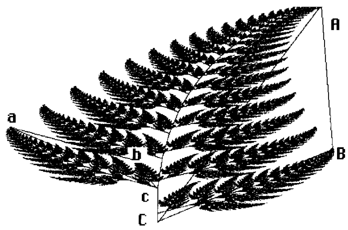
$$\omega_i(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\sin\theta \\ r\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

4.9 pav. pateikiama lentelė, kurioje nurodytos šių transformacijų parametrų reikšmės.

4.10 pav. pateiktas šios IAS atraktorius. Šiame brėžinyje demonstruojama, kaip transformacija trikampį ABC atvaizduoja į trikampį abc.

ω_i	h_i	k_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.16
2	0.00	1.6	-2.5	-2.5	-2.5	0.85
3	0.00	1.6	49	49	0.3	0.34
4	0.00	0.44	120	-120	0.3	0.37

4.9 pav.



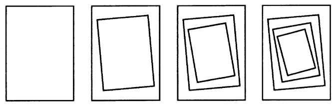
4.10 pav.

Uždaviniai

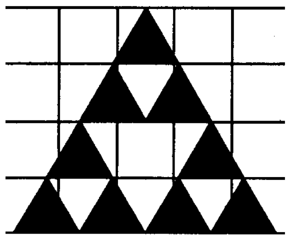
1. Nurodykite suspaudžiančių transformacijų seką, kuri vienetinį apskritimą, kurio centras taške $(2, 2)$, suspaustų į tašką $(2, 2)$.

2. Raskite transformacijos $f_p(x) = \frac{x}{2} + p$ nejudamą tašką.

3. Tarkime, kad A yra stačiakampis, žr. pav. žemiau, kurio matmenis pasirenkate patys. Tarkime, kad kiekviename iteraciniame žingsnyje, transformacija suspaudžia prieš tai buvusio stačiakampio 10% ilgio ir tiek pat pločio bei pasuka 10^0 kampu teigiamąja kryptimi. Raskite šią transformacijų seką. Sudarykite programą, generuojančią šią seką.



3. Raskite afininių transformacijų seką, kuri generuotų Sierpinskio trikampį. Šios iteracijos antrasis žingsnis pateikiamas paveikslėlyje žemiau.



4. Apibrėžkite IAS, kuri generuotų Kocho kreivę, pavaizduotą 1.7 pav.

5. Tarkime, kad duotas vienetinis apskritimas, kurio centras taške $(0, 1)$. Nurodykite transformacijų seką, kuri šį apskritimą ridentų Ox ašimi. (Posūkio kampą pasirinkite savo nuožiūra).

6. Tarkime, kad duotas vienetinis apskritimas, kurio centras taške $(0, 1)$ ir apskritimas, kurio spindulys $r = 0.25$, o centras taške $(0, 0.25)$. Raskite transformaciją, kuri mažesnį apskritimą ridentų vienetinio apskritimo vidine lanko dalimi.

7. Apibrėžkite transformacijų seką, kuri vienetinį apskritimą esantį plokštumoje yz, kurio centras taške $(0, 1)$ suktų apie tašką $(0, 0)$.

8. Apibrėžkite transformaciją, kurios iteracinė seka apskritimą

$$y^2 + (z-1)^2 = 1$$

vartytų Ox ašimi.

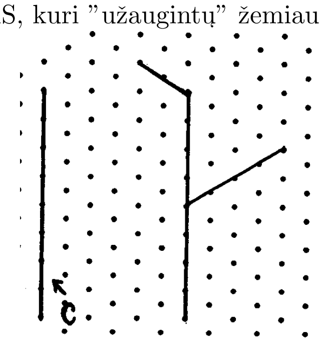
9. Nurodykite transformacijų seką, kuri sferą

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

ridentų tiese

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

10. Nurodykite SIAS, kuri "užaugintų" žemiau pateiktą medį:



4

11. Aprašykite algoritmą, kurį realizuojant medis, sudarytas 8. užduotyje, "svyruotų vėjyje." Kaip reikėtų papildyti apibrėžtas transformacijas, kad tai būtų įmanoma realizuoti, vykdant programą.