LAUKO TEORIJOS ELEMENTAI

8.1 Dualios vektorių bazės

Sakykime $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ trimatės erdvės bazė. Trys vektoriai sudaro bazę, jeigu jie yra nekomplanarūs, t. y. neguli vienoje plokštumoje. Žinome, kad $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ neguli vienoje plokštumoje tada ir tik tada, kai jų mišrioji sandauga $[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] \neq 0$. Jei

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (x_1; y_1; z_1), \\ \mathbf{r}_2 &= (x_2; y_2; z_2), \\ \mathbf{r}_3 &= (x_3; y_3; z_3), \end{aligned}$$

tai

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Bazė $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ *vadinama dualia bazei* $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, *kai teisingos lygybės*

$$\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \textit{kai } i = k, \\ 0, & \textit{kai } i \neq k; \end{cases} \qquad i, k = 1, 2, 3. \tag{1}$$

skaliarinė sandauga

Nesunku įsitikinti, kad (1) lygybė vienareikšmiškai nusako dualią bazę duotai bazei $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Galima įrodyti, kad

vektorinė sandauga

$$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}, \qquad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}, \qquad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}.$$

Pasirinkus bet kokį erdvės vektorių $\mathbf{x}$, galima jį išreikšti abiejose bazėse. Būtent:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{r}^1 + x_2\mathbf{r}^2 + x_3\mathbf{r}^3, \\ \mathbf{x} &= x^1\mathbf{r}_1 + x^2\mathbf{r}_2 + x^3\mathbf{r}_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Skaičiai x_1, x_2, x_3 vadinami vektoriaus $\mathbf{x}$ kovariantinėmis koordinatėmis, o x^1, x^2, x^3 kontravariantinėmis koordinatėmis.

Pastabos:

1. Jei $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra ortonormuota, tai dualioji bazė $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ sutampa su baze $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.
2. Trumpindami formules susitariame: jeigu reiškinyje yra du vienodi indeksai - vienas apatinis kitas viršutinis, tai laikome, kad reiškinys yra suma: indeksams suteikiamos reikšmės 1, 2, 3 ir gauti dėmenys sudedami. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} x_i\mathbf{r}^i &= x_1\mathbf{r}^1 + x_2\mathbf{r}^2 + x_3\mathbf{r}^3, \\ x^i\mathbf{r}_i &= x^1\mathbf{r}_1 + x^2\mathbf{r}_2 + x^3\mathbf{r}_3. \end{aligned}$$

3. Jeigu erdvė yra dvimatė, o ne trimatė, visi indeksai gali įgyti dvi, o ne tris reikšmes.

Kiekvienas vektorius $\mathbf{x}$ turi kovariantines ir kontravariantines koordinates. Kaip jas rasti?
Iš (1) ir (2) turime

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\mathbf{r}_k &= (x_i\mathbf{r}^i)\mathbf{r}_k = x_i(\mathbf{r}^i\mathbf{r}_k) = x_i\delta_k^i = x_k, \\ \mathbf{x}\mathbf{r}^k &= (x^i\mathbf{r}_i)\mathbf{r}^k = x^i(\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k) = x^i\delta_k^i = x^k. \end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned} x_k &= \mathbf{x}\mathbf{r}_k, \\ x^k &= \mathbf{x}\mathbf{r}^k. \end{aligned}$$

visiems $k = 1, 2, 3$.

Remdamiesi gautomis lygybėmis, (2) formulę galima užrašyti taip:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{r}_i)\mathbf{r}^i, \\ \mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{r}^i)\mathbf{r}_i.\end{array}\right\}$$

Gauti sąryšiai vadinami Gibso* formulėmis.

Uždaviniai

1. Nustatykite ar vektoriai $\mathbf{r}_1 = (1; 0; 1)$, $\mathbf{r}_2 = (2; 2; 0)$, $\mathbf{r}_3 = (1; -1; 0)$ sudaro bazę erdvėje $\mathbb{R}^3$.
2. Įsitikinkite, kad vektoriai $\mathbf{r}_1 = (1; 1; 1)$, $\mathbf{r}_2 = (1; 0; 1)$, $\mathbf{r}_3 = (-1; -1; 0)$ sudaro bazę ir raskite šiai bazei dualią bazę.
3. Įsitikinkite, kad vektoriai $\mathbf{r}_1 = (1; 1; 1)$, $\mathbf{r}_2 = (1; 1; 2)$, $\mathbf{r}_3 = (1; 2; 3)$ sudaro bazę. Raskite vektoriaus $\mathbf{x} = (3; -2; 4)$ kovariantines ir kontravariantines koordinates.
4. Įsitikinkite, kad vektoriai $\mathbf{r}_1 = (1; 1; 2)$, $\mathbf{r}_2 = (1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $\mathbf{r}_3 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ sudaro bazę. Raskite vektoriaus $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4})$ kovariantines ir kontravariantines koordinates.
5. Sakykime $\mathbf{r}_1 = (2; 1; 3; 1)$, $\mathbf{r}_2 = (1; 2; 0; 1)$, $\mathbf{r}_3 = (-1; 1; -3; 0)$. Raskite erdvės $\mathbb{R}^4$ poerdvio $L(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3)$ dimensiją, bazę ir dualią bazę. Aibė $L(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3)$ yra vektorių sistemos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ tiesinis apvalkalas, t. y. $L(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = u_1\mathbf{r}_1 + u_2\mathbf{r}_2 + u_3\mathbf{r}_3 : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}$.

8.2 Dualių bazių transformavimas

Sakykime $\mathbf{r}_i$ ir $\mathbf{r}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ yra viena kitai dualios bazės, o $\mathbf{r}_{i'}$ ir $\mathbf{r}^{i'}$ – naujos dualios bazės. Aišku, kad

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i, \\ \mathbf{r}_i = b^{i'}_i\mathbf{r}_{i'},\end{array}\right\} \qquad i, i' = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Kadangi užrašytos transformacijos viena kitai atvirkštinės tai matricos $(b^i_{i'})$ ir $(b^{i'}_i)$ irgi viena kitai atvirkštinės.

Analogiškai

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{r}^{i'} = \tilde{b}^{i'}_i\mathbf{r}^i, \\ \mathbf{r}^i = \tilde{b}^i_{i'}\mathbf{r}^{i'},\end{array}\right\} \qquad i, i' = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Dėl tos pačios priežasties matricos $(\tilde{b}^i_{i'})$ ir $(\tilde{b}^{i'}_i)$ irgi atvirkštinės. Parodysime, jog $(b^i_{i'})$ ir $(\tilde{b}^i_{i'})$ sutampa. Tuomet bus parodyta kad matricos $(b^{i'}_i)$ ir $(\tilde{b}^{i'}_i)$ irgi sutampa.

▶

Iš (1) lygybės turime

$$\mathbf{r}_{i'}\mathbf{r}^k = (b^i_{i'}\mathbf{r}_i)\mathbf{r}^k = b^i_{i'}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k) = b^i_{i'}\delta^k_i = b^k_{i'}.$$

Taigi $b^k_{i'} = \mathbf{r}_{i'}\mathbf{r}^k$.

Iš (2) lygybės turime

$$\mathbf{r}^i\mathbf{r}_{k'} = (\tilde{b}^i_{i'}\mathbf{r}^{i'})\mathbf{r}_{k'} = \tilde{b}^i_{i'}(\mathbf{r}^{i'}\mathbf{r}_{k'}) = \tilde{b}^i_{i'}\delta^{k'}_{i'} = \tilde{b}^i_{k'}.$$

Iš čia $\tilde{b}^i_{k'} = \mathbf{r}^i\mathbf{r}_{k'} = \mathbf{r}_{k'}\mathbf{r}^i$.

Matosi, kad $b^i_{i'} = \tilde{b}^i_{i'}$ $(i, i' = 1, 2, 3)$. Taigi matricos $(b^i_{i'})$ ir $(\tilde{b}^i_{i'})$ sutampa.

◀

Vadinasi, norint pakeisti dualias bazes $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$ bazėmis $\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}$ užtenka žinoti bazės $\mathbf{r}_i$ keitimo baze $\mathbf{r}_{i'}$ matricą $(b^i_{i'})$. (1) ir (2) formules galima taip perrašyti:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i, & \\ \mathbf{r}_i = b^{i'}_i\mathbf{r}_{i'}, & \\ & (b^{i'}_i) = (b^i_{i'})^{-1}. \\ \mathbf{r}^{i'} = b^{i'}_i\mathbf{r}^i, & \\ \mathbf{r}^i = b^i_{i'}\mathbf{r}^{i'}, & \end{array}\right\} \tag{3}$$

Sakykime x_i ir $x_{i'}$ yra vektoriaus $\mathbf{x}$ kovariantinės koordinatės bazėse $\mathbf{r}^i$ ir $\mathbf{r}^{i'}$. Rasime ryšį tarp šių koordinačių.

* D. V. Gibsas (1839–1903) – amerikiečių fizikas teoretikas

▶
Iš Gibso formulių

$$x_{i'} = \mathbf{x}\mathbf{r}_{i'}.$$

Kadangi $\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i$, tai

$$x_{i'} = \mathbf{x}b^i_{i'}\mathbf{r}_i = b^i_{i'}(\mathbf{x}\mathbf{r}_i) = b^i_{i'}x_i.$$

◀

Vadinasi, kovariantinių vektoriaus koordinačių transformavimo formulės, kai sena bazė keičiama nauja, yra tokios:

$$x_{i'} = b^i_{i'}x_i. \tag{4}$$

Matome, kad naujoms kovariantinėms koordinatėms rasti naudojama matrica pervedanti seną sistemą į naują. Iš čia ir koordinačių pavadinimas. Kovariantinis = suderintai kintantis.

Analogiškai (4) formulei galima gauti

$$x^{i'} = b^{i'}_i x^i. \tag{5}$$

Iš šios formulės matome, kad skaičiuojant kontravariantines koordinates naudojama senos bazės keitimo nauja atvirkštinė matrica $(b^{i'}_i) = (b^i_{i'})^{-1}$. Iš čia ir koordinačių pavadinimas. Kontravariantinis = priešingai kintantis.

Uždaviniai

1. Raskite matricą, kuri bazę $\mathbf{r}_1 = (1;1)$, $\mathbf{r}_2 = (1;2)$ keičia baze $\mathbf{r}_{1'} = (-1;-1)$, $\mathbf{r}_{2'} = (-1;-3)$.
2. Raskite matricą, kuri bazę $\mathbf{r}_1 = (1;0;1)$, $\mathbf{r}_2 = (2;2;0)$, $\mathbf{r}_3 = (1;-1;0)$ keičia baze $\mathbf{r}_{1'} = (1;1;1)$, $\mathbf{r}_{2'} = (1;0;1)$, $\mathbf{r}_{3'} = (-1;-1;0)$.
3. Raskite matricą atvirkštinę matricai
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Sakykime $\mathbf{r}_1 = (1;1;0)$, $\mathbf{r}_2 = (0;1;1)$, $\mathbf{r}_3 = (1;0;1)$ yra erdvės $\mathbb{R}^3$ bazė. Tegul $\mathbf{x} = \mathbf{r}^1 + 2\mathbf{r}^2 + 3\mathbf{r}^3$ vektoriaus $\mathbf{x}$ išraiška kovariantinėmis koordinatėmis. Raskite vektoriaus $\mathbf{x}$ kovariantines koordinates bazėje $\mathbf{r}^{1'}, \mathbf{r}^{2'}, \mathbf{r}^{3'}$ jeigu $\mathbf{r}_{1'} = (1;2;3)$, $\mathbf{r}_{2'} = (2;3;4)$, $\mathbf{r}_{3'} = (3;4;5)$.
5. Sakykime $\mathbf{r}_1 = (1;1;2)$, $\mathbf{r}_2 = (1;2;1)$, $\mathbf{r}_3 = (2;1;1)$ yra erdvės $\mathbb{R}^3$ bazė. Tegul $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3$ vektoriaus $\mathbf{x}$ išraiška kontravariantinėmis koordinatėmis. Raskite vektoriaus $\mathbf{x}$ kontravariantines koordinates bazėje $\mathbf{r}_{1'} = (-1;0;1)$, $\mathbf{r}_{2'} = (-1;-1;0)$, $\mathbf{r}_{3'} = (0;-1;-1)$.

8.3 Tiesinio operatoriaus invariantai

Reiškinius, nepriklausančius nuo bazės parinkimo vadinsime invariantais. Šiame skyrelyje nustatysime kelis tiesinio operatoriaus $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ invariantus.

Operatorių $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *vadiname tiesiniu, jeigu* $A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$ *bet kokiems vektoriams* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *ir bet kokiems realiems skaičiams* α, β.

1. *Sakykime* $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ *yra dualios bazės erdvėje* $\mathbb{R}^3$. *Dydis*

$$\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i$$

yra invariantas.

▶
Reikia įrodyti, kad imant naujas bazes $\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}$ bus teisinga lygybė

$$\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^{i'} A\mathbf{r}_{i'}.$$

Sakykime $(b^i_{i'})$ bazės $\mathbf{r}_i$ keitimo baze $\mathbf{r}_{i'}$ matrica. Tada (žr. (3) iš 8.2 skyrelio)

$$\mathbf{r}_i = b^{i'}_i \mathbf{r}_{i'}, \quad \mathbf{r}^i = b^i_{k'} \mathbf{r}^{k'}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = b^i_{k'} \mathbf{r}^{k'} A b^{i'}_i \mathbf{r}_{i'} = (b^i_{k'} b^{i'}_i) \mathbf{r}^{k'} A\mathbf{r}_{i'} = \delta^{i'}_{k'} \mathbf{r}^{k'} A\mathbf{r}_{i'} = \mathbf{r}^{i'} A\mathbf{r}_{i'}.$$

◀

Tiesinio operatoriaus invariantą $\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i$ vadiname to operatoriaus divergencija ir žymime $\operatorname{div} A$. *Taigi* $\operatorname{div} A = \mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i$.

Turėdami bazę $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ tiesinį operatorių A galime aprašyti matrica (a^k_i), kur

$$A\mathbf{r}_i = a^k_i \mathbf{r}_k.$$

Iš čia

$$\mathbf{r}^j A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^j a^k_i \mathbf{r}_k = a^k_i \mathbf{r}^j \mathbf{r}_k = a^k_i \delta^j_k = a^j_i.$$

Taigi

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} = (a^j_i) = (\mathbf{r}^j A\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^1 A\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^1 A\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^1 A\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}^2 A\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^2 A\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^2 A\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}^3 A\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^3 A\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^3 A\mathbf{r}_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vadinasi, jei A matrica bazėje $\mathbf{r}_i$ yra (a^k_i), tai

$$\operatorname{div} A = \mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^1 A\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}^2 A\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}^3 A\mathbf{r}_3 = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3. \tag{2}$$

2. *Tegul vėl $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ yra dualios bazės erdvėje $\mathbb{R}^3$. Dydis $\mathbf{r}_i \times A\mathbf{r}^i$ yra invariantas.*

▶
Sakykime $\mathbf{r}_{i'}$ naujoji bazė, o $(b^i_{i'})$ bazės $\mathbf{r}_i$ keitimo baze $\mathbf{r}_{i'}$ matrica.
Tada

$$\mathbf{r}_i = b^{i'}_i \mathbf{r}_{i'}, \quad \mathbf{r}^i = b^i_{k'} \mathbf{r}^{k'}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{r}_i \times A\mathbf{r}^i = (b^{i'}_i \mathbf{r}_{i'}) \times (A b^i_{k'} \mathbf{r}^{k'}) = (b^{i'}_i b^i_{k'})(\mathbf{r}_{i'} \times A\mathbf{r}^{k'}) = \delta^{i'}_{k'} (\mathbf{r}_{i'} \times A\mathbf{r}^{k'}) = \mathbf{r}_{i'} \times A\mathbf{r}^{i'}.$$

◀

Tiesinio operatoriaus A invariantą $\mathbf{r}_i \times A\mathbf{r}^i$ vadiname to operatoriaus rotoriumi ir žymime $\operatorname{rot} A$.
Taigi

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{r}_i \times A\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_1 \times A\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}_2 \times A\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}_3 \times A\mathbf{r}^3. \tag{3}$$

3. Sakykime $\mathbb{R}^3$ duota ortonormuota bazė $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Kadangi šiuo atveju duali bazė sutampa su baze $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, tai $\operatorname{div} A$ ir $\operatorname{rot} A$ įgauna paprastenes išraiškas. Pagal (1) formulę sudarome operatoriaus A matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} = \mathbf{i}A\mathbf{i} & a_{12} = \mathbf{i}A\mathbf{j} & a_{13} = \mathbf{i}A\mathbf{k} \\ a_{21} = \mathbf{j}A\mathbf{i} & a_{22} = \mathbf{j}A\mathbf{j} & a_{23} = \mathbf{j}A\mathbf{k} \\ a_{31} = \mathbf{k}A\mathbf{i} & a_{32} = \mathbf{k}A\mathbf{j} & a_{33} = \mathbf{k}A\mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Tada pagal(2) formulę

$$\operatorname{div} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathbf{i}A\mathbf{i} + \mathbf{j}A\mathbf{j} + \mathbf{k}A\mathbf{k}.$$

Pagal (3) formulę:

$$\mathrm{rot}\,A = \mathbf{i} \times A\mathbf{i} + \mathbf{j} \times A\mathbf{j} + \mathbf{k} \times A\mathbf{k}.$$

Kadangi

$$A\mathbf{i} = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k},$$

tai

$$\mathbf{i} \times A\mathbf{i} = \mathbf{i} \times (a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}) = a_{11}\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_{21}\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_{31}\mathbf{i} \times \mathbf{k} = a_{21}\mathbf{k} - a_{31}\mathbf{j}.$$

Analogiškai

$$\mathbf{j} \times A\mathbf{j} = a_{32}\mathbf{i} - a_{12}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{k} \times A\mathbf{k} = a_{13}\mathbf{j} - a_{23}\mathbf{i}.$$

Pagaliau

$$\mathrm{rot}\,A = (a_{32} - a_{23})\mathbf{i} + (a_{13} - a_{31})\mathbf{j} + (a_{21} - a_{12})\mathbf{k}.$$

Uždaviniai

1. Operatorius A nusakytas lygybe $A(x;y;z) = (3x + z; x - y; 2y)$. Įrodykite, kad operatorius A tiesinis, raskite šio operatoriaus matricą bazėje $\mathbf{r}_1 = (1;1;0)$, $\mathbf{r}_2 = (0;1;1)$, $\mathbf{r}_3 = (0;0;1)$.
2. Tiesinio operatoriaus A natrica bazėje $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra tokia:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Raskite operatoriaus A matricą bazėje $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_3 = 2\mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Raskite operatoriaus A divergenciją $\mathrm{div}\,A$ ir rotorių $\mathrm{rot}\,A$.
3. Tiesinis operatorius A nusakytas formule $A(x;y;z) = (3x + 4y + 6z; 4x + 2y + z; x + y)$. Raskite šio operatoriaus divergenciją $\mathrm{div}\,A$ ir rotorių $\mathrm{rot}\,A$.
4. Tiesinis operatorius A nusakytas formule $A(x;y;z) = (-x + 2y - 3z; 4x - 5y - z; -y - z)$. Raskite šio operatoriaus divergenciją $\mathrm{div}\,A$ ir rotorių $\mathrm{rot}\,A$.
5. Tiesinio operatoriaus matrica bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ yra

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Raskite šio operatoriaus matricą bazėje $\mathbf{r}_1 = (1;1;1)$, $\mathbf{r}_2 = (1;0;-1)$, $\mathbf{r}_3 = (-1;0;0)$. Kam lygi operatoriaus divergencija $\mathrm{div}\,A$ ir rotorius $\mathrm{rot}\,A$?

8.4 Skaliarinis ir vektorinis laukai

Sakykime Ω yra plokštumos arba erdvės sritis.

Sakome, kad srityje yra nusakytas skaliarinis laukas, jeigu kiekvienam srities Ω taškui M pagal kokį nors dėsnį priskiriamas skaičius $u(M)$. Kitaip sakant, skaliarinis laukas yra funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Vektorinis laukas apibrėžiamas analogiškai.

Jei kiekvienam srities Ω taškui M priskiriamas vektorius $\mathbf{p}(M)$, tai sakoma, kad srityje Ω yra apibrėžtas vektorinis laukas $\mathbf{p}$. Kitaip sakant, vektorinis laukas yra funkcija $\mathbf{p} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Uždaviniai

1. Kiekvienam rutulio $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ (čia a – teigiama konstanta) taškui $M(x; y; z)$ apskaičiuotas atstumas nuo M iki ašies Oz. Pažymėkime šį atstumą u. Parodykite, kad u yra skaliarinis laukas ir raskite jo išraišką.
2. Skaliarinis laukas u apibrėžtas lygybe $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 8)^2}$. Raskite $\max u$ srityje $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36\}$.
3. Bet kurį erdvės tašką $M(x; y; z)$ veikia centrinė jėga $\mathbf{F}$, kuri nukreipta iš M į tašką $O(0; 0; 0)$. Šios jėgos dydis atvirkščiai proporcingas atstumo nuo taško M iki O kubui. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{F}$ išraišką bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
4. Skystis, užpildantis visą erdvę, sukasi apie ašį Oz prieš laikrodžio rodyklę pastoviu kampiniu greičiu ω. Sakykim $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ judančio erdvės taško $M(x, y, z)$ greičio vektorius. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{v}$ išraišką bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
5. Bet kurį erdvės tašką $M(x; y; z)$ veikia jėga $\mathbf{F}$ nukreipta statmenai į ašį Oz. Jėgos $\mathbf{F}$ dydis atvirkščiai proporcingas atstumui nuo taško $M(x; y; z)$ iki plokštumos xOy. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{F}$ išraišką bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

8.5 Skaliarinio lauko gradijentas

Sakykime $u : \Omega \to \mathbb{R}$ yra skaliarinis laukas.

1 apibrėžimas. *Skaliarinis laukas vadinamas diferencijuojamu taške M, jeigu visiems M' iš kokios nors taško M aplinkos lauko pokytį Δu taške M galima išreikšti lygybe*

$$\Delta u = \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{r} + o(\varrho), \tag{1}$$

čia:

$\Delta u = u(M') - u(M)$,

$\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{MM'}$,

$\mathbf{g}$ – *vektorius, priklausantis, gal būt, nuo M, bet nepriklausantis nuo M',*

$\varrho = \varrho(MM') = |\Delta \mathbf{r}|$ – *atstumas tarp M ir M'.*

Skaliarinis laukas vadinamas diferencijuojamu srityje Ω, jei jis diferencijuojamas kiekviename srities Ω taške.

2 apibrėžimas. *Jeigu skaliarinis laukas u diferencijuojamas taške M, tai vektorius $\mathbf{g}$ iš (1) lygybės vadinamas šio lauko gradijentu taške M. Gradijentas žymimas* $\operatorname{grad} u$.

Dydis $\operatorname{grad} u\ \Delta \mathbf{r}$ paprastai vadinamas skaliarinio lauko diferencialu ir žymimas du.

Kai $|\Delta \mathbf{r}|$ mažas $\Delta \mathbf{r}$ paprastai žymimas $d\mathbf{r}$.

Po tokių pastabų (1) formulė įgauna pavidalą

$$\Delta u = du + o(\varrho) = \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{r} + o(\varrho) \tag{1*}$$

Jei skaliarinis laukas u turi gradijentą kiekviename srities Ω taške, tai $\operatorname{grad} u$ jau yra vektorinis laukas apibrėžtas srityje Ω. Kadangi gradijento apibrėžime nėra nieko apie koordinačių sistemą, tai $\operatorname{grad} u$ yra invariantas.

Jei u ir v yra du diferencijuojami skaliariniai laukai, tai nesunku įrodyti tokias lygybes:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,\\
&\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u,\\
&\operatorname{grad}(u/v) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} \qquad (\text{jei} v \neq o).
\end{aligned}$$

3 apibrėžimas. *Tegul $M \in \Omega$, o $\mathbf{e}$ - vienetinis vektorius nurodantis kryptį taške M. Imkime Ω srities tašką M', kad vektorius $\overrightarrow{MM'}$ būtų lygiagretus vektoriui $\mathbf{e}$. Tegul, kaip ir anksčiau, $\varrho = \varrho(MM')$. Jeigu egzistuoja riba*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\Delta u}{\varrho},$$

tai ta riba vadinama skaliarinio lauko u išvestine taške M vektoriaus $\mathbf{e}$ kryptimi ir žymima simboliu $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}$.

Teiginys. *Jeigu u diferencijuojamas taške M, tai lauko u išvestinė $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}$ egzistuoja taške M bet kuria kryptimi $\mathbf{e}$ ir*

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e},$$

jeigu $\mathbf{e}$ vienetinis vektorius.

▶

Tegul $\mathbf{e}$ fiksuotas, o $\overrightarrow{MM'} = \Delta \mathbf{r}$ kolinearus vektoriui $\mathbf{e}$. Tada $\Delta \mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}$. Pagal ($1^*$) formulę turime:

$$\Delta u = (\operatorname{grad} u) \varrho \mathbf{e} + o(\varrho) = (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e}) \varrho + o(\varrho).$$

Todėl

$$\frac{\Delta u}{\varrho} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e} + \frac{o(\varrho)}{\varrho}.$$

Perėję prie ribos, kai $\varrho \to 0$, gauname

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\Delta u}{\varrho} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e} + \lim_{\varrho \to 0} \frac{o(\varrho)}{\varrho} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e}.$$

Taigi $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \operatorname{grad} u \, \mathbf{e}$ pagal 3 apibrėžimą.

◀

Kai erdvėje parinkta ortonormuota bazė $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, $\operatorname{grad} u$ išraiška gana paprasta. Rasime ją.

Kadangi pagal Gibso formules

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{i}(\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{i}) + \mathbf{j}(\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{j}) + \mathbf{k}(\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{k}),$$

ir

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

tai

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{i}}\Big) + \mathbf{j}\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{j}}\Big) + \mathbf{k}\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{k}}\Big) = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Uždaviniai

1. Skaliarinio lauko
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$
taškuose $A(1;2;2)$ ir $B(-3;1;0)$ nubrėžti šio lauko gradijentai. Kokį kampą jie sudaro?
2. Kokiuose erdvės taškuose skaliarinio lauko $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ gradijentas lygiagretus ašiai Oz?
3. Skaliarinis laukas aprašytas lygybe
$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
Raskite $\sup |\operatorname{grad} u|$, kai $z \in (1, 2)$.
4. Raskite lauko
$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
išvestinę vektoriaus $\mathbf{l} = (1;2;3)$ kryptimi.
5. Raskite lauko $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ išvestinę taške $M(x;y;z)$ vektoriaus $\mathbf{r} = x\mathbf{i} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ kryptimi. Čia a, b, c yra teigiamos konstantos.

8.6 Vektorinio lauko divergencija ir rotorius

Sakykime $\mathbf{p} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ yra vektorinis laukas.

1 apibrėžimas. *Vektorinis laukas* $\mathbf{p}$ *vadinamas diferencijuojamu taške* M $(M \in \Omega)$*, jeigu visiems* M' *iš kokios nors taško* M *aplinkos*

$$\Delta\mathbf{p} = A\Delta\mathbf{r} + o(|\Delta\mathbf{r}|), \tag{1}$$

kur

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(M') - \mathbf{p}(M),$$
$$\Delta\mathbf{r} = \overrightarrow{MM'},$$

o A *yra tiesinis operatorius nepriklausantis nuo* $\Delta\mathbf{r}$ *(t. y. nuo taško* M'*).*

Vektorinis laukas vadimamas diferencijuojamu srityje Ω jeigu jis diferencijuojamas kiekviename srities Ω taške.

2 apibrėžimas. *Sakykime* $M \in \Omega$*, o* $\mathbf{e}$ *yra vienetinis vektorius. Imkime* $M' \in \Omega$ *taip, kad* $\overrightarrow{MM'} \| \mathbf{e}$*. Pažymėkime* $\varrho = \varrho(MM') = |\Delta\mathbf{r}|$*. Jeigu egzistuoja riba*

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\varrho},$$

tai ji vadinama lauko $\mathbf{p}$ *išvestine taške* M *kryptimi* $\mathbf{e}$ *ir žymima simboliu* $\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{e}}$*.*

Teiginys. *Jeigu laukas* $\mathbf{p}$ *yra diferencijuojamas srities* Ω *taške* M*, tai lauko* $\mathbf{p}$ *išvestinė* $\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{e}}$ *tame taške bet kuria kryptimi* $\mathbf{e}$ *egzistuoja ir:*

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{e}} = A\mathbf{e}, \tag{2}$$

kur A *- tiesinis operatorius iš (1) lygybės, o* $\mathbf{e}$ *- vienetinis vektorius.*

▶
Sakykime $\mathbf{e}$ - fiksuotas vektorius, o M' pasirinktas taip, kad $\overrightarrow{MM'} \| \mathbf{e}$. Tada

$$\Delta\mathbf{r} = \varrho\mathbf{e},$$
$$|\Delta\mathbf{r}| = \varrho.$$

Įstatę šiuos dydžius į (1) formulę, gauname

$$\Delta\mathbf{p} = \varrho A\mathbf{e} + o(\varrho).$$

Arba

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\varrho} = A\mathbf{e} + \frac{o(\varrho)}{\varrho}.$$

Perėję šioje lygybėje prie ribos, kai $\varrho \to 0$, gauname:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\Delta\mathbf{p}}{\varrho} = A\mathbf{e} + \lim_{\varrho\to 0}\frac{o(\varrho)}{\varrho} = A\mathbf{e}.$$

Taigi pagal 2 apibrėžimą

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{e}} = A\mathbf{e}.$$

◀

Sakykime erdvėje pasirinkta ortonormuota bazė $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Rasime vektorinį lauką atitinkančio diferencialinio operatoriaus A matricą šioje bazėje.

Tegul $\mathbf{p} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Pagal (2) formulę

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{i}} = A\mathbf{i}, \qquad \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{j}} = A\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{k}} = A\mathbf{k}.$$

Antra vertus
$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{i}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{j}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}.$$

Iš šių formulių galima rasti operatoriaus A matricą (žr. 8.3 skyrelio 3 dalį):

$$a_{11} = \mathbf{i}A\mathbf{i} = \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial P}{\partial x},$$
$$a_{12} = \mathbf{i}A\mathbf{j} = \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \left(\frac{\partial (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})}{\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

....

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{x} & \frac{\partial P}{y} & \frac{\partial P}{z} \\ \frac{\partial Q}{x} & \frac{\partial Q}{y} & \frac{\partial Q}{z} \\ \frac{\partial R}{x} & \frac{\partial R}{y} & \frac{\partial R}{z} \end{pmatrix}.$$

Matome kad operatorius A kinta einant iš vieno srities taško į kitą. Taigi jis priklauso nuo taško M, bet žinoma nepriklauso nuo $\Delta \mathbf{r}$.

3 apibrėžimas. *Lauko* $\mathbf{p}$ *divergencija ir rotoriumi srities* Ω *taške* M *vadiname tiesinio operatoriaus* A *iš (1) lygybės divergenciją ir rotorių. T. y.*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{p} = \mathrm{div}\,A, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{p} = \mathrm{rot}\,A.$$

Kai erdvėje yra ortonormuota bazė $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, iš gautos operatoriaus matricos $\hat{A}$ ir 8.3 skyrelio pabaigoje esančių formulų išplaukia lygybės:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Vektorinio lauko $\mathbf{p}$, diferencijuojamo kiekviename srities Ω taške, divergencija $\mathrm{div}\,\mathbf{p}$ yra naujas skaliarinis laukas, o $\mathrm{rot}\,\mathbf{p}$ – naujas vektorinis laukas.

Turėdami operatoriaus A matricą ortonormuotoje bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nesunkiai galime surasti ir vektorinio lauko $\mathbf{p} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ išvestinę bet kuria kryptimi $\mathbf{e} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$. Būtent:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{e}} &= A\mathbf{e} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) = \cos\alpha A\mathbf{i} + \cos\beta A\mathbf{j} + \cos\gamma A\mathbf{k} \\
&= \cos\alpha\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \\
&= \cos\alpha\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{k}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{k}\right) + \cos\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} & \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{i} & \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{i} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}\mathbf{j} & \frac{\partial Q}{\partial y}\mathbf{j} & \frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{j} \\ \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{k} & \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{k} & \frac{\partial R}{\partial z}\mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Uždaviniai

1. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = (x^2+z^2)\mathbf{i}+(z^2+x^2)\mathbf{j}+(x^2+y^2)\mathbf{k}$ divergenciją ir rotorių taške $M(3;4;5)$.
2. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$ rotorių ir divergenciją taške $M(1;2;-2)$.
3. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ bazėje $\mathbf{r}_1 = (0;1;1)$, $\mathbf{r}_2 = (1;0;1)$, $\mathbf{r}_3 = (1;1;0)$ aprašytas lygtimi $\mathbf{p} = xyz\mathbf{r}_1+(x^2-y^2)\mathbf{r}_2$. Raskite šio vektorinio lauko diferencialinio operatoriaus matricas bazėje $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ ir bazėje $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$.
4. Raskite vektorinio lauko
$$\mathbf{p} = \frac{-\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
išvestinę taške $M(3;4;5)$ kryptimi $\mathbf{l} = (1;1;1)$.
5. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ bazėje $\mathbf{r}_1 = (0;0;1;)$, $\mathbf{r}_2 = (1;0;1)$, $\mathbf{r}_3 = (1;1;0)$ aprašomas lygybe
$$\mathbf{p} = (y^2+z^2)\mathbf{r}_1 + (z^2+x^2)\mathbf{r}_2 + (x^2+y^2)\mathbf{r}_3.$$
Kokiuose taškuose šio lauko rotorius lygiagretus vektoriui $\mathbf{l} = (1;2;3)$?

8.7 Kartotinės lauko teorijos operacijos

Sakykime Ω yra erdvės $\mathbb{R}^3$ sritis. Tarkime šioje srityje apibrėžtas skaliarinis laukas $u:\Omega\to\mathbb{R}$ ir vektorinis laukas $\mathbf{p}:\Omega\to\mathbb{R}^3$. Tarkime, kad u yra du kartus tolydžiai diferencijuojamas, o $\mathbf{p}$ koordinatinės funkcijos irgi du kartus tolydžiai diferencijuojamos.

Šiomis sąlygomis $\mathrm{grad}u$ yra srityje Ω diferencijuojamas vektorinis laukas, $\mathrm{div}\mathbf{p}$ - diferencijuojamas skaliarinis laukas, $\mathrm{rot}\mathbf{p}$ - diferencijuojamas vektorinis laukas. Galimos tokios kartotinės operacijos:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}u,\quad \mathrm{div}\,\mathrm{grad}u,\quad \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{p},\quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{p},\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{p}.$$

I. $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}u = 0.$ (1)

▶
Sakykime Ω srityje yra ortonormuota bazė $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$. Tada (žr. 8.5 skyrelį)

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Pagal 8.6 skyrelyje gautą formulę

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}u &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\right)\mathbf{k}\\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k}=0.\end{aligned}$$

Kadangi reiškinys $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}u$ yra invariantas, tai ir visose erdvės $\mathbb{R}^3$ bazėse teisinga (1) lygybė.

◀

II. $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{p} = 0.$

▶
Sakykime Ω srityje vėl gi yra stačiakampė Dekarto koordinačių sistema nusakyta ortonormuota baze $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$. Tegul

$$\mathbf{p} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}.$$

Pagal 8.6 skyrelio formules:

$$\mathrm{rot}\mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y} = 0.$$

Kadangi reiškinys $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{p}$ yra invariantas, tai ir kitose erdvės $\mathbb{R}^3$ bazėse $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{p} = 0$.

◀

III. Operacija $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$ vadinama skaliarinio lauko u Laplaso * operatoriumi ir žymima $\Delta_L u$. T. y.

$$\Delta_L u = \operatorname{div}\operatorname{grad}u.$$

Ortonormuotoje erdvės $\mathbb{R}^3$ bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ turime

$$\Delta_L u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Iš tiesų

$$\Delta_L u = \operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

IV. Likusias dvi kartotines operacijas sieja lygybė

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{p} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{p} - \Delta_L\mathbf{p}.$$

Joje vektoriniam laukui $\mathbf{p} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

$$\Delta_L\mathbf{p} = \Delta_L P\mathbf{i} + \Delta_L Q\mathbf{j} + \Delta_L R\mathbf{k}.$$

Uždaviniai

1. Raskite skaliarinio lauko $u = e^{xyz}$ Laplaso operatorių taške $M(0;1;1)$.
2. Vektorinis laukas aprašomas lygybe $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Raskite $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{p})$.
3. Vektorinis laukas aprašomas lygybe $\mathbf{p} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Raskite $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{p})$.
4. Skystis užpildantis ervę sukasi apie vektorių $\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pastoviu kampiniu greičiu ω. Pažymėkime $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x;y;z)$ greičio vektorių taške $M(x,y,z)$. Raskite $\operatorname{div}\mathbf{v}$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}$.
5. Sakykim u ir v yra skaliariniai laukai apibrėžti srityje Ω. Raskite formules $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$ ir $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$ skaičiavimui.

8.8 Kreivinės koordinatės

Sakykime Ω yra erdvės $\mathbb{R}^3$ sritis, o x, y, z tos erdvės Dekarto koordinatės. Sakykim $\tilde{\Omega}$ yra erdvės $\tilde{\mathbb{R}}^3$ sritis, o x^1, x^2, x^3 tos erdvės Dekarto koordinatės. Sakykime

$$x = x(x^1;x^2;x^3), \qquad y = y(x^1;x^2;x^3), \qquad z = z(x^1;x^2;x^3) \tag{1}$$

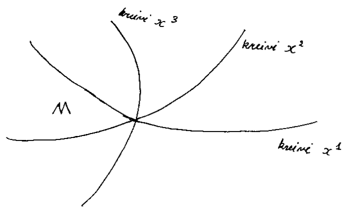
abipus vienareikšmis tolydus atvaizdis $\tilde{\Omega} \to \Omega$.

* P. S. Laplasas (1749–1827) – prancūzų astronomas, matematikas, fizikas.

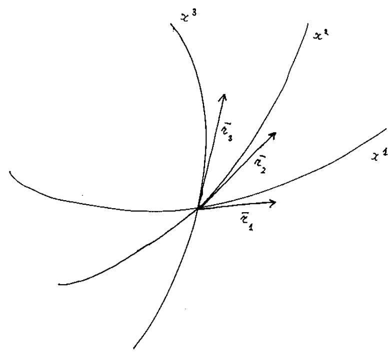
Šiuo atvaizdžiu srityje Ω įvedamos naujos koordinatės. Šias naujas koordinates vadiname kreivinėmis. Kodėl toks pavadinimas? Koordinatės, nes kiekvienam Ω srities taškui $M(x;y;z)$ galima surasti vienintelį trejetą $(x^1;x^2;x^3)$ iš (1) lygybių. Kreivinės, nes fiksavus dvi iš koordinačių x^1, x^2, x^3 (tegul, pavyzdžiui, $x^2 = a$, $x^3 = b$) o trečiai leidžiant kisti, srityje Ω gaunama kreivė x^1, kurios lygtys

$$x = x(x^1;a;b), \quad y = y(x^1;a;b), \quad z = z(x^1;a;b).$$

Per kiekvieną srities Ω tašką M eina trys koordinatinės kreivės x^1, x^2 ir x^3.



Taške M galime sudaryti bazę, kuri siejasi su šiomis kreivėmis. Tegul $\mathbf{r}_1$ yra kreivės x^1 liestinės vektorius taške M, $\mathbf{r}_2$ – kreivės x^2 liestinės vektorius taške M, $\mathbf{r}_3$ – kreivės x^3 liestinės vektorius taške M.



Aišku kad

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x^1}, \frac{\partial y}{\partial x^1}, \frac{\partial z}{\partial x^1}\right),\\
\mathbf{r}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial x^2}\right),\\
\mathbf{r}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x^3}, \frac{\partial y}{\partial x^3}, \frac{\partial z}{\partial x^3}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Vektoriai $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r_3}$ sudaro bazę, kai

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x}{\partial x^2} & \frac{\partial y}{\partial x^2} & \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x}{\partial x^3} & \frac{\partial y}{\partial x^3} & \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(x^1,x^2,x^3)} \neq 0.$$

Sudarius bazę $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, standartiniu būdu galima rasti dualią bazę $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$. Pakanka prisiminti 8.1 skyrelyje esančias formules. Būtent

$$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}, \qquad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}, \qquad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}.$$

Jei bazė $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra ortogonali ir $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sudaro dešininę sistemą, dualią bazę rasti paprasčiau. Tegul

$$|\mathbf{r}_1| = H_1, \quad |\mathbf{r}_2| = H_2, \quad |\mathbf{r}_3| = H_3.$$

Dydžiai H_1, H_2, H_3 vadinasi Lamė koeficientais*.

* G. Lamė (1795–1870) – prancūzų matematikas

Kadangi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra ortogonali dešininė sistema, tai

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3] &= H_1H_2H_3, \\
\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 &= \frac{H_2H_3}{H_1}\mathbf{r}_1, \\
\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 &= \frac{H_3H_1}{H_2}\mathbf{r}_2, \\
\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \frac{H_1H_2}{H_3}\mathbf{r}_3.
\end{aligned}
$$

Vadinasi, pagal aukščiau esančias formules

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}^1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2]} = \frac{H_2H_3}{H_1(H_1H_2H_3)}\mathbf{r}_1 = \frac{1}{H_1^2}\mathbf{r}_1, \\
\mathbf{r}^2 &= \frac{1}{H_2^2}\mathbf{r}_2, \\
\mathbf{r}^3 &= \frac{1}{H_3^2}\mathbf{r}_3.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Toliau – du pavyzdžiai apie tai, kaip randame $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ir $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ cilindrinių ir sferinių koordinačių atveju.

1. Cilindrinė koordinačių sistema.

Ši koordinačių sistema aprašoma lygybėmis

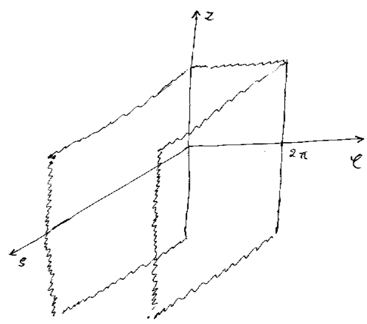
$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{4}$$

Vadinasi $x^1 = \varrho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$.

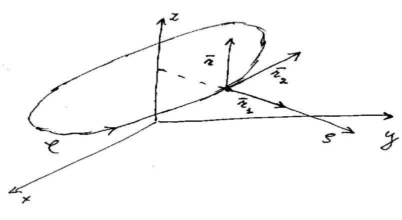
Be to laikoma, kad ϱ, φ ir z kinta intervaluose:

$$0 \leqslant \varrho < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Šiomis nelygybėmis erdvėje $\tilde{\mathbb{R}}^3$ nusakoma begalinė sritis $\tilde{\Omega}$, kurios vaizdas toks:



Lygtys (4) perveda šią sritį $\tilde{\Omega}$ į visą erdvę $\mathbb{R}^3$. Koordinatinės kreivės ϱ (kreivės x^1) yra spinduliai statmeni Oz ašiai. Koordinatinės kreivės φ (kreivės x^2) yra apskritimai, kurių centrai ašyje Oz. Koordinatinės kreivės z (kreivės x^3) yra tiesės lygiagrečios Oz ašiai.



Rasime vektorius $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ir $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ cilindrinėje koordinačių sistemoje. Pagal (2) turime

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}, \frac{\partial z}{\partial \varrho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\\
\mathbf{r}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0),\\
\mathbf{r}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Vektoriai $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sudaro ortogonalią bazę, nes $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = 0$. Kadangi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ dar ir dešininė sistema, tai norint rasti $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ galime naudoti (3) formules. Turime:

$$\begin{aligned}
&H_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,\\
&H_2 = |\mathbf{r}_2| = \sqrt{\varrho^2\sin^2\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi} = \varrho,\\
&H_3 = |\mathbf{r}_3| = 1.
\end{aligned}$$

Todėl pagal (3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^1 &= \frac{1}{H_1^2}\mathbf{r}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\\
\mathbf{r}^2 &= \frac{1}{H_2^2}\mathbf{r}_2 = (-\frac{\sin\varphi}{\varrho}, \frac{\cos\varphi}{\varrho}, 0),\\
\mathbf{r}^3 &= \frac{1}{H_3^2}\mathbf{r}_3 = (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

2. Sferinė koordinačių sistema.

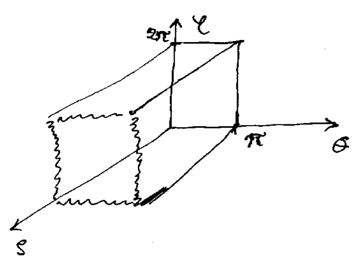
Ši sistema įvedama lygybėmis

$$x = \varrho\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \varrho\cos\theta. \tag{5}$$

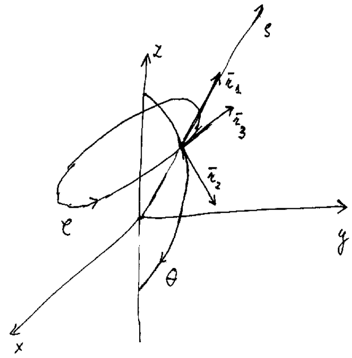
Šiuo atveju $x^1 = \varrho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. Be to laikoma:

$$0 \leqslant \varrho < +\infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Šiomis nelygybėmis erdvėje $\mathbb{R}^3$ aprašoma sritis $\tilde{\Omega}$, kurios vaizdas toks



Lygtys (5) sritį $\tilde{\Omega}$ perveda į visą erdvę $\mathbb{R}^3$. Koordinatinės kreivės ϱ (kreivės x^1) yra spinduliai išeinantys iš koordinačių pradžios taško. Koordinatinės kreivės θ (kreivės x^2) yra pusapskritimiai, kurių centrai sutampa su koordinačių pradžia, o jų plokštumos eina per ašį Oz. Kreivės φ (kreivės x^3) yra apskritimai su centrais ašyje Oz.



Pagal (2) turime:

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}, \frac{\partial z}{\partial \varrho}\right) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$
$$\mathbf{r}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (\varrho\cos\theta\cos\varphi, \varrho\cos\theta\sin\varphi, -\varrho\sin\theta),$$
$$\mathbf{r}_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = (-\varrho\sin\theta\sin\varphi, \varrho\sin\theta\cos\varphi, 0).$$

Kadangi $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = 0$, tai $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra ortogonali bazė. Be to vektoriai $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sudaro dešininę sistemą, todėl skaičiuojant $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ galima naudoti (3) formules. Kadangi

$$H_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$
$$H_2 = |\mathbf{r}_2| = \sqrt{\varrho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \varrho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \varrho^2\sin^2\theta} = \varrho,$$
$$H_3 = |\mathbf{r}_3| = \sqrt{\varrho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \varrho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = \varrho\sin\theta,$$

tai

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{H_1^2}\mathbf{r}_1 = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$
$$\mathbf{r}^2 = \frac{1}{H_2^2}\mathbf{r}_2 = \left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\varrho}, \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\varrho}, -\frac{\sin\theta}{\varrho}\right),$$
$$\mathbf{r}^3 = \frac{1}{H_3^2}\mathbf{r}_3 = \left(-\frac{\sin\varphi}{\varrho\sin\theta}, \frac{\cos\varphi}{\varrho\sin\theta}, 0\right).$$

Uždaviniai

1. Erdvėje $\mathbb{R}^3$ kreivinės koordinatės u, v susiję su Dekarto koordinatėmis x, y lygybėmis

$$u = x + y$$
$$v = x - y$$

Raskite kreivinę bazę $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ ir jai dualią bazę. Kam lygūs vektoriai $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}^u, \mathbf{r}^v$ taške $M(x = 2, y = 3)$?

2. Lygybės

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2, \qquad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0, \end{cases}$$

erdvėje $(\mathbb{R}^2)^+ = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ apibėžia kreivines koordinates. Nubrėžkite koordinatinių kreivių šeimas, raskite kreivinę bazę $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ ir jai dualią bazę $\mathbf{r}^u, \mathbf{r}^v$.

3. Lygybės

$$\begin{cases} x = \varrho\cos^3\varphi\cos^3\theta, \\ y = \varrho\sin^3\varphi\cos^3\theta, \\ z = \varrho\sin^3\theta, \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

erdvėje $\mathbb{R}^3$ apibrėžia kreivines koordinates ϱ, φ, θ. Raskite kreivinę bazę $\mathbf{r}_\varrho, \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\theta$ ir jai dualią bazę $\mathbf{r}^\varrho, \mathbf{r}^\varphi, \mathbf{r}^\theta$.

4. Lygybės

$$\begin{cases} x = s, \\ y = s^2 + v^2, \\ z = s^3 + v^3 + t^3, \quad s \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

erdvėje $(\mathbb{R}^3)^+ = \{(x, y, z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ apibrėžia kreivines kordinates s, v, t. Raskite kreivinę bazę $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_t$ ir jai dualią bazę $\mathbf{r}^s, \mathbf{r}^v, \mathbf{r}^t$. Kam lygūs šie vektoriai taške $M(x = 1, y = 2, z = 3)$?

8.9 Gradijentas kreivinėse koordinatėse

Sakykime $u : \Omega \to \mathbb{R}$ yra skaliarinis laukas, srityje Ω yra kreivinė koordinačių sistema (x^1, x^2, x^3), ir laukas u yra diferencijuojamas srityje Ω. Tuomet kiekviename taške $M \in \Omega$ egzistuoja $\operatorname{grad} u$ ir $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}$ bet kuria kryptimi $\mathbf{e}$.

Tegul $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ yra kreivinė bazė, o $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ jai duali. Kadangi $u = u(x, y, z)$,o

$$\begin{aligned} x &= x(x^1, x^2, x^3), \\ y &= y(x^1, x^2, x^3), \\ z &= z(x^1, x^2, x^3), \end{aligned}$$

tai $u = u\big(x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)\big)$.

Pagal sudėtinės funkcijos išvestinės radimo taisyklę turime:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dydžiai $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ yra vektoriaus $\operatorname{grad} u$ koordinatės bazėje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, o $\frac{\partial x}{\partial x^i}, \frac{\partial y}{\partial x^i}, \frac{\partial z}{\partial x^i}$ yra vektoriaus $\mathbf{r}_i$ koordinatės. Vadinasi, paskutinę lygybę galime užrašyti taip:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \mathbf{r}_i \operatorname{grad} u, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Iš Gibso formulių (žr. 8.1 skyrelį) turime

$$\operatorname{grad} u = (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}^i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\mathbf{r}^i.$$

Taigi, skaliarinio lauko u gradijentas kreivinėse koordinatėse $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ turi išraišką

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{x^i}\mathbf{r}^i = \frac{\partial u}{\partial x^1}\mathbf{r}^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2}\mathbf{r}^2 + \frac{\partial u}{\partial x^1}\mathbf{r}^3. \tag{1}$$

Kai kreivinių koordinačių sistema $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ortogonali, $\operatorname{grad} u$ įgauna paprastesnę išraišką, nes šiuo kart duali bazė randama pagal 8.8 skyrelio (3) formules. Panaudojus šias formules gauname

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{1}{H_1^2}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{1}{H_2^2}\mathbf{r}_2 + \frac{\partial u}{\partial x^3}\frac{1}{H_3^2}\mathbf{r}_3 = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\mathbf{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial x^3}\mathbf{r}_3. \tag{2}$$

Jei ortogonalią kreivinę bazę $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ortonormuosime, tai gausime ortonormuotą kreivinę bazę $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{H_1}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{H_2}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_3}{H_3}$. Joje $\mathrm{grad}\,u$ išraiška dar paprastesnė. Būtent

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{x^1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{x^2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{x^3}\mathbf{e}_3. \tag{3}$$

Skaliarinio lauko kryptinės išvestinės išraiška kreivinėse koordinatėse taipogi pasikeičia. Galima parodyti, kad teisinga tokia lygybė:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial u}{\partial x^1}e^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2}e^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3}e^3. \tag{4}$$

kur e^1, e^2, e^3 yra vienetinio vektoriaus $\mathbf{e}$ kontravariantinės koordinatės, t. y. koordinatės bazėje $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r_3}$.

Uždaviniai

1. Skaliarinis laukas u polinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \quad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

aprašomas lygybe $u = \varrho^2 + \cos 2\varphi$. Raskite šio lauko gradijentą taške $M(\varrho = 2, \varphi = \frac{3\pi}{4})$.
2. Skaliarinis laukas u polinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ aprašomas lygybe $u = \varrho\cos\varphi$. Raskite šio lauko išvestinę kryptimi $\mathbf{e} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$, bet kokiame taške $M(\varrho, \varphi)$.
3. Skaliarinis laukas u koordinačių sistemoje ϱ, φ, θ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos^3\varphi\cos^3\theta, \\ y = \varrho\sin^3\varphi\cos^3\theta, \\ z = \varrho\sin^3\theta, \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

aprašomas lygtimi

$$u = \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\varrho^3}.$$

Raskite šio lauko gradijentą taške $M(x = 1, y = 1, z = 1)$.
4. Skaliarinis laukas u koordinačių sistemoje s, v, t, kur

$$\begin{cases} x = s, \\ y = s^2 + v^2, \\ z = s^3 + v^3 + t^3, \quad s \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

aprašomas lygybe $u = svt$. Raskite šio lauko išvestines kryptimi $\mathbf{l}_1 = \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_t$ ir kryptimi $\mathbf{l}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

8.10 Divergencija ir rotorius kreivinėse koordinatėse

Sakykime vektorinis laukas $\mathbf{p}$ apibrėžtas srityje Ω, kurioje (toje srityje) įvesta kreivinė koordinačių sistema. Kai vektorinis laukas yra diferencijuojamas srityje Ω, tai kiekviename Ω egzistuoja $\mathrm{rot}\,\mathbf{p}$ ir $\mathrm{div}\,\mathbf{p}$. Be to kiekviename taške galima surasti $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{e}}$ bet kuria kryptimi $\mathbf{e}$.

I. Pradžioje rasime divergencijos $\mathrm{div}\,\mathbf{p}$ išraišką kreivinėje bazėje $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$, $i = 1, 2, 3$.
Kadangi $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y, z) = \mathbf{p}\big(x(x^1, x^2, x^3), y(x^1, x^2, x^3), z(x^1, x^2, x^3)\big)$, tai

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}\,, \qquad i = 1, 2, 2.$$

Be to

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{i}} = A\mathbf{i}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{j}} = A\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{k}} = A\mathbf{k},$$

kur A yra lauko $\mathbf{p}$ diferencialinis operatorius (žr. 8.6 skyrelio (2) formulę). Operatorius A yra tiesinis, todėl

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = A\mathbf{i}\frac{\partial x}{\partial x^i} + A\mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial x^i} + A\mathbf{k}\frac{\partial z}{\partial x^i} = A\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\mathbf{k}\right) = A\mathbf{r}_i.$$

Pagal apibrėžimą

$$\operatorname{div}\mathbf{p} = \operatorname{div}A = \mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i.$$

Todėl iš paskutinės lygybės

$$\operatorname{div}\mathbf{p} = \mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = \mathbf{r}^1\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} + \mathbf{r}^2\frac{\partial \mathbf{p}}{x^2} + \mathbf{r}^3\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}. \tag{1}$$

Kai kreivinė bazė ortogonali divergencijos išraiška paprastesnė.

Kadangi šiuo atveju

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{H_1^2}\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{H_2^2}\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{1}{H_3^2}\mathbf{r}_3$$

(žr. (3) lygybę iš 8.8 skyrelio), tai

$$\operatorname{div}\mathbf{p} = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2}\mathbf{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}\mathbf{r}_3. \tag{2}$$

Kai kreivinė bazė ortonormuota divergencijos išraišką galima dar kitaip užrašyti.

Šiuo kart $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{H_i}$ ir $\mathbf{p} = P^1\mathbf{e}_1 + P^2\mathbf{e}_2 + P^3\mathbf{e}_3$. Tada

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{p} &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1}\frac{\mathbf{e}_1}{H_1} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2}\frac{\mathbf{e}_2}{H_2} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}\frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \\ &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(P^1H_2H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial(P^2H_3H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial(P^3H_1H_2)}{\partial x^3}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

II. Rasime lauko $\mathbf{p}$ rotoriaus išraišką kreivinėje bazėje. Pagal apibrėžimą

$$\operatorname{rot}\mathbf{p} = \operatorname{rot}A = \mathbf{r}^i \times A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^1 \times A\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}^2 A\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}^3 A\mathbf{r}_3.$$

Kadangi $A\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i}$, tai

$$\operatorname{rot}\mathbf{p} = \mathbf{r}^1 \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} + \mathbf{r}^2\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2} + \mathbf{r}^3\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}. \tag{4}$$

Kai kreivinė bzė ortogonali

$$\mathbf{r}^i = \frac{1}{H_i^2}\mathbf{r}_i,$$

todėl

$$\operatorname{rot}\mathbf{p} = \frac{1}{H_1^2}\left(\mathbf{r}_1 \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{H_2^2}\left(\mathbf{r}_2 \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{H_3^2}\left(\mathbf{r}_3 \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}\right). \tag{5}$$

Kai kreivinė bazė ortonormuota $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{H_1}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{H_2}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_3}{H_3}$ ir $\mathbf{p} = (P^1, P^2, P^3)$ bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, gauname

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{p} = \\ &= \left(\frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^3}\right), \frac{1}{H_3H_1}\left(\frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^1}\right), \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^2}\right)\right)\end{aligned} \tag{6}$$

bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

III. Gausime kryptinės išvestinės išraišką kreivinėje bazėje $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Kadangi

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{e}} = A\mathbf{e}$$

(žr. (2) lygybę iš 8.6 skyrelio), tai vektoriui $\mathbf{e} = e^1\mathbf{r}_1 + e^2\mathbf{r}_2 + e^3\mathbf{r}_3$ kreivinėje bazėje $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ turime

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{e}} = A(e^i\mathbf{r}_i) = e^i A\mathbf{r}_i.$$

Pagal I-ają dalį

$$Ar_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i}.$$

Vadinasi,

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{e}} = e^i \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = e^1 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} + e^2 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2} + e^3 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^3}. \tag{7}$$

Uždaviniai

1. Vektorinis laukas polinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ nusakytas lygybe $\mathbf{p} = \varrho\mathbf{r}_\varrho + \varrho^2\mathbf{r}_\varphi$. Raskite šio lauko divergenciją ir rotorių taške $M(x = 1, y = 1)$.
2. Vektorinis laukas polinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ nusakytas lygybe $\mathbf{p} = \cos\varphi\mathbf{r}_\varrho + \sin\varphi\mathbf{r}_\varphi$. Kokiuose plokštumos $\mathbb{R}^2$ taškuose šio lauko rotorius lygiagretus vektoriui $\mathbf{i} + \mathbf{j}$?
3. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ koordinačių sistemoje ϱ, φ, θ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos^3\varphi\cos^3\theta, \\ y = \varrho\sin^3\varphi\cos^3\theta, \\ z = \varrho\sin^3\theta, \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

aprašomas lygybe

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{r}_\varrho + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\mathbf{r}_\varphi + \frac{\cos\theta}{\varphi}\mathbf{r}_\theta.$$

Raskite šio lauko rotorių ir divergenciją taške $M(\varrho = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{3})$.
4. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ koordinačių sistemoje s, v, t, kur

$$\begin{cases} x = s, \\ y = s^2 + v^2, \\ z = s^3 + v^3 + t^3, \qquad s \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

aprašomas lygybe

$$\mathbf{p} = vt\mathbf{r}_s + st\mathbf{r}_v + sv\mathbf{r}_t.$$

Raskite šio lauko rotorių ir divergenciją taške $M(s, v, t)$.
5. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ koordinačių sistemoje ϱ, φ, θ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\cos^5\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\cos^5\theta, \\ z = \varrho\sin^5\theta, \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

aprašomas lygybe

$$\mathbf{p} = \varrho\varphi\mathbf{r}_\varrho + \cos\varphi\mathbf{r}_\varphi + \theta\mathbf{r}_\theta.$$

Raskite lauko išvestinę kryptimi $\mathbf{l}_1 = \mathbf{r}_\varrho + \mathbf{r}_\varphi + \mathbf{r}_\theta$ taške $M_1(\varrho, \varphi, \theta)$ ir išvestinę kryptimi $\mathbf{l}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ taške $M_2(x = 1, y = 1, z = 0)$.

8.11 Laplaso operatorius kreivinėse koordinatėse

Sakykime u yra duotas du kartus diferencijuojamas skaliarinis laukas srityje Ω. Iš 8.7 skyrelio turime

$$\Delta_L u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

Sakykime $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ yra ortonormuota kreivinė bazė.

Iš 8.9 skyrelio (3) lygybės turime

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\mathbf{e}_3.$$

O iš 8.10 skyrelio (3) lygybės gauname

$$\Delta_L u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)\right).$$

Uždaviniai

1. Skaliarinis laukas u polinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

aprašomas lygybe $u = \varrho^2\cos\varphi\sin^2\varphi$. Raskite $\Delta_L u$ taške $M(\varrho, \varphi)$.

2. Skaliarinis laukas u koordinačių sistemoje ϱ, φ, θ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\cos^5\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\cos^5\theta, \\ z = \varrho\sin^5\theta, \end{cases} \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2},$$

aprašomas lygybe

$$u = \varrho\cos\varphi\sin\theta.$$

Raskite $\Delta_L u$ taške $M(\varrho = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{3})$.

3. Skaliarinis laukas u koordinačių sistemoje ϱ, φ, θ, kur

$$\begin{cases} x = \varrho\cos^3\varphi\cos^3\theta, \\ y = \varrho\sin^3\varphi\cos^3\theta, \\ z = \varrho\sin^3\theta, \end{cases} \qquad \varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2},$$

aprašomas lygybe

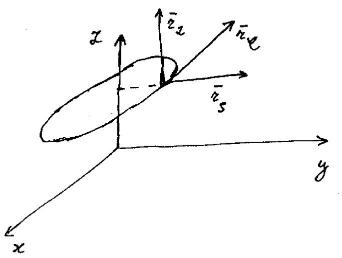
$$u = \varrho \operatorname{tg}\varphi\cos\theta.$$

Raskite $\Delta_L u$ taške $M(\varrho, \varphi, \theta)$.

8.12 Pagrindinės lauko operacijos cilindrinėse ir sferinėse koordinatėse

I. Cilindrinė koordinačių sistema.

Ją sudaro kreiviniai vektoriai $\mathbf{r}_\varrho, \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_z$.



Ortonormavę $\mathbf{r}_\varrho, \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_z$, gauname vektorius $\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$. Sakykime srityje Ω turime skaliarinį diferencijuojamą lauką $u = u(\varrho, \varphi, z)$ ir vektorinį lauką $\mathbf{p} = (P_\varrho(\varrho, \varphi, z), P_\varphi(\varrho, \varphi, z), P_z(\varrho, \varphi, z))$.

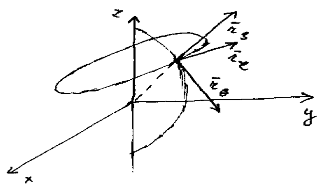
Šiuo kart $H_1 = 1, H_2 = \varrho, H_3 = 1$ (žr. 8.8 skyrelį).

Iš 8.9 (3), 8.10 (3),8.10 (6) ir 8.11 skyrelio formulių gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}u &= \frac{\partial u}{\partial \varrho}\mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z,\\
\mathrm{div}\mathbf{p} &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho P_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z},\\
\mathrm{rot}\mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial P_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial \varrho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho P_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z,\\
\Delta_L u &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

II. Sferinė koordinačių sistema.

Ją sudaro kreiviniai vektoriai $\mathbf{r}_\varrho, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi$.



Ortonormavę $\mathbf{r}_\varrho, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi$, gauname vektorius $\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$. Sakykime srityje Ω turime diferencijuojamą skaliarinį lauką $u = u(\varrho, \theta, \varphi$ ir vektorinį lauką $\mathbf{p} = (P_\varrho(\varrho, \varphi, \theta), P_\theta(\varrho, \varphi, \theta), P_\varphi(\varrho, \varphi, \theta))$. Šiuo kart Lamė koeficientai

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \varrho, \quad H_3 = \varrho \sin\theta, \qquad \text{(žr. 8.8 skyrelį)}$$

Pagal tas pačias formules (žr. (3) iš 8.9, (3) ir (6) iš 8.10 ir 8.11 skyrelį) gauname

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial \varrho}\mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\varrho \sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi,\\
\operatorname{div}\mathbf{p} &= \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho^2 P_\varrho) + \frac{1}{\varrho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big((\sin\theta)P_\theta\big) + \frac{1}{\varrho\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi},\\
\operatorname{rot}\mathbf{p} &= \frac{1}{\varrho\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta P_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial P_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{1}{\varrho\sin\theta}\frac{\partial P_\varrho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho P_\varphi)}{\partial\varrho}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho P_\theta)}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P_\varrho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi,\\
\Delta_L u &= \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\varrho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

Uždaviniai

1. Skaliarinis laukas u cilindrinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ, z duotas lygtimi $u = \varrho\cos\varphi + z^2$. Raskite šio lauko gradijentą ir Laplaso operatorių taške $M(\varrho = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}, z = 1)$.
2. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ cilindrinėje koordinačių sistemoje ϱ, φ, z duotas lygtimi $\mathbf{p} = \varrho\varphi\mathbf{r}_\varrho + z\mathbf{r}_z$. Raskite šio lauko divergenciją ir rotorių.
3. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ sferinėje koordinačių sistemoje ϱ, θ, φ duotas lygtimi $\mathbf{p} = \cos\theta\mathbf{r}_\varrho + \cos\varphi\mathbf{r}_\theta + \varrho\mathbf{r}_\varphi$. Raskite šio lauko divergenciją ir rotorių.
4. Skystis, užpildantis erdvės dalį, sukasi apie ašį Oz prieš laikrodžio rodyklę pastoviu kampiniu greičiu ω. Sakykime $\mathbf{v}(x, y, z)$ taško $M(x, y, z)$ greitis, o $\mathbf{w}(x, y, z)$ taško $M(x, y, z)$ pagreitis. Raskite vektorių $\mathbf{v}$ ir $\mathbf{w}$ divergencijas ir rotorius (patartina $\mathbf{v}$ ir $\mathbf{w}$ nagrinėti cilindrinėje koordinačių sistemoje).
5. Erdvės tašką $M(x, y, z)$ veikia jėga $\mathbf{F}$, kuri nukreipta į koordinačių pradžios tašką O ir kurios dydis yra atvirkščiai proporcingas atstumo $|MO|$ kubui su proporcingumo koeficientu 2. Raskite jėgų lauko $\mathbf{F}$ divergenciją ir rotorių taške $M(x, y, z)$.

8.13 Invariantinės Grino, Stokso ir Gauso-Ostrogradskio formulių išraiškos

Išraiškos, kurios bus gautos šiame skyrelyje vadinamos invariantinėmis, nes į jas įeina pagrindiniai vektorinio lauko invariantai.

I. Grino formulė. Buvo parodyta (žr. 7 skyrių), kad funkcijoms P, Q ir sričiai $\mathcal{D}$ tenkinant tam tikras sąlygas teisinga lygybė

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial\mathcal{D}} P\,dx + Q\,dy.$$

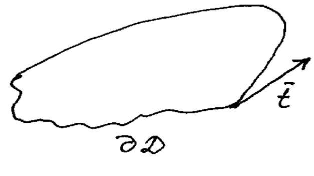
Sakykime vektorinis laukas $\mathbf{p} = (P, Q, 0)$ apibrėžtas srityje $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Pagal 8.6 skyrelyje gautą formulę

$$\operatorname{rot}\mathbf{p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Iš čia

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \mathbf{k}\operatorname{rot}\mathbf{p}.$$

Tarkime $\mathbf{t}$ yra kreivės $\partial\mathcal{D}$ liestinės vienetinis vektorius, kurio kryptis suderinta su $\partial\mathcal{D}$ kryptimi. tegul $\mathbf{t} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, o kreivės $\partial\mathcal{D}$ parametras yra jos ilgis s.



Tada kreivės $\partial\mathcal{D}$ taškuose $dx = \cos\alpha\, ds$, $dy = \sin\alpha\, ds$.
Vadinasi, $\partial\mathcal{D}$ taškuose

$$P\,dx + Q\,dy = P\cos\alpha\, ds + Q\sin\alpha\, ds = (P, Q, 0)(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)\, ds = \mathbf{p}\cdot\mathbf{t}\, ds.$$

Įstatę į Grino formulę diferencijuojamam vektoriniam laukui $\mathbf{p} = (P, Q, 0)$ gauname:

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{k}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}\, dxdy = \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{pt}\, ds, \tag{1}$$

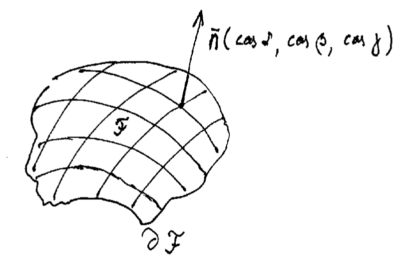
čia $\mathcal{D}$ – jungi sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $\partial\mathcal{D}$ – srities $\mathcal{D}$ siena, $\mathbf{t}$ – kreivės $\partial\mathcal{D}$ liestinės vienetinis vektorius.
Dydis

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\, ds$$

dažnai vadinamas vektorinio lauko $\mathbf{p}$ cirkuliacija kreive $\mathcal{L}$.

II. Stokso formulė. 7 skyriuje buvo parodyta, kad funkcijoms P, Q, R ir paviršiui $\mathcal{F}$ tenkinant tam tikras sąlygas teisinga lygybė

$$\iint_{\mathcal{F}} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS = \oint_{\partial\mathcal{F}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$



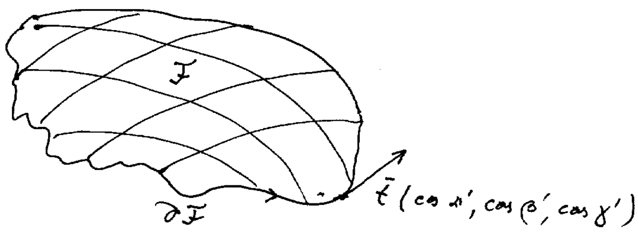
Sakykime vektorinis laukas $\mathbf{p} = (P, Q, R)$ apibrėžtas ir diferencijuojamas paviršiaus $\mathcal{F}$ aplinkoje. Pagal 8.6 skyrelyje išvestą formulę

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Vadinasi,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma = \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}.$$

Sakykime vėlgi $\mathbf{t}$ paviršiaus $\mathcal{F}$ krašto $\partial\mathcal{F}$ liestinės vienetinis vektorius. Tegul $\mathbf{t} = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$, o kreivės $\partial\mathcal{F}$ parametras tegul yra jos ilgis.



Kreivės $\partial\mathcal{F}$ taškuose $dx = cos\alpha'\,ds$, $dy = \cos\beta'\,ds$, $dz = \cos\gamma'\,ds$. Vadinasi,

$$\int_{\partial\mathcal{F}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_{\partial\mathcal{F}} (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\,ds = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\,ds.$$

Remiantis gautomis lygybėmis galime užrašyti, kad vektoriniam diferencijuojamam laukui $\mathbf{p} = (P, Q, R)$

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}\,dS = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\,ds, \tag{2}$$

čia $\mathbf{n}$ – yra paviršiaus $\mathcal{F}$ normalinis vektorius, $\mathbf{t}$ – kreivės $\partial\mathcal{F}$ liestinės vektorius.

III. Gauso-Ostrogradskio formulė. 7 skyriuje buvo gauta, kad funkcijoms P, Q, R ir erdvinei sričiai V tenkinant tam tikras sąlygas teisinga lygybė

$$\iint_{\partial V} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Sakykime $\mathbf{p} = (P, Q, R)$ yra vektorinis diferencijuojamas laukas apibrėžtas aibėje $\overline{V} = V \cup \partial V$. Kadangi

$$\iint_{\partial V} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_{\partial V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

kur $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ paviršiaus ∂V normalė (žr. 7 skyrių), tai

$$\iint_{\partial V} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_{\partial V} \mathbf{pn}\,dS.$$

Antra vertus (žr. 8.6 skyrelį)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\,\mathbf{p}.$$

Taigi diferencijuojamam vektoriniam laukui $\mathbf{p} = (P, Q, R)$ turime

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{p}\,dxdydz = \iint_{\partial V} \mathbf{np}\,dS, \tag{3}$$

čia $\mathbf{n}$ yra paviršiaus ∂V normalinis vektorius.

Dydis $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\,dS$ kaip ir 7 skyriuje vadinamas vektorinio lauko srautu per paviršių $\mathcal{F}$.

Uždaviniai

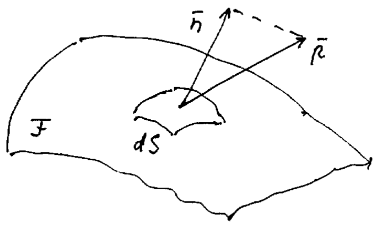
1. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ cirkuliacijas apskritime $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ ir apskritime $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.
2. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ cirkuliaciją sraigto linijoje: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ srautą per sferą $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ srautą per paviršių $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.
5. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ srautą per cilindro $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, šoninį paviršių. Raskite šio lauko srautą per visą minėto cilindro paviršių.
6. Raskite vektorinio lauko $\mathbf{p} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ rotoriaus $\operatorname{rot}\mathbf{p}$ srautą per paviršių $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, $z \geqslant 0$.

8.14 Vektorinio lauko charakteristikų fizikinė interpretacija

I. Vektorinio lauko $\mathbf{p}$ srautas per paviršių $\mathcal{F}$, $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\, dS$.

Sakykime $\mathbf{p}$ yra judančio skysčio greičio vektorius. Tada $\mathbf{p}$ srautas per paviršių $\mathcal{F}$ yra pratekėjusio per laiko vienetą per paviršių $\mathcal{F}$ skysčio tūris.

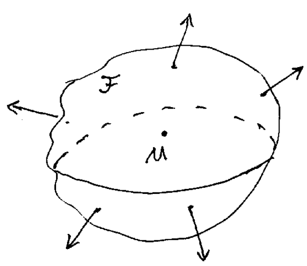


Bendru atveju $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\, dS$ apibūdina tam tikro dydžio susijusio su lauku $\mathbf{p}$ pernešimą per paviršių $\mathcal{F}$.

Jei $\mathcal{F}$ uždaras, tai pagal Gauso-Ostrogradskio formulę

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{p}\, dxdydz.$$

Iš šios formulės matome, jei $\operatorname{div}\mathbf{p} > 0$ kokiam nors taške M, tai per bet kokį uždarą paviršių $\mathcal{F}$ uždarantį tašką M srautas teigiamas. Skystis išteka iš taško M. T. y. taške M yra šaltinis.



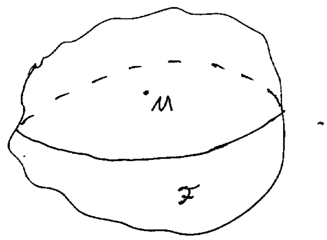
Jei $\operatorname{div}\mathbf{p} < 0$ kokiam nors taške M, tai analogiškai gauname, kad skystis suteka į tašką M.

Nagrinėjant visą sritį Ω iš Gauso-Ostrogradskio formulės galima gauti, kad Ω nėra šaltinių ir sutekėjimo taškų tada ir tik tada, kai $\operatorname{div}\mathbf{p} = 0$ visuose Ω taškuose.

II. Vektorinio lauko divergencija. Pagal Gauso-Ostrogradskio formulę turime

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{p}\, dxdydz = \iint_{\partial V} \mathbf{np}\, dS.$$

Fiksuokime tašką M. Nagrinėkime visus uždarus paviršius $\mathcal{F}$ uždarančius tašką M.



Pažymėkime $d(\mathcal{F})$ uždaro paviršiaus $\mathcal{F}$ diametrą, o V tegul yra to paviršiaus uždarytas kūnas. Jei $\operatorname{div}\mathbf{p}$ yra tolydi funkcija, tai pagal vidurinių reikšmių teoremą dvilypiam integralui turėsime

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{p}\,dxdydz = \operatorname{div}\mathbf{p}(M')\,V.$$

Tada iš Gauso-Ostrogradskio formulės

$$\operatorname{div}\mathbf{p}(M') = \frac{1}{V}\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\,dS.$$

Gautoje lygybėje perėję prie ribos, kai $d(\mathcal{F}) \to 0$ gausime

$$\operatorname{div}\mathbf{p}(M) = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \frac{1}{V}\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\,dS.$$

Dydis $\frac{1}{V}\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{np}\,dS$ yra srauto per paviršių $\mathcal{F}$ galia. Taigi $\operatorname{div}\mathbf{p}(M)$ bus vektorinio lauko $\mathbf{p}$ galia taške M.

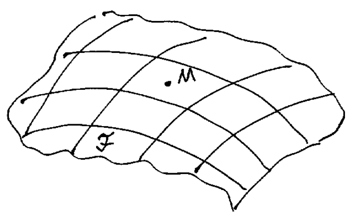
III. Vektorinio lauko $\mathbf{p}$ cirkuliacija kreive $\mathcal{L}$: $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\,ds$.

Jei $\mathbf{p}$ yra jėgų laukas, tai $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\,ds$ yra darbas, kurį atlieka laukas $\mathbf{p}$ perkeldamas kūną uždara kreive $\mathcal{L}$.

Jei $\mathbf{p}$ yra judančio skysčio greičių laukas, tai cirkuliacija $\int_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\,ds$ apibūdina sukamąjį skysčio judėjimą kreivės kryptimi. Pavyzdžiui, jei $\int_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\,ds > 0$, tai kreivės $\mathcal{L}$ taškuose vyrauja greičiai kreivės $\mathcal{L}$ kryptimi.

Bendruoju atveju vektorinio lauko cirkuliacija apibūdina vektorinio lauko sūkurius.

IV. Vektorinio lauko rotorius. Sakykime $\mathbf{p}$ yra judančio skysčio greičių laukas. Pasirenkame tašką M ir paviršių einantį per tašką M.



Iš Stokso formulės

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{p}\,dS = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\,ds.$$

Tegul $d(\mathcal{F})$ yra šio paviršiaus diametras. Sakykime $d(\mathcal{F}) \to 0$. $\oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\,ds$ apibūdina skysčio judėjimą kreivės $\partial\mathcal{F}$ kryptimi. Jei $d(\mathcal{F})$ mažas

$$\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{p}(M) \approx \frac{1}{S(\mathcal{F})}\int_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\,ds.$$

Taigi $\operatorname{rot}\mathbf{p}(M)$ apibūdina skysčio judėjimą taško M aplinkoje. Pavyzdžiui, jei $\oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\, ds > 0$ visoms $\partial\mathcal{F}$, tai skystis sukasi apie normalę $\mathbf{n}$ pagal sraigtą. Jei $\oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{pt}\, ds < 0$ visoms $\partial\mathcal{F}$, tai skystis juda priešinga kryptimi. Jei $\operatorname{rot}\mathbf{p} = 0$ visuose kokios nors srities taškuose, tai skysčio judėjime nėra sūkurių, t. y. $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{pt}\, ds = 0$ visoms uždaroms kreivėms $\mathcal{L}$.

V. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ vadinamas potencialiniu srityje Ω, jeigu to lauko cirkuliacija bet kuria uždara, gabalais glodžia srities Ω kreive lygi 0.

Iš 7 skyriuje gautų rezultatų išplaukia toks fizikinis tvirtinimas.

Teorema. *Sakykime jungioje srityje Ω duotas diferencijuojamas vektorinis laukas $\mathbf{p} = (P, Q, R)$. Tuomet sekantys teiginiai ekvivalentūs:*

(1) Laukas $\mathbf{p}$ potencialinis.

(2) Srityje Ω egzistuoja potencialas $u : \Omega \to \mathbb{R}$, t. y. tokia funkcija, kuriai $\operatorname{grad} u = \mathbf{p}$ (arba $du = Pdx + Qdy + Rdz$).

(3) Laukas $\mathbf{p}$ neturi sūkurių, t. y. $\operatorname{rot}\mathbf{p} = 0$.

VI. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ vadinamas solenoidiniu srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, jeigu to lauko srautas per bet kurį dalimis glodų, savęs nekertantį paviršių iš srities Ω lygus 0.

Naudojantis Gauso-Ostrogradskio formulės invariantine išraiška galima įrodyti tokį teiginį.

Teorema. *Tolydžiai diferencijuojamas vektorinis laukas $\mathbf{p}$ yra solenoidinis jungioje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tada ir tik tada, kai visuose srities Ω taškuose $\operatorname{div}\mathbf{p} = 0$.*

Uždaviniai

1. Kokį darbą atlieka laukas $\mathbf{p} = \frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{z}\mathbf{j} + \frac{1}{x}\mathbf{k}$ perkeldamas materialų tašką iš taško $M(1,1,1)$ į tašką $N(2,4,8)$?
2. Kokį darbą atlieka laukas $\mathbf{p} = (y+z)\mathbf{i} + (2+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ perkeldamas materialų tašką iš taško $M(3,4,0)$ į tašką $N(0,0,5)$, jei perkėlimas vyksta sferos $x^2+y^2+z^2 = 25$ didžiojo apskritimo trumpiausiu lanku?
3. Kokį darbą atlieka laukas $\mathbf{p} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ perkeldamas masės m kūną uždaru kontūru sudarytu iš atkarpos $x+z=1$, $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ketvirčio apskritimo $x^2+y^2=1$, $z=0$ ir kitos atkarpos $y+z=1$, $x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.
4. Parodykite, kad laukas $\mathbf{p} = yz(2x+y+z)\mathbf{i} + xz(x+2y+z)\mathbf{j} + xy(x+y+2z)\mathbf{k}$ yra potencialinis ir raskite jo potencialą.
5. Parodykite, kad laukas
$$\mathbf{p} = \frac{2}{\sqrt{y+z}}\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\mathbf{j} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\mathbf{k}$$
yra potencialinis ir raskite jo potencialą.
6. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ turi pavidalą
$$\mathbf{p} = f(x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$
kur $f(z)$ tolydi funkcija $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Ar šis laukas potencialinis?
7. Vektorinis laukas $\mathbf{p}$ taške $M(x,y,z)$ nukreiptas į tašką $O(0,0,0)$, o jo dydis atvirkščiai proporcingas taško M atstumui iki plokštumos Oxy. Ar šis laukas potencialinis? Ar šis laukas solenoidinis?
8. Kūnas sukasi apie ašį Oz pastoviu kampiniu greičiu ω. Sakykim $\mathbf{v}$ yra greitis taške $M(x,y,z)$. Ar vektorinis laukas $\mathbf{v}$ yra potencialinis? Ar laukas $\mathbf{v}$ solenoidinis?
9. Nurodykite pavyzdį vektorinio potencialinio, solenoidinio lauko.

LITERATŪRA

1. V. Iljinas, E. Pozniakas, Matematinės analizės pagrindai. D.1-2. Vilnius: Mokslas, 1981.
2. V. Kabaila, Matematinė analizė. D. 1-2. Vilnius: Mokslas, 1983, 1986.
3. V. Pekarskas, Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas. D. 1-2. Kaunas: Technologija, 1996, 2000.