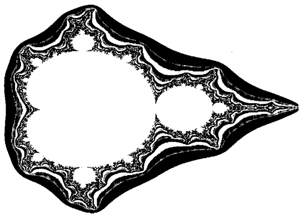


Gintautas Bareikis

FRAKTALAI

Paskaitų konspektas

Vilniaus Universitetas, Matematikos fakultetas

2002.01.01

Turinys

I. ĮVADAS
1.1 Logikos ir aibių teorijos sąvokos ... 3
1.2 Sąryšiai ir atvaizdžiai ... 4
1.3 Metrinės erdvės ... 5
1.4 Aplinkos ... 7
1.5 Tolydieji atvaizdžiai ... 9
1.6 Homeomorfizmai. Ekvivalenčios metrikos ... 9
1.7 Sekos. Pilnos erdvės ... 10
1.8 Pratęsimo teorema. Kompaktai ... 11
1.9 Jungios erdvės ir jungios aibės ... 13
1.10 Klasikiniai pavyzdžiai ... 14
II. FRAKTALŲ METRINĖ ERDVĖ
2.1 Hausdorfo metrika ... 20
2.2 Fraktalų erdvės pilnumas ... 22
III. TRANSFORMACIJOS
3.1 Transformacijos realiųjų skaičių aibėje ... 29
3.2 Transformacijos erdvėje $\overline{\mathcal{C}}$ ... 30
3.3 Tiesinės algebros ir analizinės geometrijos sąvokos ... 34
3.4 Afininės transformacijos ... 37
3.5 Ortogonaliųjų Dekarto koordinačių transformacijos ... 40
3.6 Bendrosios koordinačių transformavimo formulės ... 45
IV. SUSPAUDŽIANTYS ATVAIZDŽIAI
4.1 Suspaudžiantys atvaizdžiai metrinėse erdvėse ... 48
4.2 Suspaudžiantys atvaizdžiai metrinėje fraktalų erdvėje ... 51
4.3 Iteracinės atvaizdžių sistemos (IAS) ... 52
4.4 Sankaupos aibės ... 54
4.5 Fraktalų modeliavimo teorema ... 58
4.6 Plevenimas vėjyje. Fraktalai priklausantys nuo parametro ... 60
V. ADRESAI FRAKTALUOSE. DINAMINĖS SISTEMOS
5.1 Taško adresas fraktale ... 66
5.2 Dinaminės sistemos ... 72
VI. JULIJAUS AIBĖS
6.1 Konvergavimo bei divergavimo aibės. Kintamojo laiko algoritmas (KLA) ... 78
6.2 IAS, kurių atraktoriai yra Julijaus aibės ... 86
6.3 Julijaus aibės ir Niutono metodas ... 91
6.4 Invariantinės aibės- galimi fraktalų šaltiniai ... 92
VII. MANDELBROTO AIBĖS
7.1 Parametrinės aibės žemėlapis ... 95
7.2 Julijaus ir Mandelbroto aibių ryšys ... 98
7.3 Kintamo laiko algoritmo taikymas fraktalų šeimos, priklausančios nuo parametro, grafiniam vaizdui nustatyti ... 101
VIII. FRAKTALINĖ DIMENSIJA
8.1 Fraktalinės dimensijos samprata. ... 105
8.2 Nulinio mato aibės. Nulinio mato aibių denginiai. ... 106
8.4 Hausdorfo- Bisiechovičiaus dimensija (H-B). H-B ir fraktalinės dimensijos ryšys. ... 108
IX. FRAKTALŲ INTERPOLIAVIMAS
9.1 Atraktorius konstravimas naudojant duomenų aibę. ... 121
9.2 Interpoliacinių funkcijų fraktalinė dimensija. ... 125
9.3 Fraktalų interpoliavimas naudojant "paslėptą" parametrą. ... 126
9.4 Plokščios srities "uždengimas" kreive. ... 130
Literatūra

Paskaitų konspektas yra skiriamas studijuojantiems gamtos specialybes, todėl įvadinėje dalyje skaitytoją supažindinsime, o kai kam priminsime, naudojamas sąvokas bei matematinius terminus.

ĮVADAS

1.1 Logikos bei aibių teorijos sąvokos

Aibe vadinsime, bet kokį objektų rinkinį. Objektai sudarantys minėtąjį rinkinį vadinami aibės *elementais*. Ateityje aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o jos elementus mažosiomis. Taisyklę, kuria vienos aibės elementui priskiriamas vienas kitos (arba tos pačios) aibės elementas, vadinsime *funkcija*.

Matematikos tyrimo objektas - *teiginiai*, t.y. sakiniai, kurie yra teisingi arba klaidingi. Priminsime, kad pradiniai, apriori (iš anksto) teisingi teiginiai, vadinami *aksiomomis* arba elementariaisiais teiginiais. Teiginių aibėje apibrėžkime operacijas, kurių atžvilgiu ši aibė būtų uždara. Kitaip tariant, atlikdami veiksmus su teiginiais gausime teiginį, kurį vadinsime *sudėtiniu teiginiu* arba *logine forma*.

Teiginių veiksmai

1. *Neigimo operacija*. Tarkim duotas teiginys p. Tuomet sakinį " ne p " (žymėsime $\overline{p}$) vadinsime duotojo teiginio neiginiu. Jo teisingumo reikšmė priešinga teiginio p reikšmei.

2. *Teiginių disjunkcija*. Sakinį " p arba q " vadinsime teiginių p, q disjunkcija, (žymėsime $p \vee q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q yra klaidingi.

3. *Teiginių konjunkcija*. Sakinį " p ir q " vadinsime šių teiginių konjunkcija (žymėsime $p \wedge q$). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q teisingi.

4. *Teiginių implikacija*. Sakinį "jei p, tai q " vadinsime šių teiginių implikacija (žymėsime $p \Rightarrow q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tik tuo atveju, kai p klaidingas, o q teisingas.

5. *Teiginių ekvivalencija*. Sakinį " p tada ir tik tada kai q " vadinsime šių teiginių ekvivalencija (žymėsime $p \Leftrightarrow q$). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa.

Sakinį, " a yra aibės A elementas " trumpinsime tokiu būdu: $a \in A$. Jeigu elemento b nėra aibėje B, tai pastarąjį sakinį trumpinsime taip: $b \notin B$. Sakinį " visi aibės A elementai turi savybę nurodytą daugtaškio vietoje " trumpinsime $\forall a \in A, \ldots$ o sakinį "yra aibėje A elementas, turintis savybę, nurodytą daugtaškio vietoje " trumpinsime taip: $\exists a \in A, \ldots$. Simbolinis užrašas $\exists x \in A \ldots$ reiškia sakinį, kad yra aibėje A bent vienas elementas turintis savybę, nurodytą daugtaškio vietoje. Beje, daugtaškio vietoje nurodomos sąlygos yra sakiniai, priklausantys nuo kintamojo x, kurie tampa teiginiais, kai nurodomos konkrečios kintamųjų reikšmės. Tarkime, kad daugtaškio vietoje nurodyta kokia nors sąlyga $P(x)$. Pažymėkime simboliu S_1 teiginį " $\forall x \in A, P(x)$. " Tada $ne\, S_1$ reiškia tokį teiginį " $\exists x \in A, ne\, P(x)$ " ir atvirkščiai, jeigu S_2 yra teiginys " $\exists x \in A, P(x)$ ", tai $ne\, S_2$ reiškia teiginį "$\forall x \in A, ne\, P(x)$. "

Naudodamiesi aukščiau pateiktais žymėjimais aibę galime užrašyti tokiu būdu: $A = \{x, x \in A\}$. Aibę turinčią vieną elementą, tarkime a, žymime taip: $A = \{a\}$. Aibę $\emptyset = \{x, x \neq x\}$ vadinsime *tuščia*.

Aibių veiksmai

Sakysime, kad aibė A yra aibės B *poaibis* (žymėsime $A \subset B$), jeigu visiems $x \in A$ išplaukia, kad $x \in B$. Aibių A ir B *sankirta* (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę $C = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$. Aibę $D = \{x, x \in A \vee x \in B\}$ vadinsime *aibių sąjunga*, kurią žymėsime $A \cup B$. Sakysime, kad aibės *nesikerta*, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe. Aibių A ir B *skirtumu*, kurią žymėsime $A \setminus B$, vadinsime aibę $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$. Aibės A *papildiniu*, kurią žymėsime A^c, vadinsime aibę $A^c = \{x, x \notin A\}$. Tarkime, kad A kokia nors aibė. Bet kokią aibių šeimą vadinsime *klase* (kodėl ne aibe?) ir žymėsime didžiąja, rašytine, lotyniškosios abėcėlės raide, pavyzdžiui, $\mathcal{A}$.

Tarkime $\mathcal{N}-$ natūraliųjų skaičių aibė. Tada, bet kokį šios aibės poaibį $\Lambda \subset \mathcal{N}$, vadinsime *indeksų aibe*. Tarkime, kad apibrėžta funkcija $f : \Lambda \to \mathcal{A}$. Tada aibę $\{X_\lambda \in \mathcal{A}, \lambda \in \Lambda\}$ vadinsime klasės $\mathcal{A}$ elementų seka, jeigu aibė Λ begalinė, ir elementų rinkiniu, jeigu aibė Λ baigtinė.

Apibrėžkime:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \exists \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}$$

ir

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \forall \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}.$$

Aibių A ir B simetriniu skirtumu vadinsime aibę $A \nabla B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Aibių veiksmų savybės
1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.
2. $A \nabla B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $\big(A^c\big)^c = A$.
4. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Tarkime, kad Λ indeksų aibė ir $\forall \lambda \in \Lambda, D_\lambda \subset \mathcal{D}$, čia $\mathcal{D}$ kokia nors aibės D poaibių klasė. Teisingi tokie teiginiai:

$$8. \quad D \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

$$9. \quad D \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

Sakykime, kad $\{A_n\}$ kokia nors klasės $\mathcal{A}$ elementų seka.

Apibrėžimas *Elementų, kurie priklauso begaliniam aibių A_n skaičiui, aibę vadinsime limit superior arba viršutine aibių sekos $\{A_n\}$ riba, kurią žymėsime* $\limsup A_n$. *Kitaip tariant, egzistuoja aibė $\Lambda \subset \mathcal{N}$ tokia, kad visiems $\lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda$.*

Apibrėžimas *Elementų, kurie priklauso sankirtai $\cap_{n>n_0} A_n$, aibę, čia n_0 kuris nors baigtinis skaičius, vadinsime aibių sekos apatine riba (limit imperior), kurią žymėsime* $\liminf A_n$. *Kitaip tariant, jeigu x priklauso aibių sekos apatinei ribai, tai šis elementas priklauso visoms aibėms išskyrus, galbūt, baigtinį jų skaičių.*

Formaliai šiuos apibrėžimus galime užrašyti taip:

$$\limsup A_n = \bigcap_{m \geq 1} \Big(\bigcup_{n \geq m} A_n \Big),$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{m \geq 1} \Big(\bigcap_{n \geq m} A_n \Big).$$

1.2 Sąryšiai ir atvaizdžiai.

Tarkime, kad $x \in X$, o $y \in Y$. Simbolį (x, y) vadinsime aibių X, Y *elementų pora*. Pastebėsime, kad aibės X ir Y nebūtinai skirtingos.

Porų aibėje lygybės operaciją apibrėžkime tokiu būdu: dvi poras (a, b) ir (x, y) laikysime lygiomis tada ir tik tada, kai $a = x$ ir $b = y$. Priešingu atveju poras laikysime skirtingomis. Porų aibę, kurioje apibrėžta lygybės operacija, vadinsime sutvarkyta.

Tarkime A, B dvi aibės, nebūtinai skirtingos. Aibių A, B *Dekarto sandauga* vadiname tokią sutvarkytų porų aibę $A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$.

Sakykime, kad T yra aibės X, kokia nors, elementų porų aibė. Tada porų aibę T vadinsime *sąryšiu*, apibrėžtu aibėje X. Jeigu $(x, y) \in T$, tai patogu žymėti xTy. Tarkime, kad T yra sąryšis apibrėžtas aibėje X. Tada aibę $\{x; (x, y) \in T\}$ vadinsime sąryšio *apibrėžimo aibe*, o aibę $\{y; (x, y) \in T\}$ šio sąryšio *reikšmių aibe*. Sąryšį T vadinsime *tvarkos sąryšiu*, jeigu:

1) bet kokiems X elementams a, b turintiems savybę aTb ir bTa išplaukia, kad šie du elementai sutampa, (sąryšis turintis šią savybę vadinamas *simetriniu*)

2) jei $a, b, c \in X$ tai iš to, kad aTb ir bTc išplaukia, jog aTc (toks sąryšis vadinamas *tranzityviu*).

Jeigu visiems $a, b \in X, a \neq b$ teisingas tik vienas iš sąryšių aTb arba bTa tai tokį sąryšį vadinsime *tiesinės tvarkos sąryšiu*, o aibę X vadinsime *tiesiškai sutvarkyta* aibe.

Pastebėsime, kad sąryšis T aibėje X turi savybę: $T \subset X \times X$.

Sąryšį T, aibėje A, vadinsime *ekvivalentumo sąryšiu*, jeigu jis 1) simetrinis, 2) tranzityvus ir 3) visiems $a \in A$, aTa (refleksyvus).

Aibę $T^{-1} := \{(y,x); (x,y) \in T\}$ vadinsime *atvirkštiniu sąryšiui* T, o aibę $T \circ S := \{(x,y); \exists z, (x,z) \in T \wedge (z,y) \in S\}$ vadinsime *sąryšių* T *ir* S *kompozicija.*

Apibrėžimas *Tarkime* A, B *bet kokios aibės. Taisyklę* f*, kuria remiantis aibės* A *elementams priskiriami aibės* B *elementai vadinsime atvaizdžiu, apibrėžtu aibėje* A *ir įgyjančiu reikšmes aibėje* B*. Žymėsime* $f : A \to B$*. Elementui* $a \in A$ *priskiriamą elementą* $b \in B$ *žymėsime* $f(a)$ *arba* $b = f(a)$*. Sakysime, kad* $f(a)$ *yra elemento* a *vaizdas, o* a *yra elemento* $b = f(a)$ *pirmvaizdis.*

Atvaizdžio f pirmvaizdžių aibė paprastai žymima $D(f)$ ir vadinama atvaizdžio apibrėžimo aibe (sritimi). Atvaizdžio *reikšmių aibė* $E(f)$ yra aibės B poaibis, kurios visi elementai turi pirmvaizdžius, $E(f) = \{f(x); x \in A\}$. Mes žymėsime šią aibę $E(f)$.

Tarkime, kad atvaizdis $f : A \longrightarrow B$. Tada atvaizdį $f^{-1} : B \longrightarrow A$ vadinsime atvaizdžiui f *atvirkštiniu atvaizdžiu,* jeigu $f^{-1}(y) = x$ tada ir tik tada , kai $f(x) = y$. Pastebėsime, kad pirmojo skyrelio pradžioje pateiktas funkcijos apibrėžimas tėra atskiras atvaizdžio atvejis. Aibę $G(f) := \{(x,y); x \in D(f); y \in E(f)\}$ vadinsime atvaizdžio grafiku.

Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *siurjekcija*, jeigu $D(f) = X$ ir $E(f) = Y$. Jeigu $f : X \to Y$ yra siurjekcija, tai tada žymėsime, $f(X) = Y$.

Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *injekcija*, jeigu skirtingi pirmvaizdžiai turi skirtingus vaizdus ir atvirkščiai. Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *bijekcija*, jeigu jis yra injekcija ir siurjekcija kartu. Pastarasis atvaizdis dar vadinamas abipus *vienareikšme atitiktimi.*

Nesunku matyti, kad tarp atvaizdžių ir jų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. T.y. skirtingi atvaizdžiai apibrėžia skirtingus grafikus ir atvirkščiai. Dėl šios priežasties, ateityje, šias sąvokas dažnai tapatinsime, jei tai nesudarys painiavos, kadangi skaitytojas, manome, atkreipė dėmesį į tai, kad atvaizdis ir jo grafikas yra skirtingos sąvokos.

Atvaizdžių savybės

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Jeigu atvaizdis yra bijekcija, tai

3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$.

1.3 Metrinės erdvės

Tarkime, kad E netuščia aibė. Jos elementus vadinsime taškais.

Tarkime, kad $\mathcal{R}$ realiųjų skaičių aibė.

Apibrėžimas *Funkciją* $\rho : E \times E \to \mathcal{R}$*, kuri su bet kokia pora* $(x,y) \in E \times E$ *tenkina reikalavimus*
1) $0 \le \rho(x,y) < \infty$,
2) $\rho(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$,
3) $\rho(y,x) = \rho(x,y)$,
4) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y), \quad x,y,z \in X$,
vadinsime metrika apibrėžta aibėje E*.*

Vėliau gana dažnai teks naudoti nelygybę:

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y),$$

kurios įrodymą paliekame skaitytojui.

Apibrėžimas *Tarkime, kad aibėje* E *apibrėžta metrika* ρ*. Tada porą* (E,ρ) *vadinsime metrine erdve. Metrikos reikšmę, bet kokiai erdvės taškų porai, vadinsime atstumu tarp erdvės taškų. Metrikos apibrėžimą, aibėje, vadinsime metrizavimu.*

Metrinių erdvių pavyzdžiai.

1. Tarkime x, y bet kokie realieji skaičiai. Apibrėžkime metriką tokiu būdu $\rho_1(x,y) = |x - y|$. Tada pora $(\mathcal{R}, \rho_1)$ yra metrinė erdvė.

2. Pažymėkime $\mathcal{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathcal{R}, i = 1 \ldots n$. Šią aibę vadinsime $n-$ mate vektorine erdve. Atstumą tarp šios erdvės taškų apibrėžkime tokiu būdu: $\rho_n(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. Tuomet $(\mathcal{R}^n, \rho_n)$ - metrinė erdvė.

3. Tegu $\mathcal{R}^n-$ vektorinė erdvė. Apibrėžkime metriką taip: $\rho_M(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$. Gausime dar vieną metrinę erdvę $(\mathcal{R}^n, \rho_M(x,y))$. Pastarosios erdvės metrika vadinama Manhatano vardu.

4. Tolydžiųjų funkcijų erdvėje $C := C[0,1]$ galima tokia metrika: $\rho_c(f,g) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|, f, g \in C$. Tada (C, ρ_c) metrinė erdvė.

5. Funkcijų, apibrėžtų intervale $[0,1]$, ir neturinčių antros rūšies trūkio taškų, tolydžių iš dešinės bet kokiame intervalo taške, išskyrus $x = 1$, kuriame funkcijos tolydžios iš kairės, aibę žymėsime $D = D[0,1]$. Šioje erdvėje metrika gali būti nusakyta tokiu būdu:

$$\rho_d(f,g) = \inf_{l\in\Lambda} \{\max\{\sup_{t\in[0,1]} |f(l(t)) - g(t)|, \sup_{t\in[0,1]} |l(t) - t|\}\},$$

čia Λ - tolydžių, griežtai didėjančių, turinčių savybes $l(0) = 0, l(1) = 1$, funkcijų aibė. Tada (D, ρ_d) metrinė erdvė.

6. Sakykime, kad E_t kokia nors aibė. Atstumą tarp bet kurių šios aibės elementų apibrėžkime taip:

$$\rho_t(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Tada porą (E_t, ρ_t) vadinsime *diskrečiąja* metrine erdve.

7. Tegu $\mathcal{C}$ kompleksinių skaičių aibė. Šią aibę galime metrizuoti naudodami pavyzdžiui, metriką ρ_2, kuri apibrėžta 2.

8. Fiksuokime N pirmųjų natūraliųjų skaičių. Sudarykime begalines sekas

$$x = i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, \quad i_j \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Šių sekų aibę žymėsime simboliu Σ_N. Pastaroje aibėje apibrėžkime metriką tokiu būdu:

$$\rho_\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i},$$

čia $x, y \in \Sigma_N$. Tada (Σ_N, ρ_Σ) yra metrinė erdvė.

Apibrėžimas *Sakykime, kad (E_1, ρ_1) ir (E_2, ρ_2) dvi metrinės erdvės. Tuomet bijekciją $f : E_1 \longrightarrow E_2$, vadinsime erdvių izometrija (trumpumo dėlei tiesiog izometrija), jeigu bet kokiai erdvės E_1 elementų porai x, y teisinga lygybė:*

$$\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y)).$$

Pastebėkime, kad šiuo atveju atvirkštinis atvaizdis taip pat yra erdvių izometrija. Metrines erdves, tarp kurių galime apibrėžti izometriją, vadinsime izometrinėmis.

Taigi, jei erdvės izometrinės, tai erdvių elementų metrinės savybės nepriklauso nuo erdvės, kurioje jas nagrinėjame (pradinėje ar jai izometrinėje). Dar daugiau, jeigu (E, ρ) metrinė erdvė, o $f : E \longrightarrow E'$, tai mes galime 'pasigaminti' erdvę, izometrinę pradinei, apibrėžę atstumą tarp dviejų taškų erdvėje E', tokiu būdu: $\rho(x', y') = \rho(x,y)$, kur $x' = f(x), y' = f(y)$.

Pateiksime pavyzdį. Pažymėkime:

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

čia $\mathcal{R}$ realiųjų skaičių aibė, o $\pm\infty$ kokie nors simboliai, kurie nėra realūs skaičiai ir turi savybę $-\infty < x < \infty, x \in \mathcal{R}$. Aibė $\overline{\mathcal{R}}$ vadinama išplėstine realiųjų skaičių aibe, o simboliai $\pm\infty$ vadinami begaliniais išplėstinės, realiųjų skaičių, aibės elementais. Apibrėžkime bijekciją f realiųjų skaičių aibėje, kurios reikšmės priklausytų intervalui $(-1,1)$, tokiu būdu:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Pratęskime funkciją f iš $\mathcal{R}$ į aibę $\overline{\mathcal{R}}$ taip, kad $f(+\infty) = 1, f(-\infty) = -1$. Taigi, $f : \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow [-1,1]$ yra bijekcija. Intervalas $[-1,1]$ yra metrinė erdvė, kurios metrika yra $\rho_1(x,y)$. Beje, erdvę $\overline{\mathcal{R}}$ galime metrizuoti tokia metrika: $\overline{\rho}(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Porą $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ vadinsime išplėstine realiųjų skaičių, metrine erdve. Skaitytojui priminsime, kad šioje erdvėje laikoma, kad $x' \le y'$ tada ir tik tada, kai $x \le y$, čia $x' = f(x), y' = f(y)$.

Realiųjų skaičių aibės $A \subset \mathcal{R}$ *viršutiniu* (*apatiniu*) rėžiu vadinsime skaičių $x'(x'')$ tokį, kad visiems $x \in A, x \le x'(x > x'')$. Pats mažiausias (didžiausias) viršutinis (apatinis) rėžis vadinamas *tiksliuoju viršutiniu* (*apatiniu*) rėžiu ir žymimi $M = \sup A$, $(m = \inf A)$. Aibę vadiname aprėžta iš viršaus (apačios), jei ji turi viršutinį (apatinį) rėžį. Realiųjų skaičių aibę vadinsime aprėžta, jeigu pastaroji aprėžta iš viršaus ir apačios. Pastebėsime, kad bet koks metrinės erdvės $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ poaibis yra aprėžta aibė.

1.4 Aplinkos

Mes nagrinėjame metrinių erdvių savybes, todėl aplinkos, bei atviros aibės sąvokas apibrėšime remdamiesi metrikos apibrėžimu.

Apibrėžimas *Metrinės erdvės E aibę $B(a,r) = \{x \in E; \rho(a,x) < r\}$ vadinsime atviru rutuliu (ateityje tiesiog rutuliu), su centru taške a, o aibę $\overline{B}(a,r) = \{x \in E; \rho(a,x) \le r\}$ - uždaru rutuliu. Aibė $S(a,r) = \{x \in E; \rho(a,x) = r\}$ vadinama sfera, kurios centras taške a. Bet kokį atvirą rutulį, kuriam priklauso taškas x_0, vadinsime šio taško aplinka.*

1. Metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_2)$ atviras rutulys yra tokia aibė: $\{(x,y); x^2 + y^2 < r\}$.

2. Erdvėje $\overline{\mathcal{R}}$ atviras rutulys, kurio centras $+\infty$ ir spindulys $r < 1$, yra aibė $x \in (\frac{1-r}{r}, +\infty)$.

3. Diskrečioje erdvėje, kurios metrika ρ_t uždaras arba atviras rutulys, kurio centras taške a, o spindulys $r < 1$ yra tiesiog taškas a. Pastebėkime, kad šiuo atveju sfera - tuščia. Tada, kai $r \ge 1$, tai uždaras ir atviras rutuliai sutampa su erdve E_t. Beje, sfera yra tuščia, kai $r > 1$ ir $S(a,r) = E_t \setminus \{a\}$, kai $r = 1$.

Apibrėžimas *Tašką a vadiname vidiniu aibės A tašku, jeigu egzistuoja atviras rutulys $B(a,r) \subset A$, kuriam priklauso šis taškas.*

Apibrėžimas *Aibę vadinsime atvira, jeigu visi jos taškai yra vidiniai.*

Aibės A vidinių taškų aibę, žymėsime A° ir vadinsime aibės A *vidumi*. Aišku, kad $A^\circ \subset A$. Be to, aibės vidus yra didžiausia atvira aibė, kuri yra duotosios aibės poaibis.

Aibę $A' \subset B$ vadinsime *uždara*, jeigu jos papildinys, iki aibės B, yra atvira aibė.

Pavyzdžiui, bet koks uždaras rutulys yra uždara aibė. Intervalai $[a, +\infty), (-\infty, a]$ yra uždaros aibės realiųjų skaičių aibėje. Beje, intervalas $[a,b)$ yra nei uždaras nei atviras realiųjų skaičių aibėje.

Tarkime, kad (E,ρ) yra kokia tai metrinė erdvė. Sakysime, kad aibė $A \subset E$ yra *aprėžta*, jeigu egzistuoja rutulys $B(a,r)$ toks, kad $A \subset B(a,r)$. Netuščios aibės A *diametru* vadinsime aibės $\overline{\mathcal{R}}$ elementą: $\delta(A) := \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x,y)$. Iš diametro apibrėžimo išplaukia, kad $\delta(A) \in [0, +\infty]$. Naudodami diametro apibrėžimą galime kiek kitaip charakterizuoti aibės aprėžtumo sąvoką. Taigi, jei aibės diametras baigtinis skaičius, tai aibė aprėžta ir jei jos diametro reikšmė lygi $+\infty$, tai aibė neaprėžta.

Apibrėžimas *Metrinės erdvės (E,ρ) atvirų rutulių šeimą $\mathcal{T}$ vadinsime metrinės erdvės fundamentaliąja aplinkų sistema, jeigu bet kokią erdvės atvirą aibę galime užrašyti šios šeimos aibių, baigtine arba begaline sąjunga. Sakysime, kad erdvė turi skaičią bazę, jeigu klasę $\mathcal{T}$ sudaro skaiti aibių šeima.*

Apibrėžimas *Atstumu tarp aibės $A \subset E$ ir taško $x \in E$ vadiname skaičių $d(x,A) := \inf_{y \in A} \rho(x,y)$.*

Beje, jeigu taškas $x \notin B(a,r)$, tai $d(x, B(a,r)) \ge \rho(a,x) - r$.

Įrodykime tokį teiginį.

1.1 Teorema *Tarkime duota atvirų aibių šeima $\{A_\lambda, \lambda \in L\}$, čia $L-$ indeksų aibė. Tada aibė $\cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ yra atvira.*

$\ominus$

Tarkime, kad $x \in A_{\lambda_0}$. Tuomet egzistuoja teigiamas skaičius $r > 0$, kad

$$B(x,r) \subset A_{\lambda_0} \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Taigi, A atvira.

$\oplus$

Pateiksime pavyzdį. Intervalas $(a, +\infty) \subset \mathcal{R}$ yra atvira aibė, kadangi ją galime užrašyti tokiu būdu:

$$(a, +\infty) = \bigcup_{x>a} (a, x).$$

Atkreipsime dėmesį, kad diskrečios metrinės erdvės bet koks poaibis yra atvira aibė. Pavyzdžiui $\{a\} = B(a, 0.5)$.

1.2 Teorema *Bet kokios uždarų aibių šeimos sankirta yra uždara, ir tik baigtinio skaičiaus uždarų aibių sąjunga- uždara.*

$\ominus$

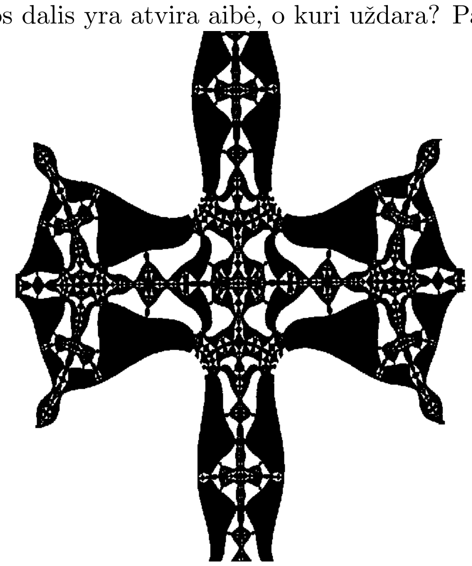
Šios teoremos įrodymą paliekame skaitytojui.

Tuo atveju, kai aibę sudaro vienas elementas $\{x\}$, tai šią aibę galime užrašyti tokiu būdu: $\bigcap_{r>0} \overline{B}(x, r)$.

Pastebėkime, kad diskrečioje erdvėje, bet kokia aibė uždara ir atvira tuo pat metu. Beje, visa erdvė ir tuščia aibė kartu uždaros ir atviros. Tarkime, kad A yra erdvės (E, ρ) aibė. Tašką $x \in E$

vadinsime šios aibės ribiniu tašku, jeigu bet kokia šio taško aplinka kertasi su A. Kitaip tariant, šio taško aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas (gal būt ir jis pats). Visų aibės A ribinių taškų aibė yra vadinama jos *uždariniu* ir žymima A^u. Teigdami, kad $x \notin A^u$ kartu tvirtiname, jog $x \in (E \setminus A)^0$. Taigi, uždarinys - uždara aibė. Nesunku suprasti, kad $A^0 \subset A^u$. Kokia bebūtų aibė A, A^u yra mažiausia uždara aibė turinti savybę: $A \subset A^u$. Taigi, uždaras aibes galime charakterizuoti ir taip: aibė uždara tada ir tik tada, kai $A = A^u$. Verta pastebėti ir tokią, metrinės erdvės savybę - taškas x priklauso aibės A uždariniui tada ir tik tada, kai $d(x, A) = 0$.

Kuri iš 1.1 pav. pateiktos figūros dalis yra atvira aibė, o kuri uždara? Pateikite savo interpretaciją.



1.1 pav.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibių seka* $\{A_l, l \in L\}$ *yra mažėjanti (didėjanti) , jeigu* $\{A_{l_1} \supset A_{l_2} \dots, l_1 < l_2 \dots\}$ $(\{A_{l_1} \subset A_{l_2} \dots, l_1 < l_2 \dots\})$.

Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad metrinėje erdvėje bet kokia uždara aibė yra mažėjančių atvirų aibių sankirtos rezultatas ir bet kokia atvira aibė yra didėjančių uždarų aibių sąjungos rezultatas. Pastarąjį teiginį galima įrodyti naudojant aibes $V_{\frac{1}{n}}(A) := \{x \in A; d(x, A) < \frac{1}{n}\}$.

1.3 Teorema *Jeigu ribinis aibės A taškas x nepriklauso aibei A, tai šio taško bet kokioje aplinkoje yra begalo daug aibės A taškų.*

$\ominus$

Tarkime, kad ribinio taško aplinkoje yra baigtinis aibės A taškų skaičius. T.y. egzistuoja $r > 0$ toks, kad $\{y_1 \dots y_n\} = B(x, r)$, $B(x, r)$ yra atviras rutulys. Iš teoremos prielaidos išplaukia, kad $r_k := \rho(x, y_k) > 0, k = 1, \dots, n$. Pažymėkime $\overline{r} = \min(r_1 \dots r_n)$. Tuomet $B(x, \overline{r}) \subset B(x, r)$. Bet tuomet sankirta $A \cap B(x, \overline{r}) = \emptyset$.

Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad ne kiekvienoje taško x aplinkoje yra aibės A taškų taigi, x nėra ribinis taškas. Gavome prieštaravimą. Tad pradinė prielaida yra klaidinga.

$\oplus$

Apibrėžimas *Tašką $x \in E$ vadinsime aibės A sienos tašku, jeigu bet kokioje jo aplinkoje yra ir aibės A ir A^c taškų.*

Aibės A sienos taškų aibę žymėsime S_A. Aišku, kad $S_A = A^u \cap (A^c)^u$. Beje, siena uždara aibė. Įrodykite!

Tarkime $A \subset E$. Tada $E = A^\circ \cup (A^c)^\circ \cup S_A$. Pavyzdžiui, bet kokio realiųjų skaičių intervalo $[a, b]$ sieną sudaro aibė $\{a, b\}$. Racionaliųjų skaičių aibės siena realiųjų skaičių aibėje sutampa su realiųjų skaičių aibe, kadangi bet kokioje realaus taško aplinkoje yra ir racionalių ir realių skaičių.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė $A \subset E$ yra tiršta aibės B atžvilgiu, jeigu bet koks aibės B taškas yra aibės A uždarinio taškas t.y., $B \subset A^c$ arba visiems $x \in B$, taško x aplinkoje yra aibės A taškų.*

Jeigu aibė A yra tiršta erdvės E atžvilgiu, tai paprastai sakoma, kad A yra *visur tiršta aibėje* E, t.y. $A^u = E$. Jeigu erdvė E turi skaičią, visur tirštą aibę, tai šią erdvę vadinsime *separabilia.* Iš anksčiau minėtojo pavyzdžio išplaukia, kad $\mathcal{R}$ separabili.

Apibrėžimas *Aibių šeimą $\{A_l; l \in L, A_l \in E\}$, vadinsime aibės A denginiu, jeigu $A \subset \cup_{l \in L} A_l$.*

1.5 Tolydieji atvaizdžiai

Šiame skyrelyje nagrinėsime atvaizdžių savybes, metrinėse erdvėse.

Esame minėję, kad bet koks atviras rutulys, kuriam priklauso taškas a, vadinamas šio taško aplinka.

Tarkime, kad (E, ρ), ir (E', ρ') dvi metrinės erdvės.

Apibrėžimas *Atvaizdį $f : E \longrightarrow E'$ vadinsime tolydžiu taške $a \in E$, jeigu bet kokiai taško $f(a) \in E'$ aplinkai $V_{f(a)}$ galime nurodyti taško a aplinką $V_a \subset E$ tokią, kad $f(V_a) \subset V_{f(a)}$.*

Sakoma, kad atvaizdis f *tolydus aibėje* A, jeigu jis tolydus, bet kokiame šios aibės taške, trumpai tai žymėsime $f \in \mathcal{C}(A)$.

Žemiau pateiktoje teoremoje nurodomos būtinos ir pakankamos sąlygos, metrikos terminais, kad atvaizdis būtų tolydus taške.

1.4 Teorema *Tam, kad atvaizdis $f : E \longrightarrow E'$ būtų tolydus taške $a \in E$, būtina ir pakanka, kad visiems $\epsilon > 0$ egzistuotų $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ toks, kad $\rho'(f(a), f(x)) < \epsilon$, kai $\rho(a, x) < \delta$.*

$\ominus$, $\oplus$ Paskutinioji teorema matematinės analizės vadovėliuose pateikiama tolydumo apibrėžimo vietoje.

Sakykime, kad $f : E \longrightarrow E'$. Tada tokie tvirtinimai yra lygiaverčiai:

1) atvaizdis f tolydus aibėje E ;
2) bet kokiai atvirai aibei $A' \subset E, f^{-1}(A')$ yra atviras aibės E poaibis;
3) bet kokiai uždarai aibei $B \subset E, f^{-1}(B)$ uždaras aibės E poaibis;
4) bet kokiai aibei $A \subset E, f(A^u) \subset (f(A))^u$.

Pavyzdys. Funkcija $f(x) = 1/x$ nėra tolydi aibėje $[0, 1] \subset \mathcal{R}$, kadangi uždaros aibės $[1, \infty)$ pirmvaizdis $(0, 1]$ nėra uždara aibė.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei atvaizdis tolydus, tai atviros aibės vaizdas nebūtinai atvira aibė. Panagrinėkime gerai žinomą funkciją $f(x) = x^2$. Yra žinoma, kad pastaroji funkcija tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje. Nesunku matyti, kad atviros aibės $(-1, 1)$ vaizdas yra intervalas $[0, 1)$ kuris nei atvira, nei uždara realiųjų skaičių aibė.

Tarkime, kad E, F, G metrinės erdvės, ir $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$. Jeigu f tolydus taške $a \in E$, o g tolydus taške $f(a)$, tai atvaizdis $h : E \longrightarrow G$, kuris apibrėžiamas formule $h = g(f(x))$ ir žymimas $h = g \circ f$, yra tolydus taške a. Atvaizdį h vadinsime atvaizdžių f ir g kompozicija.

Atvaizdis yra funkcijos apibendrinimas, todėl visos atvaizdžių sąvokos yra analogiškai formuluojamos ir funkcijoms.

Funkciją $f : E \longrightarrow E'$ vadinsime *tolygiai tolydžia aibėje* E, jeigu bet kokiam $\epsilon > 0$, egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad kai $\rho(x, y) < \delta$, tai teisinga nelygybė $\rho'(f(x), f(y)) < \epsilon$ visiems $x, y \in E$ kartu.

Pavyzdys Funkcija $f(x) = x^3$ nėra *tolygiai tolydi* aibėje $\mathcal{R}$ kadangi bet kokiam fiksuotam α skirtumas $(x + \alpha)^3 - x^3 = 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$ gali būti kiek norimai didelis, kai x didelis.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad jei $A \subset E$ yra netuščia, tai $f(x) = d(x, A)$ yra tolydi funkcija. Įrodykite!

1.6 Homeomorfizmai. Ekvivalenčios metrikos

Apibrėžimas *Atvaizdį* $f : E \longrightarrow E'$ *vadinsime erdvių* E, E' *homeomorfizmu, jeigu:*
1) jis yra bijekcija;
2) f *ir* f^{-1} *yra tolydūs.*

Jeigu $f : E \longrightarrow F$ ir $g : F \longrightarrow G$ yra homeomorfizmai, tai tada ir $f \circ g$ homeomorfizmas.

Pavyzdys. $f(x) = x^3$ yra erdvės $\mathcal{R}$ į save pačią homeomorfizmas.

Tarkime duotos dvi erdvės. Jeigu egzistuoja šių erdvių homeomorfizmas, tai šias erdves vadinsime *homeomorfinėmis.*

Erdves, kurios homeomorfinės diskrečioms erdvėms, vadinsime tiesiog diskrečiomis, nepabrėždami to fakto, kad šios erdvės sutampa homeomorfizmo dėka.

Be to dar reikėtų pastebėti, kad izometrinės erdvės tuo pačiu ir homeomorfinės, bet ne atvirkščiai.

Tarkime, kad ρ_1 ir ρ_2 dvi metrikos toje pat erdvėje. Sakysime, kad šios *metrikos ekvivalenčios*, jeigu egzistuoja konstantos $0 < c_1, c_2 < \infty$ tokios, kad

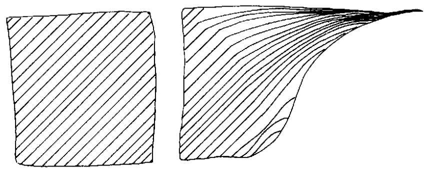
$$c_1\rho_1(x, y) < \rho_2(x, y) < c_2\rho_1(x, y).$$

Dvi metrines erdves vadinsime *ekvivalenčiomis*, jeigu egzistuoja bijekcija $f : E_1 \longrightarrow E_2$ tokia, kad metrika $\overline{\rho}_1(x, y) := \rho_2(f(x), f(y))$ yra ekvivalenti metrikai $\rho_1(x, y)$, visiems $x, y \in E_1$.

Pastaba! Homeomorfinės metrinės erdvės nebūtinai ekvivalenčios. Dažnai homeomorfinės erdvės vadinamos topologiškai ekvivalenčiomis. Visa tai susiję su tuo, kad homeomorfizmas išlaiko erdvės aplinkų struktūrą.

Šio skyrelio pabaigoje pateiksime dar vieną sąvoką. Dvi metrikas ρ_1, ρ_2 erdvėje E vadinsime *topologiškai ekvivalenčiomis*, jeigu egzistuoja identiškas (tapatusis) homeomorfizmas $i : (E, \rho_1) \longrightarrow (E, \rho_2)$.

1.2 pav. pateikta homeomorfinių erdvių, su ta pačia topologija ir kurios nėra metriškai ekvivalenčios, iliustracija.



1.2 pav.

1.7 Sekos. Pilnos erdvės

Tegu $\mathcal{N}$ - natūraliųjų skaičių aibė, (E, ρ) - metrinė erdvė. Tada erdvės E *elementų seka* vadinsime aibę $\{f(n), n \in \mathcal{N}\}$, čia $f : \mathcal{N} \longrightarrow E$ yra funkcija. Kitaip tariant, bet kokią sunumeruotą metrinės erdvės elementų, begalinę aibę, vadinsime seka. Naudosime įprastą sekos žymėjimą: $\{x_n\} := \{x_n \in E; n \in \mathcal{N}\}$.

Sakysime, kad $a \in E$ yra sekos $\{x_n\}$ *riba*, kai n neaprėžtai auga, jeigu, bet kkiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti natūralųjį skaičių n_0, kad kai tik $n > n_0$, tai $\rho(x_n, a) < \epsilon$. Žymėsime, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Apibrėžkime tapatųjį atvaizdį $\{f(n) = n, n \in N\}$. Matome, kad natūraliųjų skaičių aibė irgi seka, t.y. $\mathcal{N} = \{n\}$. Tada šios aibės bet kokį sutvarkytą poaibį žymėkime taip $\{n_k, k \in \mathcal{N}\}$. Tarkim duota kokia nors seka $\{x_n\}$. Tada seką $\{x_{n_k}, k \in \mathcal{N}\}$ vadinsime pradinės *sekos posekiu*. Prisiminkime sekos ribos apibrėžimą. Nesunku suprasti, kad jeigu seka konverguoja, tai konverguoja ir bet koks jos posekis, beje, į tą patį elementą.

Tašką $b \in E$ vadinsime metrinės erdvės elementų sekos $\{x_n\}$ *ribiniu tašku*, jeigu egzistuoja posekis $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ toks, kad $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$. Manome, kad skaitytojas nesunkiai galėtų įrodyti, jog tam, kad taškas $b \in E$ būtų sekos $\{x_n\}$ ribiniu tašku, būtina ir pakankama, kad bet kokioje šio taško aplinkoje V_b būtų sekos $\{x_n\}$ elementų, kitaip tariant, bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti skaičių $m \in \mathcal{N}$ tokį, kad $\rho(x_n, b) < \epsilon$, kai $n > m$.

Beje, naudodami sekos ribos apibrėžimą taipogi galime tikrinti funkcijos tolydumą, t.y. funkcija tolydi taške a, jeigu bet kokiai sekai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Elementų seką $\{x_n\} \subset E$ vadinsime Koši seka, jei visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti n_0, kad visiems $m, n > n_0$ teisinga nelygybė $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Nesunku parodyti, kad bet kuri konverguojanti seka yra ir Koši seka. Deja, atvirštinis teiginys, bendrai paėmus, neteisingas. Tačiau paminėsime ypač mums svarbią aplinkybę, t.y., jei seka yra Koši seka ir be to papildomai žinome šios sekos kokią nors ribinę reikšmę, tai tada ir pradinė seka turi ribą. Dar daugiau, sekos riba sutampa su minėtuoju ribiniu tašku. Nors pastarosios savybės įrodymas paprastas, tikimės kad skaitytojas nenusivils jei jį pateiksime. Tarkime, kad b minėtasis ribinis taškas. Vadinasi, visiems $\epsilon > 0$ egzistuoja n_0 toks, kad jei $n, m > n_0$, tai $\rho(x_n, x_m) < \epsilon/2$. Antra vertus, egzistuoja natūralusis skaičius $p > n_0$ toks, kad $\rho(b, x_p) < \epsilon/2$. Naudodami trikampio nelygybę gauname,

$$\rho(b, x_n) \leq \rho(b, x_p) + \rho(x_p, x_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Apibrėžimas *Metrinę erdvę E vadinsime pilna, jeigu bet kuri šios erdvės Koši seka turi ribą, priklausančią šiai erdvei.*

Pavyzdys. Aibė $\mathcal{R}$ yra pilna metrinė erdvė. Tai išplaukia iš Heinės - Borelio lemos.

Beje, racionaliųjų skaičių aibė nėra pilna. Kodėl?

Manome, kad verta paminėti tokį rezultatą:

1.5 Teorema *Jei metrinės erdvės E poaibio F elementų Koši sekos turi ribas, tai aibė F uždara. Be to, metrinės erdvės E poerdvis F yra pilnas tada ir tik tada, kai F uždaras.*

$\ominus$

Jei seka turi ribą, tai ji vienintelė (įrodykite !). Taigi jei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{F}$ ir tartume, kad Koši seka turi ribą $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \in F$, tai remdamiesi ribos vienetinumu gauname, kad $a = b$, o iš pastarosios lygybės gauname, kad $\overline{F} = F \Rightarrow F$ uždara aibė.

$\oplus$

Kodėl tokios svarbios pilnos metrinės erdvės, kodėl jas išskiriame iš kitų? Iš auksčiau padarytų pastabų tikimės, skaitytojas pastebėjo, jog tam, kad įrodytume sekos konvergavimą metrinėje erdvėje, pakanka įrodyti kad nagrinėjama seka yra Koši seka. Be to, naudojant Koši kriterijų nereikia iš anksto žinoti ribinės reikšmės, kurią paprastai būna sunku nurodyti. Pilnumas šios ribos egzistavimą užtikrina. 1.3 pav. pateikta Koši sekos, konverguojančios į aibę A, aštuoni nariai.

Jeigu metrinės erdvės ekvivalenčios (metriškai ekv.), tai šiuo atveju pakanka seką nagrinėti vienoje iš erdvių, t.y., jei seka yra Koši seka vienoje erdvėje, tai šią savybę turi ir antroje, kadangi konvergavimas yra metrinė savybė.

Sakykim, kad $f : E_1 \longrightarrow E_2$, čia E_1, E_2 metrinės erdvės, be to tarkime, $A \subset E_1$. Pažymėkime $B = \{f(a), a \in A\}$. Tada aibės B diametrą $\delta(B)$ vadinsime funkcijos svyravimu aibėje A. Jeigu a yra aibės A ribinis taškas, tai funkcijos svyravimu taške a, aibės A atžvilgiu, vadinsime skaičių

$$\delta_A(a, f) = \inf_{V_a} \delta(f(V_a \cap A)),$$

čia tikslusis apatinis rėžis skaičiuojamas visomis taško a aplinkomis V_a (arba bent fundamentaliąja aplinkų sistema).

Pasirodo, kad pilnoje metrinėje erdvėje funkcija turi ribą taške a tada ir tik tada, kai funkcijos svyravimas tame taške, erdvės atžvilgiu, lygus nuliui.

1.8 Pratęsimo teorema. Kompaktai.

1.6 Teorema *Sakykime, kad f, g du tolydūs atvaizdžiai apibrėžti metrinėje erdvėje E su reikšmėmis metrinėje erdvėje (E', ρ'). Tada aibė $A = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ yra uždara erdvėje E.*

$\ominus$

Sakykime, kad $a \in E \setminus A$. Tada $f(a) \neq g(a)$. Pažymėkime $\alpha = \rho'(f(a), g(a))$. Erdvėje E' apibrėžkime du atvirus rutulius:

$$\rho'(f(a), f(x)) < \alpha/2 \text{ ir } \rho'(g(a), g(x)) < \alpha/2.$$

Šių rutulių sankirta, pažymėkime ją U, yra atviras rutulys. Tegu $V_a = \{x \in E \setminus A, f(x) \wedge g(x) \in U\}$.

Tada visiems $x \in V_a, f(x) \neq g(x)$. Be to, $V_a \subset E \setminus A$ yra atvira.

Bet tuomet šios aibės papildinys V_a^c yra uždara aibė.

$\oplus$

Tarkime, kad f ir g du tolydūs atvaizdžiai, apibrėžti aibėje E, įgyjantys reikšmes aibėje E'. Tuomet, jeigu $f(x) = g(x)$, visiems $x \in A$ ir aibė A tiršta erdvėje E, tai $f \equiv g$ erdvėje E. Pastarasis pastebėjimas išplaukia iš to, kad $\{x; f(x) = g(x)\}$ yra uždara, taigi, jos uždarinys sutampa su visa erdve.

Pastebėsime, kad jeigu f, g tolydūs atvaizdžiai, tai aibė $\{x \in E; f(x) \leq g(x)\}$ taipogi uždara.

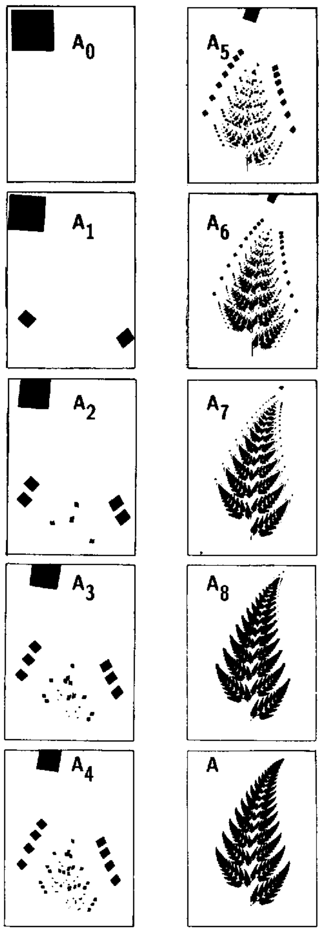
Apibrėžimas *Metrinę erdvę E vadinsime kompaktu, jeigu iš bet kokio jos atvirų aibių denginio $\{U_l, l \in L\}$ galime išskirti baigtinį pošeimį, kuris taip pat dengia erdvę E.*

Pastarasis apibrėžimas remiasi topologinėmis erdvės savybėmis. Pateiksime kitą kompakto apibrėžimą, naudodamiesi metrinėmis erdvės savybėmis. Sakykime (E, ρ) metrinė erdvė.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinės erdvės aibė $S \subset E$ yra kompaktiška, jeigu iš bet kokios elementų sekos $\{x_n \subset S\}$ galime išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, kurio riba priklauso aibei S.*

Jeigu metrinė erdvė turi šią savybę, tai minimą erdvę vadinsime kompaktu.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinė erdvė E visiškai aprėžta, jeigu visiems $\epsilon > 0$ egzistuoja baigtinė aibė $F \subset E$ turinti savybę: $d(x, F) < \epsilon, x \in E$.* Baigtinė aibė F turinti minėtąją savybę dar vadinama *ϵ- tinklu.* Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad visiškai aprėžta pilna metrinė erdvė yra kompaktiška ir atvirkščiai (įrodykite!). Beje, visiškas aprėžtumas yra erdvės metrinė savybė.



1.3 pav.

Kodėl mus domina pilnos ir kompaktiškos erdvės? Prisiminkime praeitų skyrelių medžiagą. Mes aptarėme, kad jei nagrinėjamos pilnos metrinės erdvės elementų seka yra Koši seka, tai ši seka konverguoja. Teisybės vardan reikėtų pasakyti, kad kas toji riba dažnai nė neįsivaizduojama, bet svarbiausia, jei sekos riba yra tyrimo objektas, tai mūsų darbas turi prasmę, kadangi tas objektas egzistuoja! Priešingu atveju iškiltų veiklos prasmės problema. Ir dar svarbus faktas. Šiose erdvėse pakanka iš Koši sekos išskirti konverguojantį posekį, kuris visada egzistuoja kompaktiškose erdvėse, ir sužinoti tos ribos reikšmę. Tuomet ir visos sekos ribinė reikšmė bus ta pati. Tad grįžkime prie kompaktiškų aibių.

Manome, kad reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį ir į tai, kad visiškas aprėžtumas garantuoja erdvės separabilumą.

Sakykime, kad E metrinė erdvė, tuomet iš bet kurių dviejų žemiau pateiktų savybių išplaukia trečioji:
a) $E-$ kompaktiška;
b) $E-$ diskreti;
c) $E-$ baigtinė.

1.7 Teorema *Jeigu kompaktiškos metrinės erdvės, bet kuri elementų seka $\{x_n\}$ turi tik vieną ribinį tašką a, tai pastarasis yra sekos riba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

$\ominus$

Sakykime, kad a yra sekos $\{x_n\}$ ribinis taškas, tačiau $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$. Vadinasi, egzistuoja $\delta > 0$, ir posekis $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ toks, kad šio posekio elementai priklauso aibei $E \setminus B(a,\delta)$. Remdamiesi prielaida galime tvirtinti, kad ši seka turi tiktai vieną ribinį tašką ir be to $E \setminus B(a,\delta)$ yra uždara, tada išplaukia, kad $b \in E \setminus B(a,\delta)$, kadangi ribinis taškas priklauso uždariniui. Bet tada seka turi du ribinius taškus. Gauname prieštaravimą. Vadinasi pradinė prielaida buvo klaidinga.

$\oplus$

Trys, žemiau pateiktos, metrinės erdvės savybes yra ekvivalenčios:
a) erdvė yra kompaktas;
b) bet kokia begalinė elementų seka turi bent vieną ribinį tašką, priklausantį šiai erdvei;
c) erdvė visiškai aprėžta ir pilna.

1.9 Jungios erdvės ir jungios aibės

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinė erdvė yra jungi, jeigu tik dvi šios erdvės aibės - pati erdvė ir tuščia aibė yra tuo pat metu atviros ir uždaros aibės.*

Perfrazuokime šį apibrėžimą kiek kitaip. Metrinė erdvė yra jungi, jeigu šioje erdvėje neegzistuoja netuščių atvirų aibių tokia pora, $A, B \subset E, A \neq E, B \neq E$, kad $A \cup B = E$ ir $A \cap B = \emptyset$.

Jeigu erdvėje tik vienas elementas, tai tada erdvė jungi. Sakome, kad metrinė erdvė E yra lokaliai jungi, jeigu visiems $x \in E$ egzistuoja fundamentali taško x aplinkų šeima tokia, kad bet kuri šios šeimos aibė yra jungi.

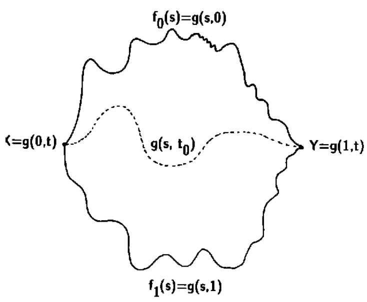
Sakysime, kad aibė $D \subset E$ yra jungi, jeigu neegzistuoja netuščių atvirų aibių pora nesutampanti su D tokia, kad $A \cup B = D$, $A \cap B = \emptyset$.

Aibę S vadinsime visiškai nejungia, jeigu jos jungūs, netušti poaibiai yra tik pavieniai taškai.

Tarkime, kad $S \subset E$ koks nors metrinės erdvės poaibis. Sakysime, kad S yra trajektorijomis jungi, jeigu egzistuoja tolydi funkcija $f : [0,1] \longrightarrow S$ tokia, kad visiems $x, y \in S, f(0) = x, f(y) = y$. Kitaip tariant, bet kokius šios aibės taškus galime sujungti tolydžia trajektorija. Aukščiau esame minėję, kad tarp funkcijų ir funkcijų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis (2. skyrelis), todėl ateityje funkciją f tiesiog vadinsime trajektorija, jungiančia aibės S taškus.

Tuo atveju, kai tokia funkcija neegzistuoja, tai sakysime, kad aibė nėra trajektorijomis jungi.

Sakoma, kad aibė S yra vienajungė, jeigu bet kokiems šios aibės taškams ir bet kokioms trajektorijoms jungiančioms šiuos taškus, galime nurodyti tolydžią funkciją, kuri apibrėžta vienos kreivės taškuose, o reikšmes įgyja kitos kreivės taškuose. Tokią funkciją vadinsime deformacija.



1.4 pav.

Sakykime, kad $x, y \in S$. Be to dvi tolydžios kreivės f_0, f_1 jungia šiuos taškus t.y. $f_0(0) = f_1(0) = x$ ir $f_0(1) = f_1(1) = y$. Tuomet tolydžią deformaciją galime apibrėžti taip:

$g = g(x, y)$; $g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S$ tokia, kad

$$\begin{cases} g(s,0) = f_0(s), & s \in [0,1]; \\ g(s,1) = f_1(s), & s \in [0,1]; \\ g(0,t) = x, & t \in [0,1]; \\ g(1,t) = y, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Sakysime, kad du taškai x, y yra susiję, jeigu nagrinėjamoje aibėje bet kokios dvi trajektorijos f_0 ir f_1, jungiančios minėtuosius taškus, priklauso kokios tai deformacijos $g(s,t)$ reikšmių aibei (žr. 1.4 pav.).

Nevienajungė aibė, yra vadinama *daugiajunge* aibe.

1.10 Klasikiniai pavyzdžiai.

Pateiksime skaitytojui kelių aibių pavyzdžius, kuriuos siūlome kruopščiai panagrinėti ir pačiam pabandyti atsakyti į klausimus, kurie manome, turėtų kilti. Pradėsime nuo paprasčiausio pavyzdžio, taip vadinamo Diurerio penkiakampio.

1. Diurerio penkiakampis. Albrechtas Diureris (1471 - 1528) pasiūlė tokią daugiakampio konstrukciją.

Tarkime, kad duotas taisyklingas penkiakampis, kurio kraštinės ilgis lygus S_0. Šių kraštinių pagrindu vėl sudarykime penkis penkiakampius, su to paties ilgio kraštinėmis, kuriuos vieną nuo kito skiria lygiašoniai trikampiai. Pažymėkime šio lygiašonio trikampio pagrindą raide a, o $S_1 = 2S_0 + a$. Gauname taisyklingą daugiakampį, kurio kraštinės ilgis lygus S_1. Pastebėkime, kad lygiašonių trikampių kampai prie pagrindo lygūs 72°, o smailusis kampas 36°. Beje, skaitytojas nesunkiai galėtų nustatyti, kad $a = 2S_0 \cos 72^\circ$. Na, o mažojo ir didžiojo penkiakampių kraštinių ilgių santykis yra toks:

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{2 + 2\cos 72^\circ}.$$

Jeigu pratęstume šio penkiakampio "statymą ", pradiniu penkiakampiu laikydami prieš tai buvusį su kraštine S_1, gautume dar didesnį penkiakampį, kurio kraštinės ilgis $S_2 = 2S_1(1 + \cos 72^\circ)$ ir be to

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2 + 2\cos 72^\circ}.$$

Pakartoję šį veiksmą penkis kartus gautume taip vadinamą Diurerio snaigę. Manome, kad atidžiau pažiūrėjęs skaitytojas pastebės, kad šis daugiakampis panašus į tam tikras mažesnes savo dalis. Ką bendro turi ši geometrinė figūra su mūsų nagrinėjama problematika? Dažnai populiarioje literatūroje fraktalinėmis struktūromis vadinami objektai turintys panašumo, į atskiras (mažesnes) savo dalis, savybę. Fraktalo apibrėžimą pateiksime kiek vėliau, prieš tai atlikę paruošiamąjį darbą šios savokos apibrėžimui. Taigi, kol kas sąvoką 'fraktalas 'naudosime neteisėtai, kadangi kaip jau ir minėjome, nepateikėme šios sąvokos apibrėžimo, bet vis tik susitarkime tokią padėtį toleruoti, turėdami vilties, kad vėliau padėtis bus ištaisyta. Tad kol kas fraktalu laikysime objektą, kurį galime kokiu nors būdu suskaidyti į smulkesnes dalis taip, kad kiekviena iš šių mažesniųjų dalių būtų panaši į pradinį objektą. Panagrinėkime keletą pavyzdžių, kurie turi minėtąją savybę.

2. Kantoro aibė (Kantoro dulkės)

Pažymėkime $I_0(a,b) = [a,b] \in \mathcal{R}$. Tarkime, kad F uždaras, tiesiškai sutvarkytas aibės I_0 poaibis. Intervalą $I_0(a,b)$ vadinsime pagrindiniu aibės F intervalu, jeigu jis mažiausias uždaras intervalas, kuriam priklauso aibė F. Taigi, šiuo atveju intervalo galai visuomet priklauso aibei F. Priminsime skaitytojui, kad minimali aibių klasė, kuriai priklauso visi realiųjų skaičių intervalai, bei kuri uždara bet kokio skaičiaus sankirtų, sąjungų ir papildinio operacijų atžvilgiu, vadinama Borelio sigma algebra. Matą apibrėžtą šioje algebroje vadinsime Borelio matu. Intervalo ilgis bei intervalo Borelio matas yra tas pat, todėl dažnai jie tiesiog sutapatinami ir Borelio matas vadinamas ilgiu nors, bendrai paėmus, tai ne tas pat. Sakysime, kad aibė yra nulinio mato, jeigu jos Borelio matas lygus nuliui. Tarkim $F = [a, b]$. Tuomet mes$F = b - a$. Tarkime, kad $F \neq [a, b]$, tuomet uždarą aibę gausime iš uždaro intervalo išmetę baigtinę arba skaičią atvirų aibių sąjungą, t.y.

$$F = [a, b] \setminus \cup_n C_n, \tag{1}$$

čia $\{C_n\} \subset [0, 1]$, yra kuri nors atvirų aibių šeima. Taigi, taip nusakyta aibė F yra uždara. Nemažindami bendrumo galime sutarti, kad minėtąją atvirų aibių šeimą sudaro nesikertančios aibės. Kiek auksčiau esame minėję kokią aibę vadiname nulinio mato aibe. Pateiksime turiningesnį nulinės mato aibės apibrėžimą. Aibę F vadinsime nulinio mato aibe, jeigu bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti tokią intervalų šeimą $\{U_n\}$, kad

$$E \subset \bigcup_n U_n \text{ ir } \sum_n L(U_n) < \epsilon.$$

Grįžkime prie (1) aibės. Šios aibės matas yra toks:
meas$F$ = meas$[a, b]-$meas $\left(\bigcup_n C_n\right)$. Taigi, F yra nulinio mato, jeigu

$$\sum_n \text{meas} C_n = b - a.$$

Tad pabandykime sukonstruoti aibę F, kurios matas būtų lygus 0.

Padalinkime intervalą $[0, 1]$ taškais $0, 1/3, 2/3, 1$ į tris lygias dalis (žr. 1.5 pav.). Išmeskime iš intervalo $I_0 = [0, 1]$ atvirą aibę $C_1 = (1/3, 2/3)$. Likusi aibė $F_1 = I_0 \setminus C_1 = I_1^1 \bigcup I_1^2$ yra uždara, be to intervalo ilgis $|I_1^j| = 1/3, j = 0, 1$. Kitas žingsnis analogiškas pirmajam, t.y. neišmestus intervalus I_1^1, I_1^2 taškais dalijame į tris lygius intervalus, o viduriniuosius intervalus išmetame. Po šio veiksmo liks uždara aibė

$F_2 = \bigcup_{j=1}^4 I_2^j$ ir $|I_2^j| = \Big(1/3\Big)^2$, $j =, 1 \ldots, 4$.

Atlikę n žingsnių gausime uždarą aibę

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_n^j, |I_n^j| = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n, \ j = 1, \ldots, 2^n.$$

Aibės F_n ilgis yra toks:

$$\text{meas} F_n = 1 - \frac{1}{3} - 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 - \ldots - 2^{n-1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n.$$

Neaprėžtai didindami šių operacijų skaičių gauname, kad

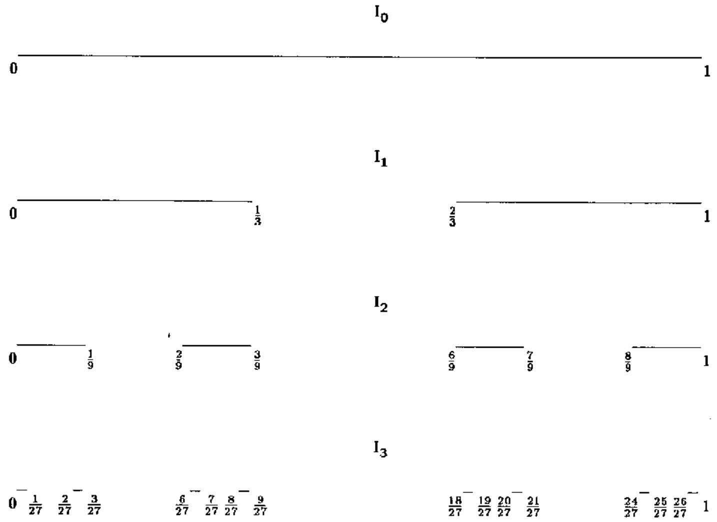
$$\lim_{n\to\infty} F_n = \text{meas}(\lim_{n\to\infty} \{I_0 \setminus \bigcup_n C_n\}) = I \setminus C,$$

čia C atvira aibė, nes skaiti atvirų aibių sąjunga yra atvira. Be to,

$$\text{meas } F = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 0.$$

Matome, kad ribinės aibės F matas lygus nuliui ir be to ši aibė yra uždara.

Šiek tiek plačiau panagrinėkime šią keistą ir neįprastą aibę. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad aibė F būdama nulinio mato (ją dengiančių intervalų ilgių sumos riba lygi nuliui) taigi ji yra diskreti ir tuo pačiu skaiti. Bet šis įspūdis apgaulingas. Pasirodo, kad ši aibė neturi izoliuotų taškų t.y. bet kokioje šios aibės taško aplinkoje yra begalo daug aibės F taškų. Dar daugiau, ši aibė ir neskaiti. Šį fenomeną pailiustruosime tokiu pavyzdžiu. Tarkime, kad uždaros aibės E pagrindinis intervalas yra aibė I_0. Išmeskime iš šio intervalo aibes $(1/(n + 1), 1/n), n = 1, \ldots$. Tuomet likusi aibė E yra uždara, be to ją galime nusakyti taip: $E = \{0\} \bigcup_n \{1/n\}$. Nesunku suprasti, kad taškai $1/n, n \in \mathcal{N}$ yra izoliuoti, bet to paties negalime pasakyti apie tašką 0. Taigi, šiuo atveju aibė E nėra diskreti. Aukščiau nagrinėtosios aibės kiekvienas taškas turi analogišką aplinką kaip ir aibės E taškas 0. Tokius taškus vadinsime *akumuliuojančiais.* Aibės, neturinčios izoliuotų taškų, begalinės ir neskaičios yra vadinamos *tobulomis.*



1.5 pav.

Mes gavome, kad aibės F matas lygus nuliui, be to joks intervalas nėra šios aibės poaibis. Todėl atrodytų kas gi čia keisto, kad aibę sudaro ne intervalai, todėl visai natūralu, kad šios aibės matas lygus nuliui. Ir vėlgi akibrokštas. Pasirodo tam, kad aibės matas būtų teigiamas visai nebūtina, kad šios aibės poaibiu būtų nors vienas intervalas. Tarkime duotas intervalas $[0,2]$. Fiksuokime šio intervalo viduriniąjį tašką, šiuo atveju 1 ir iš šio intervalo išmeskime intervalą, kurio centrinis taškas yra 1 ir ilgis lygus $1/3$. Sekančiame žingsnyje elgsimės analogiškai, iš likusių dviejų intervalų, kurių ilgiai po $5/6$ pašalinkime centrinius intervalus, kurių ilgiai $1/3$. Pastebėkime, kad intervalų pašalinimo algoritmas panašus į jau nagrinėtąjį (aibės F konstrukcija). n- ąjame žingsnyje gausime 2^n nesikertančių intervalų, kurių ilgiai lygūs $1/3^n$, o iš jų išmetamų intervalų ilgių eilė vienetu mažesnė t.y. $(1/3^{n+1})$. (Algoritmo keletas žingsnių iliustruojama 1.5 pav.)

Taigi

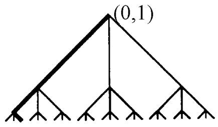
$$\text{meas } F = 2 - \sum_n \text{meas} C_n = 2 - \sum_n 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

Taigi, likusios aibės matas lygus mes $F = 1$, nors negalime nurodyti intervalo, kuris būtų aibės F poaibis.

Iš pateiktų pavyzdžių išplaukia, kad realiųjų skaičių aibių klasė žymiai "turtingesnė" už intervalų aibę. Tačiau gal būt skaitytojui liko neaišku, kur gi čia slepiasi fraktalinės struktūros. Į tai pabandysime atsakyti kitame pavyzdyje.

3. Binariniai medžiai

Iš praeitame skyrelyje nagrinėtų pavyzdžių (aibės F ir E) buvo galima susidaryti tokį vaizdą: uždarų aibių, kurios lieka išmetant, tam tikra tvarka atviras aibes, topologinės savybės priklauso nuo to kaip realizuojame tą išmėtymą. Pavyzdžiui, aibės E atveju gavome diskrečią aibę su vienu akumuliuojančiu tašku. Jeigu mes tarp dviejų taškų įterpiame trečią, tuomet gauname tobulą aibę. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tokią smulkmeną: - išmetamų intervalų tvarka $C_1, C_2 \ldots$ irgi yra svarbi, kadangi nuo šio proceso priklauso likusios aibės topologinės savybės. Panagrinėsime intervalų išmetimo tvarką. Kaip ir anksčiau tarkime, kad $I_0 = [0,1]$. Tegu I_1^0 yra pirmasis išmetamas intervalas. Apatinis indeksas nurodo kelintame žingsnyje buvo išmestas minimas intervalas, o viršutinis nurodo to intervalo padėtį kitų intervalų atžvilgiu, kai skaičiuoti pradedame nuo nulio. Taigi, pirmąjame žingsnyje (apatinis indeksas vienas) mes išmetame tik vieną intervalą (jo numeris 0). Kitaip tariant šio išmetamo intervalo adresas (0,1). Sekančiame etape pašaliname dar du intervalus I_2^0, I_2^1, taigi jiems priskiriame adresus $(0,2), (1,2)$. Trečiąjame tenka pašalinti keturis intervalus, jų adresai - $(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)$ ir taip toliau. n- ąjame žingsnyje pašalintiems intervalams analogišku būdu suteikiame tokius adresus: $(0,n),(1,n),\ldots,(2^{n-1},n)$. Taigi, kiekvienas išmetamas intervalas inicijuoja dviejų intervalų sekančiame žingsnyje, išmetimą. Jeigu fiksuosime kokį nors adresą, tarkime $(0,3)$, tai nesunku suprasti, kad jis inicijuoja adresus $(0,4)$ ir $(1,4)$. Arba (m,k) - adresus $(2m,k+1),(2m+1,k+1)$, $m \leq 2^{k-1}$. Naudodamiesi šiais adresais galime nubrėžti medį, iš kurio bet kokios viršūnės (i,j) nubrėžtos dvi šakos į žemiau esančias dvi viršūnes. Kartodami šį procesą neaprėžtai!, gauname medį su viršūne $(0,1)$ ir begaliniu šakų skaičiumi. Nesunku matyti (1.6 pav.), kad šis medis turi fraktalinę struktūrą.



1.6 pav.

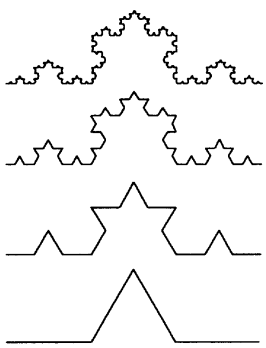
4. Kocho kreivė.

Kreivė, kurią nagrinėsime šiame skyrelyje (1.7 pav.), pavadinta švedų matematiko, kuris ją pirmasis sukonstravo, vardu. Tikėdamiesi suintriguoti skaitytoją, užbėgsime įvykiams į priekį, paminėdami keletą neįprastų šios kreivės savybių. Visų pirma tai, kad jokiame šios kreivės taške negalime nubrėžti liestinės, nors ji tolydi visoje apibrėžimo srityje. Antra, šios kreivės ilgis yra begalinis. Atrodytų kas gi čia keisto, juk daug kreivių ilgiai begaliniai, bet įdomu tai, kad ši kreivė yra, baigtinio ploto plokščios figūros, kontūras. Pradžiai gal tiek. Dabar pateiksime šios kreivės geometrinę konstrukciją. Pradėkime nuo tiesės atkarpos kaip ir konstruodami Kantoro aibę. Ši atkarpa vadinama *initiatoriumi*. Padalinkime šią atkarpą, keturiais taškais, į tris lygias atkarpas. Išmeskime viduriniąją atkarpą, o išmestosios vietoje tuštumą užpildome kampu, kurio kraštinių ilgiai lygūs išmestos atkarpos ilgiui. Gauname kreivę (a). Elgdamiesi tokiu pat būdu su kiekviena iš keturių kreivės dalių gauname kreivę (b). Ir taip toliau. Atkarpos trumpėja, o kreivė tampa vis labiau "spygliuota." Kocho kreive yra vadinama ribinė kreivė, kuri gaunama žingsnių skaičių neaprėžtai didinant. 1.7 pav. yra pateikti keturi šios iteracijos nariai.

Panagrinėkime šios kreivės ribojamo ploto bei ilgio problemą. Tarkime, kad pradinio intervalo ilgis lygus 1. Atlikę pirmąjį konstrukcinės sekos žingsnį gauname, kad plokščios figūros ribojamas plotas lygus

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos 30^\circ = A.$$

Atlikus sekantį sekos žingsnį šalia jau esančios trikampės srities atsirodo dar keturios vienodos trikampės sritys (po vieną kiekvienai atkarpai), kurių plotai lygūs



1.7 pav.

$$A_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{9}\Big)^2 \cos 30^\circ = \frac{1}{9}A.$$

Tuomet visas, ribojamos srities plotas, lygus $S_1 = \frac{4}{9}A + A$ ir taip toliau. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$ gausime, kad šios kreivės ribojamos figūros plotas artėja prie tokio skaičiaus:

$$S = A(1 + \frac{4}{9} + \Big(\frac{4}{9}\Big)^2 + \ldots)) = A\{\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Taigi plotas, kurį riboja ši kreivė ir pradinis intervalas, yra baigtinis. To, beje, negalime pasakyti apie šios kreivės ilgį. Initiatoriaus ilgis kaip jau minėjome lygus 1. Nesunku matyti, kad kreivės ilgis, atlikus pirmąjį konstrukcinį žingsnį, lygus 4/3. Toliau, atlikus antrąjį sekos žingsnį, naujai gautos kreivės ilgis lygus $4/3 + (4/3)^2$ ir taip toliau, atlikus $k-$ atąjį sekos žingsnį gauname, kad sukonstruotos kreivės ilgis yra lygus

$$\frac{4}{3} + \Big(\frac{4}{3}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{4}{3}\Big)^k.$$

Tuomet hipotetinės kreivės ilgis turėtų būti toks:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{3}\Big)^k.$$

Nesunku suprasti, kad ši eilutė diverguoja, taigi Kocho kreivės ilgis yra neaprėžtai didelis.

5. Sierpinskio trikampis

Aibė, kurią apibrėšime žemiau, yra ne ką mažiau įdomi už jau paminėtas.

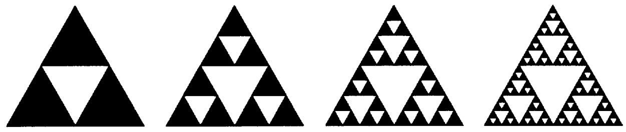
Tarkime duotas lygiakraštis trikampis, kuris yra konstruojamos aibės initiatorius. Trikampio viršūnių taškai priklauso konstruojamai aibei. Pirmąjame žingsnyje sujungę trikampio kraštinių vidurio taškus atkarpomis, padalijame šį trikampį į keturis trikampius ir pašalinę vidinį trikampį prie pradinių trijų taškų prijungiame dar tris šio trikampio vidurio kraštinių taškus. Taigi, po pirmojo žingsnio konstruojamą aibę sudaro šeši taškai. Sekantys konstrukciniai žingsniai analogiški pirmąjam, t.y. neišmestų trikampių kraštinių vidurio taškus sujungiame atkarpomis, tokiu būdu padalindami kiekvieną trikampį į keturis trikampius. Pašalinę vidinius trikampius ir prie konstruojamos aibės prijungę gautųjų trikampių viršūnių taškus (kiek jų yra!) esame pasiruošę žengti sekantį žingsnį. Minėtoji aibė, kuri vadinama Sierpinskio trikampiu, sutampa su šio proceso ribiniu atveju (1.8 pav. yra pateikti šeši šios iteracijos nariai). Beje, manome kad skaitytojas atkreipė dėmesį, kad metodo prasme šis procesas nedaug kuo skiriasi nuo Kantoro aibės konstrukcijos. Paminėsime vieną svarbią ribinės aibės savybę - šios aibės matas (plotas) lygus nuliui. Tarkime, kad nagrinėjamas trikampis lygiakraštis, kurio plotas S. Suskaičiuokime išmetamų trikampių plotą. Nesudėtingų skaičiavimų dėka gauname, kad šis plotas toks:

$$\frac{S}{4} + \frac{3S}{4^2} + \frac{3^2 S}{4^3} + \frac{3^k S}{4^{k+1}} + \ldots = S.$$

Gauname, kad išmestų trikampių plotas lygus pradinio trikampio plotui, taigi Sierpinskio aibės plotas lygus nuliui.

Visi pateikti pavyzdžiai sukelia keistų minčių. Kokios čia aibės, kurių egzistavimui pagrįsti reikalinga ribos sąvoka? O gal tai aibės fikcijos, kurios neegzistuoja. T.y. tokios aibės iš vis nėra, o iteracinių žingsnių seka, kuriais "lipdome " aibę, iš ties niekur neveda? Kitais žodžiais tariant, seka nekonverguoja.

Kituose skyriuose mes iš esmės naudosime sąvokas, kurias pateikėme įvadinėje dalyje, todėl skaitytojui su jomis nesusipažinusiam, rekomenduojame veltui negaišti laiko ir tolimesnių skyrių neskaityti.



1.8 pav.

Užduotys

1. Tarkime, kad metrinėje erdvėje $X = (0, 1]$ apibrėžtos dvi metrikos

$$d_1(x, y) = |x - y|, \ d_2(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|.$$

Įrodykite, kad šios metrikos nėra ekvivalenčios.

2. Įrodykite, kad metrinės erdvės $(\mathcal{C}, \rho_2)$, $(\mathcal{R}^2, \rho_M)$ (ρ_M– Manhatano metrika) yra ekvivalenčios metrinės erdvės.

3. Įrodykite, kad jei metrinės erdvės yra ekvivalenčios, tai egzistuoja šių erdvių homeomorfizmas.

4. Įrodykite, kad aibė $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathcal{N}\} \cup \{0\}$ nėra tobula aibė erdvėje $(\mathcal{R}, \rho_1)$, tačiau $S = S^c$.

5. Įrodykite, kad $\overline{\mathcal{R}}$ yra homeomorfinė intervalui $[-1, 1]$.

6. Tarkime, kad S pilnos metrinės erdvės (X, ρ) poaibis. Tada (S, ρ) metrinė erdvė. Įrodykite, kad erdvė (S, ρ) yra pilna, jei aibė $S \subset X$ yra uždara.

7. Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $f : X \to X$ yra tolydus atvaizdis. Tegu $A \subset X$ yra kompaktiška ir netuščia aibė. Įrodykite, kad aibė $f(A)$ yra kompaktiška ir netuščia .

8. Kokia yra aibės $\mathcal{C}$ siena aibėje $\overline{\mathcal{C}}$.

9. Tarkime, kad S yra kompaktiškos metrinės erdvės poaibis. Įrodykite, kad aibės S siena yra kompaktiška aibė.

10. Tarkime, kad $\mathbf{K}$ yra kvadratas. Tada $(\mathbf{K}, \rho_2)$ yra jungi. Įrodykite tai.

11. Įrodykite, kad erdvė (σ, ρ_σ) yra visiškai nejungi.