Paskaitų konspektas

AKTUARINĖ MATEMATIKA

Surašė

Jonas Šiaulys

Jam padėjo

Aristidas Vilkaitis
ir **Donatas Šepetys**

2006 metais

Naudota literatūra

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., Actuarial Mathematics. *The Society of Actuaries, Itasca* 1986.

Falin G.I., Falin A.I., Actuarial Mathematics in Exercises. *Fizmatlit, Moscow* 2003. (Rusų kalba).

I. Finansiniai skaičiavimai
(santrauka)

1.1 Palūkanos

Sakykime laiko momentu t kam nors paskolinome pinigų sumą C. Po laiko h natūralu laukti, kad pinigų suma C pavirs į sumą $C + C^*$, kur $C^* > 0$.

Santykis $i = \frac{C^*}{C}$ vadinamas palūkanų norma nagrinėjamu laikotarpiu $[t, t + h]$.

Paprastai palūkanų norma skaičiuojama fiksuotam laikotarpiui. Dažniausiai pasitaikantis laikotarpis – vieneri metai.

1.2 Paprastosios ir sudėtinės palūkanos

Sakykime pinigų suma C investuojama dviems vienas po kito einantiems laikotarpiams. Be to, pirmo laikotarpio palūkanų norma – i_1, o antro – i_2. Palūkanos C^* bendram laikotarpiui gali būti skaičiuojamos dviem būdais:

(a) Palūkanos skaičiuojamos tik nuo investuotos sumos C. Šiuo atveju palūkanos bendram laikotarpiui:

$$C^* = C \cdot i_1 + C \cdot i_2.$$

Vadinasi, viso laikotarpio palūkanų norma

$$i = \frac{C^*}{C} = i_1 + i_2.$$

Toks palūkanų skaičiavimo būdas vadinamas **paprastųjų palūkanų principu**.

(b) Palūkanos antram laikotarpiui skaičiuojamos ne tik investuotai sumai C, bet ir pirmajame laikotarpyje sukauptoms palūkanoms. Šiuo atveju, per visą laikotarpį suma C išaugs iki dydžio:

$$C = C(1 + i_1)(1 + i_2).$$

Viso laikotarpio palūkanų normą i randame iš lygybės:

$$C(1+i) = C(1+i_1)(1+i_2).$$

Taigi

$$i = i_1 + i_2 + i_1 i_2.$$

Toks palūkanų skaičiavimo būdas vadinamas **sudėtinių palūkanų principu**.

Aktuarinėje matematikoje naudojamas tik sudėtinių palūkanų principas.

Kadangi draudimas, ypač ilgalaikis, glaudžiai susiję̧s su investicijomis, palūkanų norma naudojama daugelyje aktuarinės matematikos skaičiavimų. Palūkanų norma priklauso nuo investicinės aplinkos būklės, kurią savo ruožtu įtakoja ekonomikos vystymasis, bankų ir investicinių įmonių veikla.

Norėdami išvengti didelės rizikos, draudimo įmonės savo skaičiavimuose naudoja mažesnes palūkanų normas už tas, kurios realiai egzistuoja rinkoje. Šios nustatomos palūkanų normos reikalingos tam, kad kaip nors būtų galima prognozuoti pinigų, gaunamų iš draudėjų, augimą. Draudimo bendrovės nustatyta būsimų palūkanų norma vadinama **technine palūkanų norma**.

Šiuo metu draudimo bendrovės savo skaičiavimuose naudoja techninę palūkanų normą iš intervalo $[0.03, 0.035]$.

Realiai draudimo bendrovės investuoja draudėjų pinigus žymiai palankesnėmis sąlygomis, t.y. su žymiai aukštesne palūkanų norma. Skirtumas tarp realios palūkanų normos ir techninės palūkanų normos yra pagrindinis draudiko pajamų šaltinis.

1.3 Kapitalo kaupimas

Sakykime laiko momentu $t = 0$ investuojama pinigų suma C laikotarpiui $[0; t]$. Sakykime metinė palūkanų norma lygi i. Tada laiko momentu t kapitalas C pavirs į kapitalą

$$C(t) = C(1+i)^t.$$

Dydis $A(t) = (1+i)^t$ vadinamas **kaupimo koeficientu laikotarpiui** t.

1.4 Palūkanų galia

Palūkanų galia δ_t – tai momentinis santykinis kapitalo augimo greitis, t.y.:

$$\delta_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)}.$$

Jeigu funkcija $C(t)$ diferencijuojama, kai kintamasis t priklauso kokiam tai intervalui, tai tame intervale

$$\delta_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)} = \frac{C'(t)}{C(t)} = (\ln C(t))'.$$

Esant pastoviai metinei palūkanų normai i,

$$C(t) = C(1+i)^t.$$

Todėl bet kuriam teigiamam t

$$(\ln C(t))' = (\ln(C \cdot (1+i)^t))' = \ln(1+i).$$

Vadinasi, bet kuriam $t > 0$

$$\delta = \delta_t = \ln(1+i).$$

Iš čia

$$e^\delta = 1 + i, \quad i = e^\delta - 1.$$

Esant pastoviai palūkanų galiai, kapitalo kaupimo koeficientą $A(t)$ galima išreikšti taip:

$$A(t) = e^{\delta t}.$$

Jei palūkanų galia δ_t laikui bėgant kinta, tai:

$$A(t) = e^{\int_0^t \delta_u du}.$$

1.5 Nominalios palūkanų normos

Sakykime nagrinėjame laiko intervalą, kurio ilgis $1/p$. Standartinis intervalo ilgis aktuarinėje matematikoje yra lygus metams. Vadinasi:

- kai $p = 12$ – nagrinėjamas mėnesio laikotarpis;
- kai $p = 4$ – nagrinėjamas ketvirtis;
- kai $p = 2$ – nagrinėjamas pusmetis.

Jei metinė palūkanų norma pastovi ir lygi i, tai palūkanų norma laikotarpiui $1/p$ lygi

$$i_*^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = e^{\frac{\delta}{p}} - 1.$$

Aktuarinėje matematikoje lėšos investuojamos laikotarpiui $1/p$ dažnai apibūdinamos ne palūkanų norma $i_*^{(p)}$, o **nominalia palūkanų norma**

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)} = p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1) = p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)$$

Kartais dydis $i^{(p)}$ dar vadinamas **nominalia palūkanų norma skaičiuojama dažnumu p**.

1.6 Diskontas

Tarkime pinigai investuojami su pastovia metine palūkanų norma i. Sakykime prabėgus laikui t ($t > 0$) mes turime išmokėti kažkokią sumą C. Tam, kad laiko momentu t turėtume reikiamą sumą C, esamu laiko momentu $t = 0$ mes turime investuoti sumą:

$$P = C(1+i)^{-t}.$$

Iš tiesų, esant metinei palūkanų normai i, po laiko t suma P pavirs į sumą:

$$P(1+i)^t = C$$

Dydis P vadinamas kapitalo C **dabartine verte**. O dydis

$$\nu = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

vadinamas **diskonto daugikliu**. Panaudojus ν dabartinę kapitalo C vertę galima užrašyti taip:

$$P = C \cdot \nu^t.$$

1.7 Diskonto norma

Sakykime laiko momentu $t = 0$ skoliname sumą C laikotarpiui $t = 1$ su metine palūkanų norma i. Sakykime palūkanas norime gauti dabar. Laiko momentu $t = 1$ skolininkas turės grąžinti sumą $C(1+i)$. Palūkanų dalis šioje sumoje lygi $i \cdot C$. Šių palūkanų dabartinė vertė lygi:

$$\nu \cdot i \cdot C = i \cdot C \cdot \frac{1}{1+i} \ .$$

Taigi skolininkas norėdamas sumokėti palūkanas iš anksto turi sumokėti sumą $C \cdot i/(1+i)$ Dydis $d = i/(1+i)$ vadinamas **diskonto norma** sutartiniam laiko vienetui, paprastai – vieneriems metams.
Nesunku pastebėti, kad :

$$d = 1 - \nu = 1 - e^{-\delta}.$$

Sakykime dabar, kad suma $C = 1$ skolinama laikotarpiui $1/p$. Vėl gi sakykime, kad norime iš anksto gauti palūkanas. Laikotarpio $1/p$ pabaigoje suma $C = 1$ padidės dydžiu:

$$i_*^{(p)} = \frac{i^{(p)}}{p} = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Šio dydžio dabartinė vertė:

$$i_*^{(p)} \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Kadangi $i/(1+i) = d$, tai diskonto normą laikotarpiui $1/p$ galime išreikšti taip:

$$1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{p}} =: d_*^{(p)}.$$

Aktuarinėje matematikoje be diskonto normos laikotarpiu $1/p$ dažnai naudojamas kitas dydis – **nominali diskonto norma laikotarpiui** $1/p$:

$$d^{(p)} = p \cdot d_*^{(p)} = p\ (1 - (1-d)^{\frac{1}{p}}).$$

1.8 Determinuoti anuitetai (rentos)

Sakykime investicinė įmonė turi atlikti eilę išmokų tam tikrais laiko momentais. Be to, sakykime ta pati įmonė gaus eilę įmokų irgi tam tikrais laiko momentais. Norint palyginti įmokų ir išmokų srautus, visos išmokos ir įmokos turi būti diskontuotos tam tikram laiko momentui, pvz. $t = 0$.

Tegul išmokos b_i bus išmokamos momentais t_i, t.y.:

suma b_1 išmokama laiko momentu t_1,

suma b_2 išmokama laiko momentu t_2,

...

suma b_n išmokama laiko momentu t_n.

O įmokos c_i tegul bus gaunamos momentais τ_i:

suma c_1 įmokama momentu τ_1,

suma c_2 įmokama momentu τ_2,

...

suma c_m įmokama momentu τ_m.

Visų įšmokų dabartinė vertė (vertė laiko momentu $t = 0$) yra lygi:

$$\beta = b_1\nu^{t_1} + b_2\nu^{t_2} + ... + b_n\nu^{t_n}.$$

O įmokų dabartinė vertė yra lygi:

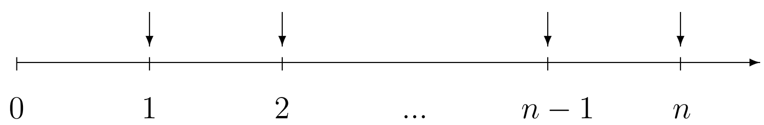
$$\gamma = c_1\nu^{\tau_1} + c_2\nu^{\tau_2} + ... + c_m\nu^{\tau_m}.$$

Aišku, kad įmonė galės įvykdyti savo įsipareigojimus, jeigu γ bus didesnė už β.

Aukščiau nusakėme bet kokius mokėjimų srautus. Specialiu būdu atliekamus mokėjimų srautus paprastai vadiname **determinuotais anuitetais** arba **determinuotomis rentomis**. Toliau šiame skyriuje aptarsime keletą determinuotų anuitetų. Juos aprašydami žodelį "determinuoti" paprastumo dėlei praleisime. Determinuoti anuitetai iš esmės skiriasi nuo gyvenimo anuitetų. Pastarieji bus nagrinėjami vėliau, ketvirtame skyriuje.

1.9 Vėluojantis anuitetas (renta)

Sakykime laiko intervalas $(0, n)$ dalijamas į n dalių ir kiekvieno iš laiko intervalų $(0,1), (1,2), ..., (n-1, n)$ gale mokama suma lygi 1.



Aprašytam mokėjimų srautui dabartinė visų mokėjimų vertė (vertė momentu $t = 0$) lygi

$$a_{\overline{n}|} = \nu + \nu^2 + \nu^3 + ... + \nu^n = \frac{1-\nu^n}{i}.$$

Sukauptoji visų mokėjimų vertė (vertė momentu $t = n$)

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Aišku, kad

$$a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot \nu^n, s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$$

bet kuriam natūraliąjam skaičiui n.

1.10 Išankstinis anuitetas (renta)

Sakykime laiko intervalas $(0, n), n \in \mathbb{N}$, dalijamas į n dalių ir kiekvieno iš laiko intervalų $(0,1), (1,2), ..., (n-1, n)$ pradžioje mokama suma lygi 1.

Šiuo atveju dabartinė visų mokėjimų vertė (vertė momentu $t = 0$)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + \nu + \nu^2 + \nu^3 + ... + \nu^{n-1} = \frac{1 - \nu^n}{d}.$$

Sukauptoji visų mokėjimų vertė (vertė momentu $t = n$)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Nesunku pastebėti, kad naggrinėjamam mokėjimų srautui

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|} \cdot \nu^n, \ \ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Be to visiems natūraliesiems n

$$a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - 1 + \nu^n.$$

1.11 Atidėti anuitetai (rentos)

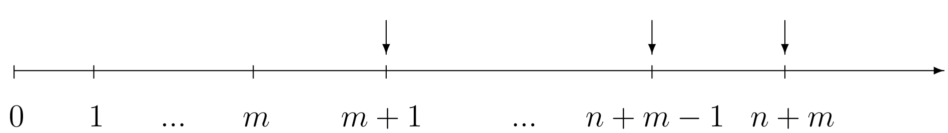
Sakykime laiko intervalas $(0, n+m), n, m \in \mathbb{N}$, dalijamas į $n+m$ dalių. Sakykime suma lygi 1 mokama kiekvieno iš intervalų

$$(m, m+1), (m+1, m+2), ..., (m+n-1, m+n)$$

gale, o pradiniuose intervaluose

$$(0, 1), (1, 2), ..., (m-1, m)$$

mokėjimai nevyksta.



Toks mokėjimų srautas vadinamas **atidėtu vėluojančiu anuitetu arba atidėta vėluojančia renta**. Tokiam mokėjimų srautui dabartinė visų mokėjimų vertė (vertė laiko momentu $t = 0$)

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = \nu^{m+1} + \nu^{m+2} + ... + \nu^{m+n} = \nu^m \cdot a_{\overline{n}|}.$$

Jeigu suma lygi 1 mokama kiekvieno iš intervalų

$$(m, m+1), (m+1, m+2), ..., (m+n-1, m+n)$$

pradžioje, o pradiniuose laiko intervaluose

$$(0,1), (1,2), ..., (m-1, m)$$

mokėjimai nevyksta, tai toks mokėjimų srautas vadinamas **atidėtu išankstiniu anuitetu arba atidėta išankstine renta**. Tokiam anuitetui dabartinė visų būsimų mokėjimų vertė

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \nu^m + \nu^{m+1} + ... + \nu^{m+n-1} = \nu^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

1.12 Anuitetai mokami dažnumu p

Tarkime visi laiko intervalai $(0,1), (1,2), ..., (n-1, n),\ n \in \mathbb{N}$, dalijami į $p, p \in \mathbb{N}$, lygių dalių ir kiekvieno gauto intervaliuko pabaigoje mokama suma $1/p$. Gautasis mokėjimų srautas vadinamas **vėluojančiu anuitetu mokamu dažnumu** p **arba vėluojančia renta mokama dažnumu** p. Aišku, kad mokėjimai vyksta momentais

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p},\ ...\ , 1, 1+\frac{1}{p}, 1+\frac{2}{p},\ ...\ , 2,\ ...\ , n-1+\frac{1}{p}, n-1+\frac{2}{p},\ ...\ , n,$$

o iš viso atliekame $n \cdot p$ mokėjimų. Tegul:

$a^{(p)}_{\overline{n}|}$ - tokio anuiteto dabartinė vertė,

$s^{(p)}_{\overline{n}|}$ - tokio anuiteto sukauptoji vertė.

Jei mokėjimai vyksta kiekvieno mažo laiko intervaliuko pradžioje, o mokama suma, kaip ir ankstesniu atveju, lygi $1/p$, tai gautasis mokėjimų srautas vadinamas **išankstiniu anuitetu mokamu dažnumu p arba išankstine renta mokama dažnumu** p. Šiuo atveju mokėjimai vyksta laiko momentais

$$0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p},\ ...\ , 1, 1+\frac{1}{p}, 1+\frac{2}{p}\ ...\ , n-1+\frac{1}{p}, n-1+\frac{2}{p},\ ...\ , n-1+\frac{p-1}{p},$$

o mokėjimų, kaip ir ankstesniu atveju, atliekame $n \cdot p$. Tegul:

$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ - tokio anuiteto dabartinė vertė,

$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$ - tokio anuiteto sukauptoji vertė.

Aišku, kad:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = s^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot \nu^n, \ s^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$$
$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot \nu^n, \ \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$$

Be to:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot \nu^n$$

Vadinasi, norint paskaičiuoti dydžius $a^{(p)}_{\overline{n}|}, s^{(p)}_{\overline{n}|}, \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}, \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$, pakanka rasti vieną iš užrašytų dydžių. Rasime $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ išraišką. Vietoje vienetinio ilgio laiko intervalo imkime p-ąją jo dalį. Tada šio intervaliuko palūkanų norma yra

$$i^{(p)}_* = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{i^{(p)}}{p},$$

o šio intervaliuko diskonto norma yra:

$$1 - (1-d)^{\frac{1}{p}} = \frac{d^{(p)}}{p}.$$

Vadinasi, intervaliuko diskonto koeficientas

$$\nu^{(p)}_* = \frac{1}{1+i^{(p)}_*} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} = \nu^{\frac{1}{p}}.$$

Išankstinį anuitetą, mokamą dažnumu p intervale $(0,n)$ galima įsivaizduoti kaip išankstinį anuitetą intervale $(0,np)$, tik su kitais palūkanų ir diskonto parametrais. Kadangi kiekvienu mokėjimo momentu mokama suma lygi $1/p$, tai:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|\,(i)} = \frac{1}{p}\,\ddot{a}_{\overline{n\cdot p}|\,(i^{(p)}_*)}.$$

Pasinaudoję skyrelio 1.10 formulėmis, gauname:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(\nu^{(p)}_*)^{np}}{d^{(p)}_*} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(\nu^{\frac{1}{p}})^{np}}{\frac{d^{(p)}}{p}} = \frac{1-\nu^n}{d^{(p)}}.$$

Taigi

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

O iš sąryšio tarp dydžių $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ ir $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ išplaukia, kad

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}} \cdot a_{\overline{n}|}.$$

1.13 Tolygūs anuitetai

Nesunku pastebėti, kad

$$\lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p(1-(1-d)^{\frac{1}{p}}) = \lim_{p\to\infty} p(1-(1+e^{-\delta})^{\frac{1}{p}}) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} p(1-e^{-\frac{\delta}{p}}) = \lim_{p\to\infty} \frac{1-e^{-\frac{\delta}{p}}}{\frac{1}{p}} = \lim_{x\to 0} \frac{-(e^{-\delta x}-1)}{x} =$$

$$= -\ln e^{-\delta} = \delta.$$

Analogiškai

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p((1+i)^{\frac{1}{p}}-1) = \lim_{p\to\infty} p(e^{\frac{\delta}{p}}-1) = \delta.$$

Vadinasi,

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \frac{d}{d^{(p)}} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{\delta},$$

$$\lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{\delta}.$$

Gautą rezultatą nesunku paaiškinti. Iš tiesų, esant be galo mažiems laiko intervalams, nėra skirtumo kada mokami pinigai – intervalo pradžioje ar pabaigoje.

Gautasis ribinis (kai $p\to\infty$) mokėjimų srautas vadinamas tolygiu anuitetu. Tokį mokėjimų srautą galima palyginti su skysčio tekėjimu – per laiko vienetą "išteka" vienas vienetas. Mokėjimai vyksta intervale $(0,n)$ be perstojo, tolygiai. Per kiekvienus metus išmokama (arba sumokama) suma lygi 1.

Tolygaus anuiteto atvėju dabartinė mokėjimų vertė (būsimų mokėjimų vertė momentu $t=0$) lygi

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n \nu^n dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1-\nu^n}{\delta}.$$

Galima įrodyti, kad dideliems p

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|}\left(1+\frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

ir

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|}\left(1-\frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

Tolygus anuitetas yra atskiras tolydaus anuiteto atvejis. Tolydus anuitetas tai mokėjimų srautas laiko intervale $(0, n)$, kurį nusako lėšų patekimo greitis $w(t)$, priklausantis nuo laiko t. Tokiam anuitetui dabartinę būsimų mokėjimų vertę nusako integralas

$$\int_0^n \nu^t w(t)dt.$$

II. Išgyvenimo modeliai (santrauka)

Kada mirs kuris nors pasirinktas asmuo - niekas negali tiksliai pasakyti. Vadinasi, žmogaus gyvenimo trukmė X yra neneigiamas atsitiktinis dydis. Atsitiktinis dydis – tai išmatuojama funkcija atvaizduojanti kažkokią tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ į realių skaičių aibę $\mathbb{R}$. Tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ apsprendžiančios žmogaus gyvenimo trukmę X struktūra deja neaiški. Vadinasi, norint išiaiškinti atsitiktinio dydžio X charakteristikas belieka taikyti statistinius metodus. Tam reikia nagrinėti pakankamai didelę žmonių grupę. Paprastumo dėlei galime laikyti, kad atsitiktinis dydis X yra absoliučiai tolydus. Kaip žinome neneigiamas atsitiktinis dydis X vadinamas absoliučiai tolydžiu, jeigu egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $f(x)$, vadinama tankio funkcija, kuriai

$$P(X < x) = \int_0^x f(u)du, x \in [0, \infty).$$

Tokia prielaida palengvina gyvenimo trukmės X nagrinėjimą ir neprasilenkia su sveiku protu. Taigi šio skyriaus pirmoji esminė prielaida tokia:

Žmogaus gyvenimo trukmė X yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis.

Antra vertus, nustatyti atsitiktinio dydžio X tikrus parametrus, kaip jau minėjome, galima tik stebint šio atsitiktinio dydžio realizacijas. Tam, kad ši procedūra būtų įmanoma, skirtingų žmonių gyvenimo trukmes laikome nepriklausomomis atsitiktinio dydžio X kopijomis. Taigi antroji šio skyriaus esminė prielaida tokia:

Skirtingų žmonių gyvenimo trukmės

$$X_1, X_2, \ \dots \ , X_n$$

bet kuriam n yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai.

2.1 Išgyvenimo funkcija

Gyvenimo trukmės X, kaip ir bet kurio kito atsitiktinio dydžio, pagrindinės charakteristikos yra šios:

(1) gyvenimo trukmės pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x),$$

(2) išgyvenimo funkcija

$$s(x) = 1 - F(x) = \bar{F}(x) = \mathbb{P}(X \geqslant x).$$

Kadangi X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, tai abi funkcijos apibrėžtos intervale $[0, \infty)$, o reikšmes gyja intervale $[0, 1]$. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija $F(x)$ lygi tikimybei, kad žmogus nesulauks x metų, o išgyvenimo funkcija $s(x)$ rodo tikimybę, kad žmogus sulauks x metų. Nesunku pastebėti tokias išgyvenimo funkcijos savybes:

(1) $s(x)$ nedidėja, kai $x \geqslant 0$,

(2) $s(0) = 1$,

(3) $s(+\infty) = 0$,

(4) $s(x)$ tolydi apibrėžimo srityje.

Aptarsime statistinę išgyvenimo funkcijos prasmę. Sakykime nagrinėjame žmonių grupę iš ℓ_0 individų su gyvenimo trukmėmis

$$X_1, X_2, \ \dots \ , X_{\ell_0}.$$

Sakykime $\mathcal{L}(x)$ yra likusių gyvų amžiaus x individų skaičius iš pradinės grupės. Kadangi individų gyvenimo trukmės

$$X_1, X_2, \ \dots \ , X_{\ell_0}$$

yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tai pažymėję $\ell_x = \mathbb{E}\mathcal{L}(x)$ gauname:

$$\begin{aligned} \ell_x &= \mathbb{E}\mathcal{L}(x) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\ell_0} \mathbf{1}_{(X_i \geqslant x)}\right) = \sum_{i=1}^{\ell_0} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(X_i \geqslant x)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell_0} \mathbb{P}(X_i \geqslant x) = \ell_0 s(x). \end{aligned}$$

Vadinasi, bet kuriam neneigiamam realiam skaičiui x

$$s(x) = \frac{\ell_x}{\ell_0},$$

čia ℓ_x, kaip jau minėjome, yra vidutinis amžiaus x individų skaičius iš pradinės grupės ℓ_0

2.2 Mirtingumo kreivė

Kadangi žmogaus gyvenimo trukmė X yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, tai šio dydžio pasiskirstymo funkcija $F(x)$ turi tankį $f(x)$. Aišku, kad:

$$f(x) = F'(x) = -(1 - F(x))' = -s'(x)$$

Dydis $\ell_0 f(x)$ akturarinėje matematikoje vadinamas mirties kreive.

Aptarsime mirties kreivės statistinę prasmę. Nagrinėjame žmonių grupę ℓ_0. Sakyki- me $\mathcal{D}(x)$ yra mirusiųjų x-mečių iš grupės ℓ_0 skaičius. Tada

$$d_x = \mathbb{E}\mathcal{D}(x) = \mathbb{E}(\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+1)) = \ell_x - \ell_{x+1}.$$

Vadinasi,

$$\ell_0 f(x) = -\ell_0 s'(x) = -\ell_0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x}.$$

Paskutinėje išraiškoje pasirinkę $\Delta x = 1$, gauname:

$$\ell_0 f(x) \approx \ell_0(s(x) - s(x+1)) = \ell_x - \ell_{x+1} = d_x.$$

Taigi $\ell_0 f(x) \approx d_x$, kur d_x - vidutinis mirusiųjų x-mečių iš pradinės grupės ℓ_0 skaičius.

Žinant mirties kreivę $\ell_0 f(x)$ nesunku rasti $s(x)$. Iš tiesų:

$$s(x) = \int_x^\infty f(u) du.$$

2.3 Mirtingumo galia

Bet kuriam neneigiamam realiam x dydis

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

vadinamas mirtingumo galia. Šioje formulėje, kaip ir anksčiau, $f(x)$ yra gyvenimo trukmės X tankio funkcija, o $s(x)$ yra išgyvenimo funkcija.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du}.$$

Vadinasi, mirtingumo galia μ_x irgi gali būti laikoma pagrindinė gyvenimo trukmės X charakteristika, nes turėdami μ_x nesunkiai galime surasti $s(x)$ ir $F(x)$.

2.4 Skaitinės gyvenimo trukmės charakteristikos

Gyvenimo trukmę X apibūdina šio atsitiktinio dydžio pagrindinės charakteristikos: X pasiskirstymo funkcija, išgyvenimo funkcija, mirtingumas. Tačiau kartais įvairiose situacijose užtenka žinoti tik tam tikrus atsitiktinio dydžio skaitinius parametrus. Dažniausiai naudojamos šios gyvenimo trukmės X skaitinės charakteristikos:

(1) vidutinė gyvenimo trukmė

$$\mathring{e}_0 = \mathbb{E}X = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty s(x) dx,$$

(2) gyvenimo trukmės dispersija

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2,$$

čia $\mathbb{E}X^2$ yra atsitiktinio dydžio X antrasis momentas, t.y.,

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = 2\int_0^\infty x s(x) dx,$$

(3) gyvenimo trukmės mediana $m(0)$.

Mediana - tai amžius, kurio sulaukia pusė pradinės grupės narių. Ji paprastai randama naudojantis kuria nors žemiau užrašyta lygybe:

$s(m(0)) = \frac{1}{2}$,

$1 - F(m(0)) = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(X \geqslant m(0)) = \frac{1}{2}$,

$\frac{\ell_{m(0)}}{\ell_0} = \frac{1}{2}$.

2.5 Analizinės išgyvenimo funkcijos

Statistiniai tyrimai rodo, kad žmogaus gyvenimo trukmės X tikrasis pasiskirstymas turi gana sudėtingą pavidalą. Todėl nuo seno buvo bandoma parinkti skirstinio pavidalą, kuris, būtų kiek įmanoma paprastesnis ir, antra vertus, kuo tiksliau aprašytų žmogaus gyvenimo trukmę. Šiame skyrelyje pateiksime keletą klasikinių bandymų žmogaus gyvenimo trukmę aprašyti naudojant gana paprastas analizines funkcijas.

(1) *De Muavro 1729 metais pasiūlyta versija.*
Gyvenimo trukmė tolygiai pasiskirsčiusi intervale $(0, \omega)$, kažkokiam teigiamam skaičiui ω. Kitaip tariant, atsitiktinio dydžio X tankis turi pavidalą

$$f(x) = \frac{1}{\omega}\ ,\ 0 < x < \omega.$$

Konstanta ω užrašytoje išraiškoje yra maksimalus įmanomas žmogaus amžius.

Nesunku paskaičiuoti, kad de Muavro pasiūlytu atveju:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{\omega}\ ,\ 0 < x < \omega, \\ s(x) &= 1 - \frac{x}{\omega}\ ,\ 0 < x < \omega, \\ \mu_x &= \frac{1}{\omega - x}\ ,\ 0 < x < \omega. \end{aligned}$$

(2) *Gompertz 1825 metais pasiūlyta versija.*
Žmogaus gyvenimo trukmės mirtingumas turi pavidalą

$$\mu_x = Be^{\alpha x}\ ,\ x \geqslant 0,$$

kur parametrai $B > 0, \alpha > 0$ randami naudojant statistinius duomenis. Šie parametrai aišku priklauso nuo vietovės, kurioje gyvenam, nuo lyties, nuo žmogaus darbo ir panašių faktorių.
Nesunku paskaičiuoti, kad Gomperc pasiūlytai mirtingumo išraiškai:

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{\frac{-B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}\ ,\ x \geqslant 0, \\ F(x) &= 1 - e^{\frac{-B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}\ ,\ x \geqslant 0, \\ f(x) &= Be^{\alpha x}e^{\frac{-B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}\ ,\ x \geqslant 0. \end{aligned}$$

(3) *Makeham 1860 metais pasiūlyta versija.*
Žmogaus gyvenimo trukmės mirtingumas turi pavidalą

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}\ ,\ x \geqslant 0,$$

kur parametrai $A \geqslant -B, \alpha > 0, B > 0$, kaip ir ankstesnės versijos atveju randami iš statistinių duomenų.
Makeham pasiūlytos versijos atveju

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{-Ax-B\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}}\ ,\ x \geqslant 0, \\ f(x) &= (A + Be^{\alpha x})e^{-Ax-B\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}}\ ,\ x \geqslant 0. \end{aligned}$$

(4) *Weibul 1939 metais pasiūlyta versija.*
Žmogaus gyvenimo trukmės mirtingumas turi pavidalą

$$\mu_x = cx^n\ ,\ x \geqslant 0,$$

kur parametrai $c > 0, n > 0$ suderinti su statistiniais duomenimis. Šiuo atveju:

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{-\frac{c}{n+1}x^{n+1}}\ ,\ \geqslant 0, \\ f(x) &= cx^n e^{-\frac{c}{n+1}x^{n+1}}\ ,\ x \geqslant 0. \end{aligned}$$

2.6 Likusio gyvenimo trukmė

Negimę asmenys į draudimo kompanijas nesikreipia. Jeigu pilietis kreipiasi į draudimo kompaniją, tai jis akivaizdžiai turi x, $x \geqslant 0$, metų. Toliau garbingą asmenį turintį x metų žymėsime (x). Visus nemalonius atsitik- tinumus, gresiančius (x), natūralu nagrinėti su sąlyga $X \geqslant x$. Taigi asmeniui (x) natūralu nagrinėti ne viso gyvenimo trukmę X, o likusio gyvenimo trukmę $T_x = X - x$. Aišku, kad atsitiktinio dydžio T_x skirstinį nusako atsitiktinio dydžio $X - x$ skirstinys su sąlyga $X \geqslant x$. Toliau aptarsime pagrindinius dydžius aprašančius būsimo gyvenimo trukmę T_x.

${}_tq_x$ – tikimybė, kad (x) mirs per artimiausius t metų,

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \mathbb{P}(T_x < t) = \mathbb{P}(X - x < t | X \geqslant x) = \frac{\mathbb{P}(x \leqslant X < x + t)}{\mathbb{P}(X \geqslant x)} \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}. \end{aligned}$$

${}_tp_x$ – tikimybė, kad (x) išgyvens dar bent t metų,

$${}_tp_x = \mathbb{P}(T_x \geqslant t) = 1 - {}_tq_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}.$$

$p_x = {}_1p_x$ – tikimybė, kad (x) išgyvens bent metus. Nesunku pastebėti, kad

$${}_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}, \; t \in N.$$

$q_x = {}_1q_x$ – tikimybė, kad (x) mirs per artimiausius metus

${}_{t|u}q_x$ – tikimybė, kad (x) išgyvens t metų, bet mirs per sekančius u metų,

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \mathbb{P}(t \leqslant T_x < t + u) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+t} - \ell_{x+t+u}}{\ell_x}. \end{aligned}$$

${}_{t|}q_x$ – tikimybė, kad asmuo x išgyvens t metų ir numirs per sekančius metus,

$${}_{t|}q_x = {}_{t|1}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+t} - \ell_{x+t+1}}{\ell_x}.$$

$f_x(t)$ – atsitiktinio dydžio T_x tankio funkcija,

$$\begin{aligned} f_x(t) &= (\mathbb{P}(T_x < t))' = ({}_tq_x)' = \left(\frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}\right)' = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \left(-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}. \end{aligned}$$

$\overset{\circ}{e}_x$ – būsimos gyvenimo trukmės vidurkis,

$$\begin{aligned} e^{\circ}{}_x &= \int_0^\infty t \cdot f_x(t)dt = \int_0^\infty t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt = \int_0^\infty td\mathbb{P}(T_x < t) \\ &= \int_0^\infty td({}_tq_x) = \int_0^\infty td(-{}_tp_x) = \int_0^\infty {}_tp_x dt \\ &= \int_0^\infty \frac{s(x+t)}{s(x)}dt = \frac{1}{s(x)} \cdot \int_x^\infty s(u)du. \end{aligned}$$

$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ – dalinis būsimos gyvenimo trukmės vidurkis. Šis dydis rodo kiek vidutiniškai metų asmuo x pragyvens per artimiausius n metų.

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\min(T_x, n)) = \frac{1}{s(x)} \cdot \int_x^{x+n} s(u)du.$$

$\mathbb{D}T_x = \mathbb{E}(T_x^2) - (\mathbb{E}T_x)^2$ – būsimos gyvenimo trukmės dispersija. Nesunku įrodyti, kad

$$\mathbb{E}T_x^2 = \frac{2}{s(x)} \cdot \int_0^\infty t \cdot s(x+t)dt.$$

2.7 Sveikareišmė likusio gyvenimo trukmė

Labai dažnai gyvybės draudimo įmonės sutartis su klientais sudaro suapvalintam metų skaičiui. Todėl šalia dydžio $T_x = X - x$ aktuarinėje matematikoje nagrinėjamas dydis $K_x = [T_x]$. Kadangi K_x įgyja tik neneigiamas sveikas reikšmes, tai K_x skirstinį nusako tikimybės

$$\mathbb{P}(K_x = k)\ ,\ k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Aišku, kad:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K_x = k) &= \mathbb{P}([T_x] = k) = \mathbb{P}(k \leqslant T_x < k+1) = {}_{k|1}q_x = {}_{k|}q_x \\ &= \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{\ell_{x+k} - \ell_{x+k+1}}{\ell_x} = \frac{d_{x+k}}{\ell_x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_x = \mathbb{E}K_x &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}K_x &= \mathbb{E}(K_x)^2 - (\mathbb{E}K_x)^2, \\ \mathbb{E}(K_x)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} = \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot s(x+k)) - e_x.\end{aligned}$$

Iš gautos e_x išraiškos išplaukia, kad

$$\begin{aligned}e_x &= \frac{1}{s(x)}(s(x+1) + s(x+2) + ...) \\ &= \frac{s(x+1}{s(x)} + \frac{s(x+1)}{s(x)} \cdot (s(x+2) + s(x+3) + ...) \\ &= p_x + p_x \cdot e_{x+1} = p_x(1 + e_{x+1}) = (1 - q_x)(1 + e_{x+1}).\end{aligned}$$

Vadinasi, bet kuriam x

$$q_x = \frac{1 + e_{x+1} - e_x}{1 + e_{x+1}}.$$

2.8 Mirtingumo lentelės

Statistinius duomenis apie tam tikros individų grupės gyvenimo trukmę patogu surašyti į lentelę. Gauta lentelė paprastai vadinama mirtingumo lentele. Mirtingumo lentelėje pateikiama informacija apie atsitiktinai pasirinkto asmens iš tam tikros grupės gyvenimo trukmę, priklausomai nuo jo amžiaus x. Mirtingumo lentelė atspindinti visos individų grupės elgesį vadinama ***bendrąja mirtingumo lentele***.

Norint išspręsti kokį nors draudimo procese atsirandantį uždavinį, mums pakanka žinoti vien tik išgyvenimo funkcijos $s(x)$ reikšmes. Tačiau bendroje mirtingumo lentelėje dažnai pateikiami ir kiti duomenys, susieję su (x) gyvenimo trukme. Būtent:

$\ell_x = \ell_0 s(x)$ - vidutinis sulaukusių x metų individų skaičius iš pradinės grupės ℓ_0,

$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$ - vidutinis grupės individų skaičius, kurie mirė sulaukę amžiaus x,

$q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$ - tikimybė, kad atskiras individas mirs turėdamas x metų,

$\mathring{e}_x$ - x metų sulaukusio individo būsimo gyvenimo trukmė.

Dažniausia mirtingumo lentelėse naudojamas laiko matas yra lygus vieneriems metams. Taigi nurodytų funkcijų reikšmės pateikiamos momentais $x = 0, 1, 2, \dots$.

Akivaizdu, kad bet kurioje šalyje, taigi ir Lietuvoje, yra didelės žmonių grupės su skirtingomis gyvenimo trukmės charakteristikomis. Pvz.: vyrų mirtingumas yra žymiai didesnis negu moterų; namų šeimininkių mirtingumas yra žymiai mažesnis negu vairuotojų; asmenų, kurie medikų pripažįstami tinkami darbui, mirtingumas žymiai mažesnis, negu tų, kuriems suteikiama kokia nors invalidumo grupė; ir panašiai.

Mirtingumo lentelės, sudarytos tam tikroms visuomenės grupėms, vadinamos ***pasirinktinėmis mirtingumo lentelėmis***.

Kartais žmogus negali pasirinkti vienos ar kitos visuomenės grupės. Pavyzdžiui, vyras negali tapti moterimi, šachtininkui sunku tapti namų šeimininke, sveikam žogui sunku tapti invalidu ir panašiai. Tačiau dažnai atskiras asmuo gali pasirinkti tam tikrą visuomenės grupę. Pavyzdžiui, norėdamas apsidrausti gyvybę žmogus privalo pasitikrinti sveikatą. Jei žmogus neserga, jis patenka į nesergančiųjų grupę. Be abejo, tokios grupės mirtingumas mažesnis už bendrą tautos mirtingumą.

Pasirinktinėse mirtingumo lentelėse, sudarytos individams, savo noru patekusiems į tam tikrą grupę, naudojami specialūs pažymėjimai. Keletą jų paminėsime:

$p_{[x]+t}$ - tikimybė, kad individas $(x+t)$, prieš t metų patekęs į grupę, pragyvens dar metus,

$q_{[x]+t}$ - tikimybė, kad individas $(x+t)$, prieš t metų patekęs į grupę, mirs per artimiausius metus,

${}_u p_{[x]+t}$ - tikimybė, kad individas $(x+t)$, kuris prieš t metų pateko į grupę, pragyvens dar u metų,

${}_u q_{[x]+t}$ - tikimybė, kad individas $(x+t)$, kuris prieš t metų pateko į grupę, mirs per artimiausius u metų.

Pastebėta, kad kai kuriose grupėse mirtingumo priklausymas nuo laiko, prabėgusio nuo patekimo į grupę, mažėja laikui bėgant. O po kokių nors r metų visai nelieka skirtumo, ar individas buvo įsirašęs į grupę, ar ne. Laiko tarpas r, po kurio galima nepaisyti, ar individas priklauso grupei, ar ne, vadinamas ***pasirinkimo veikimo periodu***. Taigi:

$$\ell_{[x]+t} \approx \ell_{x+t}, \;\; t \geqslant r.$$

2.9 Gyvenimo trukmė - nebūtinai sveikas skaičius

Statistiniai duomenys (ℓ_x, q_x, d_x, e_x) mirtingumo lentelėse pateikiami tik sveikoms x reikšmėms. Norint rasti minetų funkcijų tarpines reikšmes reikia interpoliuoti. Aktuarinėje matematikoje skirami trys pagrindiniai interpoliavimo būdai, kurie remiasi tam tikromis prielaidomis apie $s(x)$ pavidalą, kai x nėra sveikas skaičius. Populiariausios yra trys žemiau išvardintos prielaidos.

Pirma prielaida. ***"Mirtingumas pasiskirstęs tolygiai".***

Sakykime, kad išgyvenimo funkcija $s(x)$ tiesinė bet kuriame intervale $[x, x+1]$ kai x natūralusis arba 0,t.y.,

$$s(x+t) = (1-t)\cdot s(x) + t\cdot s(x+1), \;\; x \in \mathbb{N}\cup 0, \;\; t \in [0;1].$$

Nesunku įrodyti, kad esant aprašytai prielaidai

$$\begin{aligned}
{}_t q_x &= t\cdot q_x \;, \\
{}_t p_x &= 1 - {}_t q_x \;, \\
{}_y q_{x+t} &= \frac{y\cdot q_x}{1-t\cdot q_x} \;, \\
\mu_{x+t} &= \frac{q_x}{1-t\cdot q_x} \;, \\
f_x(t) &= {}_t p_x \cdot q_{x+t} = q_x,
\end{aligned}$$

visiems $x \in \mathbb{N} \cup 0$, $t \in [0;1]$, $y \in (0;1)$, $y + t \leqslant 1$.

Antra prielaida. ***"Mirtingumo galia pastovi".***

Sakykime, kad išgyvenimo funkcija kinta eksponentiškai bet kuriame intervale $[x, x+1]$ kai x natūralusis arba 0,t.y.,

$$s(x+t) = s(x) \cdot e^{-\mu_x t}, \ \mu_x = -\ln p_x, \ x \in \mathbb{Z} \cup 0, \ t \in [0;1].$$

Esant aprašytai prielaidai

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= 1 - e^{-\mu_x t} \ , \\
{}_tp_x &= e^{-\mu_x t} \ , \\
{}_yq_{x+t} &= 1 - e^{-\mu_x y} \ , \\
\mu_{x+t} &= \mu_x \ , \\
f_x(t) &= {}_tp_x q_{x+t} = e^{-\mu_x t}\mu_x \ ,
\end{aligned}$$

visiems $x \in \mathbb{N} \cup 0$, $t \in [0;1]$, $y \in [0;1]$, $y + t \leqslant 1$.

Trečia prielaida.***"Balducci prielaida".***

Sakykime, kad išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina tokią sąlygą

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}$$

kai $t \in [0;1]$ ir $x \in\in \mathbb{N} \cup 0$.

Iš Balducci prielaidos išplaukia, kad

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x} \ , \\
{}_tp_x &= \frac{p_x}{1-(1-t)q_x} \ , \\
{}_yq_{x+t} &= \frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x} \ , \\
\mu_{x+t} &= \frac{q_x}{1-(1-t)q_x} \ , \\
f_x(t) &= {}_tp_x q_{x+t} = \frac{p_x q_x}{1-(1-t)q_x} \ ,
\end{aligned}$$

visiems $x \in \mathbb{N} \cup 0$, $t \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ ir $y + t \leqslant 1$.

III. Gyvybės draudimas

Sakykime susiklostė tokia standartinė draudiminė situacija. Draudėjas (x) kreipiasi į draudiką, norėdamas apdrausti savo gyvybę. Draudėjas nori, kad jo mirties atveju draudikas sumokėtų sumą, lygią 1. Draudikui už šią paslaugą draudėjas nori sumokėti vienu mokėjimu. Šiame skyriuje bus nagrinėjama tokios paslaugos kaina. Kadangi draudikas gautus pinigus investuoja, tai draudimo kaina priklauso nuo x, nuo techninės metinės palūkanų normos i, nuo draudimo termino ir draudimo rūšies.

3.1 Draudimas, kai išmoka mokama iš karto po mirties

Tarkime, kad draudėjas (x) ir draudikas pasirašė sutartį, pagal kurią išmoka lygi 1 išmokama iš karto po draudėjo mirties. Draudėjo likusio gyvenimo trukmė yra atsitiktinis dydis T_x. Būsimos išmokos dabartinė vertė - taip pat atsitiktinis dydis. Pažymėkime šį dydį Z_x. Aišku, kad atsitiktinis dydis Z_x priklauso nuo atsitiktinio dydžio T_x. Be to, Z_x priklauso nuo draudimo rūšies. Tiksliai nustatyti būsimos išmokos dabartinę vertę Z_x neįmanoma, tačiau galime rasti pagrindines šio atsitiktinio dydžio charakteristikas. Šiame skyriuje apsiribosime Z_x vidurkiu ir dispersija.

Atsitiktinio dydžio Z_x vidurkis $\mathbb{E}Z_x$ vadinamas ***grynąja vienkartine premija***. Toliau šiame skrelyje pateiksime $Z_x, \mathbb{E}Z_x$ ir $\mathbb{D}Z_x$ išraiškas įvairių draudimo rūšių atveju. Primename, kad visame šiame skyriuje ν yra diskonto daugiklis (žiūrėkite 1.6 skyrelį), t.y.

$$\nu = \frac{1}{1+i},$$

kur i metinė palūkanų norma, o simbolis $\mathbb{I}_A$ žymi įvykio A indikatorių.

3.1.1 n-metų gyvybės draudimas

Suma, lygi 1, išmokama draudėjui mirus, jei mirtis draudėją užklupo per artimiausius n metų. Kitais atvejais draudėjas negauna nieko. Nagrinėjamoje situacijoje:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \begin{cases} \nu^{T_x}, & \text{jei } T_x \leqslant n, \\ 0, & \text{jei } T_x > n, \end{cases} = \nu^{T_x} \mathbb{I}_{T_x \leqslant n},$$

- būsimosios išmokos dabartinės vertės vidutinė vertė arba grynoji vienkartinė premija

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \mathbb{E} Z_x = \int_0^n \nu^t f_x(t) dt = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D} Z_x = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n|}})^2,$$

kur

$${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \mathbb{E} Z_x^2 = \int_0^n \nu^{2t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

3.1.2 Draudimas iki gyvos galvos

Suma, lygi 1, mokama iš kart po (x) mirties, nepriklausomai nuo to, kada jis mirs. Šiuo atveju:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \nu^{T_x},$$

- vienkartinė grynoji premija

$$\bar{A}_x = \mathbb{E} Z_x = \int_0^\infty \nu^t f_x(t) dt = \int_0^\infty \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D} Z_x = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2,$$

kur

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty \nu^{2t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

3.1.3 n-metų grynasis kaupimas

Suma, lygi 1, išmokama po lygiai n metų, jei draudėjas vis dar gyvas. Aprašytu atveju:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \begin{cases} 0, & \text{kai } T_x < n, \\ \nu^n, & \text{kai } T_x \geqslant n, \end{cases} \quad = \quad \nu^n \mathbb{I}_{T_x \geqslant n},$$

- vienkartinė grynoji premija

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} = \mathbb{E}Z_x = \nu^n \mathbb{P}(T_x \geqslant n) = \nu^n{}_n p_x,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D}Z_x = {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} - (A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1})^2,$$

čia

$${}^2A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} = \mathbb{E}Z_x^2 = \nu^{2t}{}_t p_x.$$

3.1.4 n-metų kaupiamasis draudimas

Suma, lygi 1, išmokama, jei draudėjas miršta per artimiausius n metų (mokama iš karto po mirties) arba jei draudėjas išgyvena n metų (mokama laikotarpio pabaigoje). Aprašytoje situacijoje:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \begin{cases} \nu^{T_x}, & \text{kai } T_x \leqslant n, \\ \nu^n, & \text{kai } T_x > n, \end{cases} \quad = \quad \nu^{T_x} \mathbb{I}_{T_x \leqslant n} + \nu^n \mathbb{I}_{T_x > n},$$

- vienkartinė grynoji premija

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Z_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} = \int_0^n \nu^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt + \nu^n{}_n p_x,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D}Z_x = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2,$$

čia

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \nu^{2t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt + \nu^{2t}{}_tp_x.$$

3.1.5 m metų atidėtas gyvybės draudimas iki gyvos galvos

Suma, lygi 1, išmokama draudėjui iš karto po mirties, jeigu mirtis jį užklupo ne anksčiau kaip po m metų. Aišku, kad aprašytoje situacijoje:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \begin{cases} 0, & \text{kai } T_x < m, \\ \nu^{T_x}, & \text{kai } T_x \geqslant m, \end{cases} = \nu^{T_x}\mathbb{I}_{T_x \geqslant m} \ ,$$

- vienkartinė grynoji premija

$${}_{m|}\bar{A}_x = \mathbb{E}Z_x = \int_m^\infty \nu^t f_x(t)dt = \int_m^\infty \nu^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D}Z_x = {}^2_{m|}\bar{A}_x - ({}_{m|}\bar{A}_x)^2,$$

čia

$${}^2_{m|}\bar{A}_x = \int_m^\infty \nu^{2t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

3.1.6 m metų atidėtas draudimas n metams

Suma, lygi 1, išmokama iš karto po draudėjo mirties, jeigu mirtis jį užklumpa ne anksčiau kaip po m metų, bet ne vėliau kaip po $(n+m)$ metų. Aprašytoje situacijoje:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \begin{cases} 0, & \text{kai } T_x < m, \\ \nu^{T_x}, & \text{kai } T_x \geqslant m, \end{cases} \quad = \ \nu^{T_x}\mathbb{I}_{m<T_x\leqslant n+m} \ ,$$

- vienkartinė grynoji premija

$${}_{m|n}\bar{A}_x = \mathbb{E}Z_x = \int_m^{m+n} \nu^t f_x(t)dt = \int_m^{m+n} \nu^t {}_tp_x\mu_{x+t}dt,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės dispersija

$$\mathbb{D}Z_x = {}_{m|n}^{\,2}\bar{A}_x - ({}_{m|n}\bar{A}_x)^2,$$

čia, paskutinėje lygybėje,

$${}_{m|n}^{\,2}\bar{A}_x = \int_m^{m+n} \nu^{2t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

3.1.7 Kasmet didėjantis gyvybės draudimas iki gyvos galvos

Suma lygi 1 išmokama iš karto po draudėjo mirties, jei draudėjas miršta pirmais metais, suma lygi 2 išmokama iš karto po draudėjo mirties, jei draudėjas miršta antrais metais, suma lygi 3 išmokama išx karto po draudėjo mirties, jei draudėjas miršta trečiais metais ir t.t. Aprašytu atveju:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė

$$Z_x = \nu^{T_x}[T_x + 1],$$

- vienkartinė grynoji premija

$$(I\bar{A})_x = \mathbb{E}Z_x = \int_0^\infty [t+1]\nu^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt,$$

- būsimos išmokos dabartinės vertės antrasis momentas

$$\mathbb{E}Z_x^2 = \int_0^\infty [t+1]^2\nu^{2t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

3.1.8 m kartų per metus didėjantis draudimas iki gyvos galvos

Visi metai padalijami į m laikotarpių. Suma lygi $\frac{1}{m}$, išmokama, jei draudėjas miršta pirmajame laikotarpyje, suma lygi $\frac{2}{m}$, išmokama, jei draudėjas miršta antrajame laikotarpyje, suma lygi $\frac{3}{m}$, išmokama, jei draudėjas miršta trečiajame laikotarpyje ir t.t. Aprašytu atveju:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė
$$Z_x = \nu^{T_x} \cdot \frac{[T_x \cdot m + 1]}{m},$$
- vienkartinė grynoji premija
$$(I^{(m)}\bar{A})_x = \mathbb{E}Z_x = \int_0^\infty \frac{[t \cdot m + 1]}{m} \nu^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$
- būsimos išmokos dabartinės vertės antrasis momentas
$$\mathbb{E}Z_x^2 = \int_0^\infty \frac{[t \cdot m + 1]}{m}^2 \nu^{2t}{}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

3.1.9 Tolygiai didėjantis gyvybės draudimas iki gyvos galvos

Suma lygi t, (išmatuota metais) mokama iš karto po draudėjo mirties.

- būsimosios išmokos dabartinė vertė
$$Z_x = T_x \cdot \nu^{T_x},$$
- vienkartinė grynoji premija
$$(\bar{I}\bar{A})_x = \mathbb{E}Z_x = \int_0^\infty t\nu^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$
- būsimos išmokos dabartinės vertės antrasis momentas
$$\mathbb{E}Z_x^2 = \int_0^\infty t^2 \nu^{2t}{}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

3.1.10 n-metų mažėjantis gyvybės draudimas

Suma lygi n, išmokama, jei draudėjas (x) miršta pirmais metais po sutarties pasirašymo, suma $n-1$ išmokama, jei draudėjas (x) miršta antrais metais po sutarties pasirašymo, suma lygi $n-3$ išmokama, jei draudėjas miršta trečiais metais po sutarties pasirašymo ir t.t. Šiuo atveju:

- būsimosios išmokos dabartinė vertė
$$Z_x = \nu^{T_x} \cdot (n - [T_x])\mathbb{I}_{T_x \leqslant n},$$
- vienkartinė grynoji premija
$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Z_x = \int_0^n (n-[t])\nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \ ,$$
- būsimos išmokos dabartinės vertės antrasis momentas
$$\mathbb{E}Z_x^2 = \int_0^n \nu^{2t}(n-[t])^2 {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

3.2 Draudimas kai išmokama mokama mirties metų pabaigoje

Tarkime draudėjas (x) pasirašė sutartį pagal kurią draudimo išmoka bus išmokama ne iš karto po draudėjo mirties , o draudėjo mirties metų pabaigoje. Esant tokioms draudimo sąlygoms būsimos išmokos dabartinė vertė Z_x yra atsitiktinis dydis priklausantis ne nuo T_x, o nuo $K_x = [T_x]$. Skyrelyje 2.3 buvo gauta lygybė:

$$\mathbb{P}(K_x = k) = \mathbb{P}(k < T_x < k+1) = {}_{k|1}q_x = {}_tp_x q_{x+k} \ , \ k = 0, 1, 2, \ \dots \ .$$

Naudojantis šiuo K_x skirstiniu galime gauti atsitiktinio dydžio Z_x vidurkio ir dispersijos išraiškas. Atsitiktinio dydžio Z_x vidurkis $\mathbb{E}Z_x$, kaip ir draudimo, išmokamo mirties momentu atveju, vadinamas ***vienkartine grynąja premija.*** Aišku, kad $\mathbb{E}Z_x$ ir $\mathbb{E}Z_x^2$ išraiškos priklauso nuo draudimo sutarties rūšies. Toliau šiame skyrelyje aptarsime pagrindines draudimo su išmoka mirties metų gale rūšis.

3.2.1 Gyvybės draudimas iki gyvos galvos

Suma lygi 1 išmokama draudėjo (x) mirties metų gale. Šiuo paprasčiausiu atveju:

$$
\begin{aligned}
Z_x &= \nu^{K_x+1}, \\
A_x &= \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}, \\
\mathbb{E}Z_x^2 &= {}^2A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{2(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}, \\
\mathbb{D}Z_x &= {}^2A_x - (A_x)^2.
\end{aligned}
$$

3.2.2 n-metų gyvybės draudimas

Suma lygi 1 išmokama draudėjui (x) mirus per artimiausius n metų. Išmoka mokama mirties metų gale. Šiuo atveju:

$$
\begin{aligned}
Z_x &= \nu^{K_x+1} \mathbb{I}_{K_x<n}, \\
A^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}, \\
\mathbb{E}Z_x^2 &= {}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}, \\
\mathbb{D}Z_x &= {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2.
\end{aligned}
$$

3.2.3 n-metų kaupiamasis draudimas

Suma lygi 1 išmokama, jeigu draudėjas miršta per artimiausius n metų (mokama mirties metų pabaigoje) arba jei draudėjas išgyvena n metų (mokama periodo pabaigoje). Aprašytu atveju:

$$
\begin{aligned}
&Z_x = \nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{K_x<n} + \nu^n \mathbb{I}_{K_x \geqslant n},\\
&A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Z_x = A^1_{x:\overline{n}|} + \nu^n{}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1}\nu^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} + \nu^n{}_np_x,\\
&\mathbb{E}Z_x^2 = {}^2A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\nu^{2(k+1)}{}_kp_xq_{x+k} + \nu^{2n}{}_np_x.
\end{aligned}
$$

3.2.4 m metų atidėtas n metų draudimas

Suma lygi 1 išmokama mirties metų gale, jeigu mirtis draudėją užklumpa ne anksčiau kaip po m metų ir ne vėliau $(n+m)$ metų. Šiuo atveju:

$$
\begin{aligned}
&Z_x = \nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{m\leqslant K_x<m+n},\\
&{}_{m|n}A_x = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{m+n-1}\nu^{k+1}{}_kp_xq_{x+k},\\
&\mathbb{E}Z_x^2 = {}_{m|n}^{\;\;2}A_x = \sum_{k=0}^{m+n-1}\nu^{2(k+1)}{}_kp_xq_{x+k}.
\end{aligned}
$$

3.2.5 n metų kasmet didėjantis draudimas

Suma lygi 1 mokama pirmų metų gale, jei draudėjas miršta pirmais metais, suma lygi 2 mokama, jei draudėjas miršta antrais metais, suma lygi 3 išmokama, jei draudėjas miršta trečiaisiais metais, t.t., suma lygi n išmokama n-tųjų metų gale, jei draudėjas miršta n-taisiais metais. Aprašytu atveju:

$$
\begin{aligned}
&Z_x = \nu^{K_x+1}\cdot[K_x+1]\mathbb{I}_{K_x<n},\\
&(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{n-1}\nu^{k+1}(k+1){}_kp_xq_{x+k},\\
&\mathbb{E}Z_x^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\nu^{2(k+1)}(k+1)^2{}_kp_xq_{x+k}.
\end{aligned}
$$

3.2.6 n metų kasmet mažėjantis draudimas

Suma lygi n išmokama pirmų metų gale, jei draudėjas miršta pirmais metais, suma lygi $n-1$, jei draudėjas (x) miršta antrais metais , t.t., suma lygi 1 mokama n-tųjų metų gale, jei draudėjas miršta n-taisiais metais. Šiuo atveju:

$$\begin{aligned}
&Z_x = \nu^{K_x+1} \cdot [n - K_x]\mathbb{I}_{K_x<n},\\
&(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1}(n-k)_k p_x q_{x+k},\\
&\mathbb{E}Z_x^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2(k+1)}(n-k)^2{}_k p_x q_{x+k}.
\end{aligned}$$

3.2.7 Kasmet didėjantis draudimas iki gyvos galvos

Suma lygi 1 išmokama pirmųjų metų gale, jei draudėjas miršta pirmais metais, suma lygi 2 iňokama antrųjų metų gale, jei draudėjas miršta per antrus metus, suma lygi 3 išmokama trečiųjų metų gale, jeigu draudėjas miršta per trečius metus ir t.t.

$$\begin{aligned}
&Z_x = \nu^{K_x+1} \cdot (K_x + 1),\\
&(IA)_x = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1}(k+1)_k p_x q_{x+k},\\
&\mathbb{E}Z_x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{2(k+1)}(k+1)^2{}_k p_x q_{x+k}.
\end{aligned}$$

3.3 Ryšys tarp draudimo išmokų, mokamų mirties momentu, ir draudimo išmokų, mokamų mirties metų gale

Sakykime T_x yra likusi draudėjo (x) gyvenimo trukmė. Aišku, kad:

$$T_x = K_x + S_x,$$

jei

$$K_x = [T_x],$$

o

$$S_x = T_x - K_x = \{T_x\}.$$

Sakykime mirtingumas pasiskirstęs tolygiai tarp bet kurių sveikų argumento x reikšmių. Tai yra (žiūrėkite 2.9 skyrelį) išgyvenimo funkcija $s(x)$ bet kuriems $x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$ tenkina lygybę

$$s(x+t) = (1-t) \cdot s(x) + t \cdot s(x+1).$$

Kadangi šiuo atveju ${}_tq_x = t \cdot q_x$, bet kuriam sveikam neneigiamam x ir bet kuriam $t \in [0,1]$ (žiūrėkite 2.9 skyrelį), tai bet kuriam s iš intervalo $[0,1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_x < s) &= \mathbb{P}(\{T_x\} < s\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(k \leqslant T_x < k+s)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(k \leqslant T_x < k+s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x \cdot {}_sq_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= s \cdot 1 = s \end{aligned}$$

Vadinasi, atsitiktinis dydis S_x tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$.

Antra vertus, iš įrodytos lygybės ir minėtos lygybės

$${}_tq_x = t \cdot q_x,\ x \in \mathbb{N} \cup 0,\ t \in [0,1]$$

išplaukia, kad bet kuriam sveikam neneigiamam k ir bet kuriam $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_x = k, S_x < s) &= \mathbb{P}(k \leqslant T_x < k+s) \\ &= {}_kp_x \cdot {}_sq_{x+k} = {}_kp_x \cdot s \cdot q_{x+k} \\ &= \mathbb{P}(S_x < s) \cdot \mathbb{P}(k \leqslant T_x < k+1) \\ &= \mathbb{P}(S_x < s) \cdot \mathbb{P}(K_x = k). \end{aligned}$$

Įrodyta lygybė rodo atsitiktinių dydžių K_x ir S_x nepriklausomumą.

Taigi įrodėme tokį teiginį.

3.3.1 **TEOREMA**.***Jeigu mirtingumas pasiskirstęs tolygiai bet kuriame intervale*** $[x, x+1],\ x \in \mathbb{N} \cup 0$***, tai dėstinyje*** $T_x = K_x + S_x$ ***atsitiktiniai dydžiai*** K_x ***ir*** S_x ***yra nepriklausomi. Be to atsitiktinis dydis*** S_x ***tolygiai pasiskirstęs intervale*** $[0,1]$***.***

Naudojantis šia teorema, galima gauti sąryšius tarp grynosios vienkartinės premijos, mokamos mirties momentu, ir vienkartinės grynosios premijos, mokamos mirties metų gale. Toliau šiame skyrelyje pateikiami keli tik ką įrodytos teoremos taikymo pavyzdžiai.

●● Jeigu "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x \ .$$

△ Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) &= \int_0^1 \nu^{s-1} \cdot 1 ds = \frac{\nu^{s-1}}{\ln \nu}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\ln \nu} \cdot \Big(1 - \nu^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{\ln e^{-\delta}} \cdot (1 - (1+i)) = \frac{i}{\delta}.\end{aligned}$$

Pasinaudoję 3.3.1 teorema, gauname

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \mathbb{E}(\nu^{T_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+S_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1-1+S_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1} \cdot \nu^{S_x-1}) \\ &= \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) \cdot \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = A_x \cdot \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = \frac{i}{\delta} A_x.\end{aligned}$$

△

●● Jeigu "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \cdot A^1_{x:\overline{n}|} \ .$$

△ Dydis $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ yra vienkartinė grynoji premija n metų gyvybės draudimo atveju. Esant tokiam draudimui būsimos išmokos dabartinė vertė yra

$$\nu^{T_x} \mathbb{I}_{T_x<n}.$$

Vadinasi, iš 3.3.1 teoremos išplaukia

$$\begin{aligned}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}\left(\nu^{T_x} \mathbb{I}_{T_x<n}\right) = \mathbb{E}\left(\nu^{T_x+1} \nu^{S_x-1}\right) \mathbb{I}_{K_x<n} \\ &= \mathbb{E}\left(\nu^{K_x+1} \mathbb{I}_{K_x<n} \cdot \nu^{S_x-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\nu^{K_x+1} \mathbb{I}_{K_x<n}\right) \cdot \mathbb{E}\nu^{S_x-1} \\ &= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} \ .\end{aligned}$$

△

•• Jeigu "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai

$$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \cdot (IA)^1_{x:\overline{n}|} \ .$$

$\triangle$ Dydis $(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$ yra n metų kasmet didėjančio draudimo vienkartinė grynoji premija. Esant tokiam draudimui būsimos išmokos vertė yra:

$$Z_x = [T_x + 1]\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x<n)} \ .$$

Pasinaudoję 3.3.1 teorema, gauname

$$\begin{aligned}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}Z_x = \mathbb{E}([T_x+1]\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x<n)}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+1+S_x-1}\mathbb{I}_{(K_x<n)}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)}\nu^{S_x-1}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)})\mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) \\ &= (IA)^1_{x:\overline{n}|} \cdot \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = (IA)^1_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{i}{\delta} \ .\end{aligned}$$

$\triangle$

•• Jeigu "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} \cdot \left((IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right) \ .$$

$\triangle$ Atsitiktiniai dydžiai K_x ir S_x nepriklausomi, todėl

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \mathbb{E}T_x \cdot \nu^{T_x} = \mathbb{E}((K_x+S_x)\nu^{K_x+S_x}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+S_x} + (S_x-1)\nu^{K_x+S_x}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+1}\nu^{S_x-1}) + \mathbb{E}((S_x-1)\nu^{K_x+1}\nu^{S_x-1}) \\ &= \mathbb{E}((K_x+1)\nu^{K_x+1}) \cdot \frac{i}{\delta} + \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) \cdot \mathbb{E}((S_x-1)\nu^{S_x-1}) \\ &= (IA)_x \cdot \frac{i}{\delta} + A_x \cdot \mathbb{E}((S_x-1)\nu^{S_x-1}) \ .\end{aligned}$$

Kadangi

$$\mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = \frac{i}{\delta},$$

ir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_x-1)\nu^{S_x-1}) &= \int_0^1 (s-1)\nu^{s-1} \cdot 1ds \\ &= \int_{-1}^0 u\nu^u du = \int_{-1}^0 ud\frac{\nu^u}{\ln \nu}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u \cdot \frac{\nu^u}{\ln u}\bigg|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\nu^u}{\ln u} du = \frac{\nu^{-1}}{\ln \nu} - \frac{\nu^u}{\ln^2 \nu}\bigg|_{-1}^{0} \\
&= \frac{1+i}{-\delta} - \left(\frac{1}{\ln^2 \nu} - \frac{\nu^{-1}}{\ln^2 \nu}\right) = \frac{1+i}{-\delta} - \frac{1}{\delta^2} + \frac{1+i}{\delta^2} \\
&= \frac{1+i}{-\delta} + \frac{i}{\delta^2} = \frac{i}{\delta}\left(-\frac{1+i}{i} + \frac{1}{\delta}\right) = \frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{d}\right),
\end{aligned}
$$

tai

$$
(\bar{I}\bar{A})_x = (IA)_x \cdot \frac{i}{\delta} + \frac{i}{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{d}\right) A_x \ .
$$

$\triangle$

●● Jeigu "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai

$$
{}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i^2 + 2i}{2\delta} \left({}^2A^1_{x:\overline{n}|}\right) \ .
$$

$\triangle$ Iš atsitiktinių dydžių K_x ir S_x nepriklausomumo išplaukia, kad:

$$
\begin{aligned}
{}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x<n)})^2 = \mathbb{E}(\nu^{2T_x}\mathbb{I}_{(T_x<n)}) \\
&= \mathbb{E}(\nu^{2(K_x+1)+2(S_x-1)}\mathbb{I}_{(K_x<n)}) \\
&= \mathbb{E}(\nu^{2(K_x+1)}\mathbb{I}_{(K_x<n)}) \cdot \mathbb{E}(\nu^{2(S_x-1)}) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)})^2}_{{}^2A^1_{x:\overline{n}|}} \cdot \mathbb{E}\nu^{2(S_x-1)}.
\end{aligned}
$$

Atsitiktinis dydis S_x tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$, todėl

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\nu^{2(S_x-1)}) &= \int_0^1 \nu^{2(s-1)} \cdot 1 \cdot ds \\
&= \frac{1}{2\ln \nu} - \frac{\nu^{-2}}{2\ln \nu} = \frac{i^2+2i}{2\delta} \ .
\end{aligned}
$$

Vadinasi,

$$
{}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i^2 + 2i}{2\delta} \cdot {}^2A^1_{x:\overline{n}|} \ .
$$

$\triangle$

Jei išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina kitą prielaidą argumento x nesveikoms reikšmėms (žiūrėkite 2.9 skyrelį), tai irgi būtų galima išvesti tam tikrus sąryšius tarp grynosios vienkartinės premijos, kai išmokama mokama mirties momentu, ir grynosios vienkartinės premijos, kai išmoka mokama mirties metų pabaigoje. Tačiau tie sąryšiai žymiai sudėtingesni, nes sunku ištirti S_x pasiskirstymą ir atsitiktinių dydžių K_x ir S_x priklausomumą.

3.4 Rekursinės lygtys

Naudojant tikimybių teorijos ir matematinės analizės metodus galima gauti tam tikrus sąryšius tarp grynosios vienkartinės premijos, paskaičiuotos skirtingiems draudėjų amžiams x. Tokio pavidalo sąryšiai vadinami rekursinėmis lygtimis. Toliau šiame skyrelyje pateikiame kelis rekursinių lygčių pavyzdžius.

3.4.1 Teorema. ***Esant pastoviam diskonto daugikliui*** $\nu = \frac{1}{1+i}$ ***lygybė:***

$$A_x = \nu(q_x + p_x A_{x+1})$$

teisinga visiems $x \geqslant 0$.

$\triangle$ Teoremą įrodysime dviem būdais.

Pradžioje analizinis įrymas.

Iš 2.6 skyrelyje aptartų formulių išplaukia,kad:

$$_{k+1}p_x = \frac{s(x+k+1)}{s(x+1)} \cdot \frac{s(x+1)}{s(x)} =_k p_{x+1} \cdot p_x.$$

Vadinasi, pagal 3.2 skyrelyje gautas formules

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} \\ &= \nu_0 p_x q_x + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} \\ &= \nu q_x + \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{j+2}{}_{j+1} p_x q_{x+j+1} \\ &= \nu q_x + \nu \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{j+1} p_{xj} p_{x+1} q_{x+j+1} \\ &= \nu \left(q_x + p_x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{j+1}{}_j p_{x+1} q_{x+j+1} \right) \\ &= \nu q_x + \nu p_x A_{x+1} = \nu \left(q_x + p_x A_{x+1} \right) \ . \end{aligned}$$

Dabar tikimybinis įrodymas.

Kadangi

$$A_x = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) \ ,$$

tai pasinaudoję sąlyginio vidurkio savybe, gauname

$$A_x = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}|K_x = 0) \cdot \mathbb{P}(K_x = 0) + \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}|K_x \geqslant 1) \cdot \mathbb{P}(K_x \geqslant 1).$$

Tačiau:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}|K_x = 0) = \mathbb{E}(\nu) = \nu, \\ \mathbb{P}(K_x = 0) = q_x, \\ \mathbb{P}(K_x \geqslant 1) = p_x, \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}|K_x \geqslant 1) &= \mathbb{E}(\nu^{(K_x-1)+2}|K_x - 1 \geqslant 0) \\ &= \mathbb{E}(\nu\nu^{(K_x-1)+1}|K_x - 1 \geqslant 0) \\ &= \mathbb{E}(\nu\nu^{K_{x+1}+1}|K_{x+1} \geqslant 0) \\ &= \nu\mathbb{E}(\nu^{K_{x+1}+1}) = \nu A_{x+1}. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$A_x = \nu q_x + p_x \cdot \nu \cdot A_{x+1}.$$

$\triangle$

3.4.2 Teorema. ***Esant pastoviai palūkanų galiai*** δ***:***

$$\left(\bar{A}_x\right)'_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\delta + \mu_x).$$

Aišku, kad teoremos formulė ekvivalenti lygybei

$$\bar{A}_{x+\Delta x} = A_x + \Delta x \left(-\mu_x + \bar{A}_x(\delta + \mu_x)\right) + o(\Delta x),$$

nes

$$\left(\bar{A}_x\right)'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\bar{A}_{x+\Delta x} - \bar{A}_x}{\Delta x}.$$

$\triangle$ 3.4.2 teoremą taip pat įrodysime dviem būdais. Pradžioje analizinis įrodymas.

Iš 3.1 skyrelyje išvestų lygybių gauname, kad

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_x^\infty \nu^{y-x} {}_{y-x}p_x \mu_y dy \ .$$

Kadangi

$${}_{y-x}p_x = \frac{s(x+y-x)}{s(x)} = \frac{s(y)}{s(x)} = \frac{s(y)}{s(0)} \cdot \frac{s(0)}{s(x)} = {}_yp_0 \cdot \frac{1}{{}_xp_0},$$

tai

$$\bar{A}_x = \int_x^{\infty} \nu^{y-x} \cdot \frac{{}_yp_0}{{}_xp_0} \mu_x dy = \frac{1}{\nu^x {}_xp_0} \int_0^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{A}_x\right)_x' \\
= & \left(\frac{1}{\nu^x \underbrace{{}_xp_0}_{s(x)}}\right)' \cdot \int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy + \frac{1}{\nu^x {}_xp_0} \left(\int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy\right)_x' \\
= & \int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy \cdot \left(\nu^{-x} (s(x))^{-1}\right)_x' + \frac{1}{\nu^x {}_xp_0} \cdot (-\nu^x {}_xp_0 \mu_x) \\
= & \int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy \cdot \left(\nu^{-x} \ln \nu (-1) \left(s(x)\right)^{-1} + \nu^{-x} \left(-s(x)\right)^{-2} s'(x)\right) - \mu_x \\
= & \int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy \left(\frac{\delta}{\nu^x {}_xp_0} - \frac{1}{\nu^x {}_xp_0} \cdot \overbrace{\left(\frac{s'(x)}{s(x)}\right)}^{-\mu_x}\right) - \mu_x \\
= & \frac{\delta + \mu_x}{\nu^x {}_xp_0} \int\limits_x^{\infty} \nu^y {}_yp_0 \mu_y dy - \mu_x = (\delta + \mu_x) \bar{A}_x - \mu_x.
\end{aligned}$$

Dabar tikimybinis teoremos 3.4.2 įrodymas.
Aišku, kad bet kuriam teigiamam h

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}(\nu^{T_x}) = \mathbb{E}(\nu^{T_x} | T_x < h) \cdot \mathbb{P}(T_x < h) + \mathbb{E}(\nu^{T_x} | T_x \geqslant h) \cdot \mathbb{P}(T_x \geqslant h).$$

Kadangi

$$\mathbb{P}(T_x < h) = {}_hq_x \ ,$$
$$\mathbb{P}(T_x \geqslant h) = {}_hp_x \ ,$$

tai

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}(\nu^{T_x} | T_x < h) \cdot {}_hq_x + \mathbb{E}(\nu^{T_x} | T_x \geqslant h) \cdot {}_hp_x.$$

Atsitiktinio dydžio T_x sąlyginis tankis su sąlyga, kad $T_x < h$ yra:

$$\begin{aligned}
f_{T_x<h}(t) &= \left(\mathbb{P}(T_x < t | T_x < h)\right)' \\
&= \left(\frac{\mathbb{P}(T_x < t, T_x < h)}{\mathbb{P}(T_x < h)}\right)' \\
&= \begin{cases} \left(\frac{\mathbb{P}(T_x<t)}{\mathbb{P}(T_x<h)}\right)'_x, & \text{kai} \quad 0 < t \leqslant h, \\ 0, & \text{kai} \quad t > h, \end{cases} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_x < t)}{{}_hq_x} \cdot \mathbb{I}_{(t \leqslant h)} \\
&= \frac{f_x(t)}{{}_hq_x} \cdot \mathbb{I}_{(t \leqslant h)} = \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hq_x} \mathbb{I}_{(t \leqslant h)} \ .
\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\mathbb{E}(\nu^{T_x} < h) = \int\limits_0^h \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hp_x} dt.$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\nu^{T_x} | T_x \geqslant h) &= \mathbb{E}(\nu^{T_x - h + h} | T_x - h \geqslant 0) = \nu^h \mathbb{E}(\nu^{T_x - h} | T_x - h \geqslant 0) \\
&= \nu^h \mathbb{E}(\nu^{T_{x+h}} | T_{x+h} \geqslant 0) = \nu^h \mathbb{E}(\nu^{T_{x+h}}) = \nu^h \bar{A}_{x+h}.
\end{aligned}$$

Gautas išraiškas sustatę į pradinę lygybę, gauname:

$$\bar{A}_x = {}_hq_x \int\limits_0^h \nu^t \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hq_x} dt + \nu^h \bar{A}_{x+h} \cdot {}_hp_x.$$

Todėl

$$\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x = \bar{A}_{x+h} - \nu^h \bar{A}_{x+h} \cdot {}_hp_x + \int\limits_0^h \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Arba

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \bar{A}_{x+h} \frac{1 - \nu^h {}_hp_x}{h} - \frac{1}{h} \int\limits_0^h \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Paskutinėje lygybėje perėję prie ribos, kai $h \to 0$, gauname:

$$(\bar{A}_x)'_x = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \lim_{h \to 0} \bar{A}_{x+h} \frac{1 - \nu^h {}_hp_x}{h} - \frac{1}{h} \int\limits_0^h \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Kadangi:

$$\lim_{h\to 0} \bar{A}_{x+h} = \bar{A}_x,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\nu^h{}_hp_x}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\nu^h{}_hp_x - \nu^0{}_0p_x}{h} = -(\nu^y{}_yp_x)'_{y=0}$$

$$= -\left(\nu^y \ln \nu_y p_x + \nu^y \left(\frac{s(x+y)}{s(x)}\right)'_y\right)_{y=0}$$

$$= -\left(\left(-\delta + \frac{s'(x+y)}{s(x)}\right)_{y=0}\right) = -\delta + \mu_x,$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h \nu^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\int_0^h \nu^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt - 0}{h}$$

$$= \left(\int_0^u \nu^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt\right)'_{u=0} = (\nu^u{}_up_x\mu_{x+u})_{h=0} = \mu_x,$$

tai pagaliau gauname:

$$(\bar{A}_x))'_x = \bar{A}_x \cdot (\delta + \mu_x) - \mu_x$$

$\triangle$

Nesunku pastebėti, kad 3.4.2 teoremos lygybė yra 3.4.1 teoremos lygybės tolydi versija.

IV. Gyvenimo anuitetai (rentos)

Draudėjui (x) apsidraudžiant savo gyvybę reikia draudikui sumokėti tam tikrą sumą. Be abejo šią sumą galima sumokėti iš karto, vienu mokėjimu. Tačiau tam tikroms draudimo rūšims vienkartinė grynoji premija yra gana didelė. Premija, už kurią draudikas suteikia draudimo paslaugas, siekdamas gauti pelną, dar didesnė. Todėl sudarydamas draudimo sutartį draudėjas (x) dažniausiai nemoka iš karto visos premijos, o įsipareigoja tam tikrais laikotarpiais mokėti tam tikras nedideles sumas už suteiktą paslaugą. Galimos metinės, mėnesinės, ketvirtinės ir kitokios įmokos. Draudėjas gali sutarti su draudiku mokėti įmokas periodo gale arba pradžioje. Mokėjimai gali būti mažėjantys, didėjantys, atidėti, terminuoti ir dar kažin kokie. Natūralu, kad visi mokėjimai vyksta, kol draudėjas (x) gyvas ir gali mokėti.

Gyvenimo anuitetas - tai mokėjimų srautas, kurį vykdo draudėjas (x) tol, kol gyvena.

Mokėjimų srautas gali būti nagrinėjamas ir fiksuoto ilgio laikotarpiui, pavyzdžiui, dešimčiai metų. Tokiu atveju draudėjas (x) moka įmokas per šį fiksuotą laikotarpį, pavyzdžiui, 10 metų, jeigu mokėjimo metu jis vis dar gyvas.

Pirmame skyriuje matėme, kad svarbiausias dydis, nusakantis mokėjimų srautą, yra būsimų įmokų dabartinė vertė. Kadangi draudėjas (x) moka įmokas tol, kol jis gyvas, tai būsimų įmokų dabartinė vertė yra atsitiktinis dydis. Šį atsitiktinį dydį paprastai žymime simboliu Y_x. Atsitiktinis dydis Y_x turi prasme tik tuo atveju, kai $X > x$. Esant fiksuotai sąlygai $X > x$, galime kalbėti apie būsimų įmokų dabartinės vertės vidurkį $\mathbb{E}Y_x$ ir dispersiją $\mathbb{D}Y_x$.

Šiame skyriuje įvairių rūšių gyvenimo anuitetams rasime atsitiktinio dydžio Y_x ir jo skaitinių charakteristikų, $\mathbb{E}Y_x$, $\mathbb{E}Y_x^2$, $\mathbb{D}Y_x$, išraiškas. Atsitiktinio dydžio Y_x vidurkis $\mathbb{E}Y_x$ aktuarinėje matematikoje paprastai vadinamas vadinamas ***aktuarine dabartine anuiteto verte***.

4.1 Paprasčiausias gyvenimo anuitetas

Paprasčiausias mokėjimų srautas – tai srautas susidedantis iš vieno mokėjimo. Sakykime suma lygi 1 sumokama po n metų, jei draudėjas (x) išgyvena n metų.

Šiuo atveju dabartinė būsimos įmokos vertė

$$Y_x = \begin{cases} 0 \ \ , \text{jei } T_x \leqslant n, \\ \nu^n, \text{jei } T_x > n, \end{cases} \quad = \ \nu^n \mathbb{I}_{(T_x > n)}.$$

Aktuarinė dabartinė būsimos įmokos vertė

$${}_nE_x := \mathbb{E}Y_x = \nu^n \mathbb{P}(T_x > n) = \nu^n {}_np_x.$$

Be to

$$\mathbb{E}Y_x^2 = \nu^{2n} {}_np_x,$$

ir

$$\mathbb{D}Y_x = \nu^{2n} {}_np_x - (\nu^n {}_np_x)^2.$$

Nesunku pastebėti (žiūrėkite 3.1.3 skyrelį), kad

$${}_nE_x = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = A_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n}|} \ .$$

Taigi vienas ir tas pats dydis žymimas dviem skirtingais simboliais. Dažniausiai, skaičiuojant anuitetų aktuarines vertes arba pensinių fondų įvairias charakteristikas vartojamas simbolis ${}_nE_x$, o skaičiuojant vienkartines grynąsias premijas naudojamas simbolis $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$. Primename, kad šis simbolis žymi grynąją premiją n metų grynąjam kaupimui.

Sakykime, pavyzdžiui, 25 metų Lietuvos respublikos pilietis pasižadėjo po 40 metų sumokėti 10000 Lt., jei tuo metu bus gyvas. Aišku, kad dabartinę tokios įmokos vertę, esant palūkanų normai $i = 0,06$, galime rasti iš lygybės

$$10000 \cdot {}_{40}E_{25} = 10000 \cdot \nu^{40} \cdot {}_{40}p_{25} = 10000 \cdot 0,09722219 \cdot \frac{\ell_{65}}{\ell_{25}}.$$

Pagal Lietuvos gyventojų mirtingumo lentelę

$$\ell_{65} = 66048 \ , \ell_{25} = 96590.$$

Vadinasi, dabartinė aprašytos įmokos vertė

$$10000 \cdot {}_{40}E_{25} \approx 664,8 \text{ Lt}.$$

1. Pastaba. Kadangi

$$\nu = \frac{1}{1+i}, \ {}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x},$$

tai dydžio ${}_nE_x$ iřaišką galime perrašyti taip:

$$ {}_nE_x = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}. $$

Iš čia

$$ \ell_x(1+i)^n {}_nE_x = \ell_{x+n}. $$

Gautoji formulė atskleidžia dydžio ${}_nE_x$ statistinę prasmę. Jei gyventojų grupė susidedanti iš ℓ_x narių investuos po sumą ${}_nE_x$, su palūkanų norma i, tai po n metų likusieji gyvi ℓ_{x+n} asmenys gaus po sumą lygią 1.

Pavyzdyje turejome:

$$ \begin{aligned} &\ell_x = \ell_{25} = 96590, \\ &(1+i)^n = (1+0,06)^{40} = 10,285718, \\ &\ell_{x+n} = \ell_{65} = 66048. \end{aligned} $$

Surašę į paskutinę lygtį šias skaitines reikšmes, gauname:

$$ 96590 \cdot {}_{40}E_{25} \cdot 10,285718 = 66048. $$

Iš čia, kaip jau matėme,

$$ {}_{40}E_{25} = 0,066480. $$

Taigi, 25 metų Lietuvos pilietis, norėdamas gauti 10000 Lt, sukakus 65–eriems, dabar turėtų investuoti 665 Lt. su palūkanų norma $i = 0.06$.

2. Pastaba. Bet kuriam fiksuotam n

$$ ({}_nE_x)'_x = {}_nE_x(\mu_x - \mu_{x+n}). $$

$\triangle$ Iš tiesų

$$ ({}_nE_x)'_x = \nu^n ({}_np_x)'_x. $$

Kadangi

$$ \begin{aligned} ({}_np_x)'_x &= \left(\frac{s(x+n)}{s(x)}\right)'_x = \frac{s'(x+n)s(x) - s(x+n)s'(x)}{s^2(x)} \\ &= \frac{s'(x+n)}{s(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+n)}{s(x)} \\ &= \frac{s'(x+n)}{s(x+n)} \cdot \frac{s(x+n)}{s(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+n)}{s(x)} \\ &= {}_np_x(\mu_x - \mu_{x+n}), \end{aligned} $$

tai

$$({}_nE_x)'_x = \nu^n {}_np_x(\mu_x - \mu_{x+n}) = {}_nE_x(\mu_x - \mu_{x+n}).$$

$\triangle$

Gautoji lygybė parodo dydžio ${}_nE_x$ elgesį priklausomai nuo x.

Jeigu μ_x didėja intervale $[x, x+n]$, tai ${}_nE_x$ mažėja didėjant x.

Jeigu μ_x nekinta intervale $[x, x+n]$, tai ${}_nE_x$ nekinta didėjant x.

Jei μ_x mažėja intervale $[x, x+n]$, tai ${}_nE_x$ didėja, didėjant x.

3. Pastaba. Į dydžio ${}_nE_x$ išraišką įeinantys nariai ν^n ir ${}_np_x$ turi prasmę visiems realiems neneigiamiems x ir n. Vadinasi, dydis ${}_nE_x$ irgi turi prasmę visiems neneigiamiems x ir n. Taigi, laiko tarpas n dydyje ${}_nE_x$ nebūtinai natūralusis skaičius.

4. Pastaba. Esant pastoviai palūkanų galiai, bet kuriam fiksuotam x

$$({}_nE_x)'_x = -{}_nE_x(\mu_{x+n} + \delta).$$

$\triangle$ Uřašytoji lygybė nesunkiai gaunama naudojantis II skyriuje pateiktomis išgyvenimo funkcijos ir mirtingumo galios savybėmis:

$$\begin{aligned}
({}_nE_x)'_x &= (\nu^n {}_np_x)'_n = \left(e^{-\delta n}\frac{s(x+n)}{s(x)}\right)'_n = \left(e^{-\delta n}e^{\ln\frac{s(x+n)}{s(x)}}\right)'_n \\
&= \left(e^{-\delta n}e^{-\int\limits_x^{x+n}\mu_y dy}\right)'_n = \left(e^{-\int\limits_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy}\right)'_n \\
&= e^{-\int\limits_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy}\cdot\left(-\int\limits_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy\right)'_n \\
&= {}_nE_x(-(\mu_{x+n}+\delta))\cdot(x+n)'_n \\
&= -{}_nE_x(\mu_{x+n}+\delta)
\end{aligned}$$

$\triangle$

Iš gautos lygybės išplaukia, kad ${}_nE_x$ mažėja didėjant laikotarpiui n.

4.2 Tolygūs gyvenimo anuitetai

Šiame skyriuje nagrinėsime tolygius draudėjo (x) mokėjimų srautus. Visais nagrinėjamais atvejais draudėjas moka pinigus tolygiai kol gyvas. Skyrelyje pateiksime būsimų mokėjimų dabartinės vertės Y_x išraiškas įvairiais atvejais, gausime formules dabartinės aktuarinės vertės $\mathbb{E}Y_x$ ir $\mathbb{D}Y_x$ skaičiavimams.

4.2.1 Viso gyvenimo tolygus anuitetas

Draudėjas (x) moka pinigus tolygiai. Per metus sumokama suma lygi 1. Mokėjimai vyksta, kol draudėjas gyvena.

Šiuo atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$Y_x = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - \nu^{T_x}}{\delta},$$

o aktuarinė dabartinė būsimų įmokų vertė

$$\bar{a}_x = \mathbb{E}Y_x = \mathbb{E}\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot f_x(t)dt = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt.$$

4.2.1. Teorema. *Esant pastoviai metinei palūkanų normai*

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x dt.$$

△ Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned} ({}_tp_x)'_t &= \left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)'_t = \frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{s'(x+t)}{s(x+t)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= -\mu_{x+t} \cdot {}_tp_x. \end{aligned}$$

Todėl

$${}_tp_x\mu_{x+t}dt = d(-{}_tp_x).$$

Antra vertus

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1 - \nu^t}{\delta} = \int_0^t \nu^s ds.$$

Vadinasi, integruodami dalimis gauname

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t \nu^s ds\right) d(-{}_tp_x) \\ &= \left(\int_0^t \nu^s ds\right) \cdot (-{}_tp_x)|_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x \cdot d\left(\int_0^t \nu^s ds\right) \\ &= 0 + \int_0^\infty {}_tp_x \nu^t dt = \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x dt. \end{aligned}$$

$\triangle$

Tarp dabartinės aktuarinės įmokų vertės $\bar{a}_x$ ir grynosios vienkartinės premijos draudimo iki gyvos galvos atveju $\bar{A}_x$ yra glaudus ryšys. Šį ryšį nusako toks tvirtinimas.

4.2.2 Teorema. *Esant pastoviai metinei palūkanų galiai*

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x.$$

Teoremos lygybę galima įrodyti analiziniu metodu. Įrašius vietoje dydžių a_x, A_x jų integralines išraiškas ir pritaikius integravimo dalimis formulę nesunkiai gaunamas užrašytas sąryšis. Mes įrodysime teoremos lygybę tikimybiniu metodu.

$\triangle$ Kadangi (žiūrėkite 1.13 skyrelį)

$$Y_x = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \int_0^{T_x} \nu^s ds = \frac{\nu^s}{\ln \nu}\Big|_0^{T_x} = \frac{1-\nu^{T_x}}{\delta},$$

tai pasinaudoję vidurkio savybėmis gauname

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \mathbb{E}Y_x = \mathbb{E}\left(\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\mathbb{E}(1-\nu^{T_x}) \\ &= \frac{1}{\delta}(1-\mathbb{E}\nu^{T_x}) = \frac{1}{\delta}(1-\bar{A}_x), \end{aligned}$$

nes (žiūrėkite 3.1.2 skyrelį)

$$\mathbb{E}\nu^{T_x} = \bar{A}_x.$$

$\triangle$

Formulė $1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$ reiškia, kad 1 investuotas dabar lygus tolygiai mokamos, kol (x) gyvas, metinės palūkanų galios ir vienetinės išmokos, draudėjui (x) mirus, dabartinės vertės sumai.

4.2.3 Teorema. *Viso gyvenimo tolydaus anuiteto atveju, esant pastoviai metinei palūkanų galiai,*

$$\mathbb{D}Y_x = \frac{1}{\delta^2}({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2).$$

$\triangle$ Kadangi

$$Y_x = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1-\nu^{T_x}}{\delta},$$

tai, pasinaudoję dispersijos savybėmis, gauname

$$\begin{aligned} \mathbb{D}Y_x &= \mathbb{D}\left(\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}(1-\nu^{T_x}) = \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}(\nu^{T_x}) \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right), \end{aligned}$$

nes (žiūrėkite 3.1.2 skyrelį)

$$\mathbb{D}\left(\nu^{T_x}\right) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

$\triangle$

Uždavinys Sakykime draudėjo (x) gyvenimą valdo pastovi mirtingumo galia $\mu = 0,04$, o draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0,06$. Draudikas moka įmokas tolygiai po 1 per metus iki gyvos galvos. Tegul Y_x draudėjo mokamų įmokų dabartinė vertė. Rasime $\bar{a}_x$, $\sigma(Y_x)$ ir $\mathbb{P}(Y_x > \bar{a}_x)$.

$\triangle$ Pasinaudoję 4.2.1 teoremos formule, gauname

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{s(x+t)}{s(x)}dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{\exp\left\{-\int_0^{x+t}\mu_s ds\right\}}{\exp\left\{-\int_0^{x}\mu_s ds\right\}}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t}dt = \int_0^\infty e^{-0.09827t}dt = \\ &= \left.\frac{e^{-0.09827t}}{-0.09827}\right|_0^\infty = 10.1762. \end{aligned}$$

Pagal 3.1.2 skyrelyje gautas formules

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \mathbb{E}\nu^{T_x} = \mathbb{E}e^{-\delta T_x} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt \\ &= \mu\int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t}dt = \mu\cdot 10.1762 = 0.407048, \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}_x &= \mathbb{E}(\nu^{2T_x}) = \int_0^\infty e^{-2\delta t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-2\delta t}e^{-\mu t}\mu dt \\ &= \mu\int_0^\infty e^{-(2\delta+\mu)t}dt = \mu\cdot 6.38823 = 0.25553. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}Y_x &= \frac{1}{\delta^2}({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2) = \frac{1}{0.058269^2}(0.25553 - 0.4^2) \\
&= 26.46094, \\
\sigma(Y_x) &= \sqrt{\mathbb{E}Y_x} = 5.14402.
\end{aligned}$$

Pagaliau,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_x > \bar{a}_x) &= \mathbb{P}\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > 10.1762\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta} > 10.1762\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\nu^{T_x} > -0.40704\right) = \mathbb{P}\left(e^{-0.05827T_x} < 0.40704\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-0.05827T_x < \ln 0.40704\right) = \mathbb{P}\left(T_x > \frac{\ln 0.40704}{-0.05827}\right) \\
&= \mathbb{P}(T_x > 15.43) = \int\limits_{15.43}^{\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int\limits_{15.43}^{\infty} e^{-\mu t}\mu dt = -e^{\mu t}\Big|_{15.43}^{\infty} \\
&= -e^{-0.04\cdot 15.43} = 0.5395.
\end{aligned}$$

4.2.2 n metų tolygus gyvenimo anuitetas

Draudėjas (x) moka pinigus tolygiai n metų kol gyvas. Per metus sumokama suma lygi 1. Investicijų palūkanų norma pastovi ir lygi i.

Aprašytu atveju dabartinė būsimų įmokų vertė

$$\begin{aligned}
Y_x &= \bar{a}_{\overline{T_x}|}\mathbb{I}_{(T_x \leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x > n)} \\
&= \frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x \leqslant n)} + \frac{1-\nu^{n}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x > n)}.
\end{aligned}$$

Aktuarinė dabartinė įmokų vertė

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Y_x = \int\limits_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x.$$

4.2.4 Teorema. *Esant pastoviai palūkanų galiai*

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^\infty \nu^t {}_t p_x dx.$$

$\triangle$ Kadangi $d(-{}_t p_x) = {}_t p_x \mu_{x+t}$ (žiūrėkite 4.2.1 teoremos įrodymą), tai integruodami dalimis gauname

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int\limits_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x \\
&= \int\limits_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} d(-{}_t p_x) + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x \\
&= \bar{a}_{\overline{n}|}(-{}_n p_x)\Big|_0^n + \int\limits_0^n {}_t p_x d\bar{a}_{\overline{t}|} + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x \\
&= -\bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x + \bar{a}_{\overline{0}|} \cdot {}_0 p_x + \int\limits_0^n {}_t p_x d\bar{a}_{\overline{t}|} + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x \\
&= \int\limits_0^n {}_t p_x d\bar{a}_{\overline{t}|}.
\end{aligned}$$

Be to

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1-\nu^t}{\delta} = \int\limits_0^t \nu^s ds.$$

Vadinasi,

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^n {}_t p_x d\left(\int\limits_0^t \nu^s ds\right) = \int\limits_0^n \nu^t {}_t p_x dt.$$

$\triangle$

Esant n metų tolygiam mokejimų srautui dabartinės būsimų įmokų vertės dispersiją galime paskaičiuoti remiantis tokiu tvirtinimu.

4.2.5 Teorema. *Esant pastoviai palūkanų galiai, n metų tolygaus anuiteto atveju*

$$\mathbb{D}Y_x = \frac{1}{\delta^2}\left({}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right).$$

△ Pasinaudoję dispersijos savybėmis, gauname

$$\begin{aligned}
\triangleright \quad \mathbb{D}Y_x &= \mathbb{D}\left(\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \frac{1-\nu^n}{\delta}\mathbb{I}(T_x > n)\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}\left((1-\nu^{T_x})\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + (1+\nu^n)\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}(\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \mathbb{I}_{(T_x>n)} - \nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}\left(1 - (\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)})\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\mathbb{D}(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}).
\end{aligned}$$

Antra vertus (žiūrėkite 3.1.4 skyrelį)

$$\mathbb{D}(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}) = \left({}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2\right).$$

Vadinasi, teoremos lygybė teisinga. △

Sekantis tvirtinimas nusako ryšį tarp dydžių $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ ir $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

4.2.5 Teorema. *Esant pastoviai palūkanų galiai*

$$1 = \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} \ .$$

△ Iš matematinio vidurkio savybių išplaukia, kad

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Y_x &= \mathbb{E}\left(\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \frac{1-\nu^n}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} - \nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \mathbb{I}_{(T_x>n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(1 - \left(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\left(1 - \mathbb{E}\left(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Telieka pasinaudoti 3.1.4 skyrelyje gauta lygybe

$$\mathbb{E}\left(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right) = \bar{A}_{x:\overline{n}|}.$$

Teoremos lygybė įrodyta. △

4.1.3 n-metų atidėtas viso gyvenimo tolygus anuitetas

Draudėjas (x) moka pinigus tolygiai iki gyvos galvos. Per metus sumokama suma lygi 1. Mokėjimai prasideda po n metų. Palūkanų norma pastovi ir metams lygi i.

Aprašytoje situacijoje dabartinė įmokų vertė

$$Y_x = \left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}\right)\mathbb{I}_{(T_x>n)} = \bar{a}_{\overline{T_x-n}|}\nu^n \mathbb{I}_{(T_x>n)}.$$

Dabartinė aktuarinė būsimų įmokų vertė

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= \int\limits_n^\infty a_{\overline{t-n}|}\nu^n {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int\limits_n^\infty \nu^n \frac{1-\nu^{t-n}}{\delta} d(-{}_tp_x) \\
&= \int\limits_n^\infty \left(\int\limits_n^t \nu^s ds\right) d(-{}_tp_x) = \underbrace{\left(\int\limits_n^t \nu^s ds\right)(-{}_tp_x)\Big|_n^\infty}_{=0} + \int\limits_n^\infty {}_tp_x d\left(\int\limits_n^t \nu^s ds\right) \\
&= \int\limits_n^\infty {}_tp_x \nu^t dt = \int\limits_n^\infty \nu^t {}_tp_x dt = \int\limits_0^\infty \nu^t {}_tp_x dt - \int\limits_0^n \nu^t {}_tp_x dt \\
&= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= \int\limits_n^\infty \nu^n \bar{a}_{\overline{t-n}|} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt \\
&= \nu^n \int\limits_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|} \cdot {}_{s+n}p_x \cdot \mu_{x+s+n} ds \\
&= \nu^n \int\limits_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|} \cdot {}_np_x \cdot {}_sp_{x+n} \cdot \mu_{x+n+s} ds \\
&= \nu^n {}_np_x \int\limits_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|} \cdot {}_sp_{x+n} \cdot \mu_{x+n+s} ds \\
&= {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n}.
\end{aligned}$$

Taigi

$${}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n}.$$

Pagaliau iš teoremų 4.2.2 ir 4.2.5 išplaukia, kad

$$ {}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} - \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}-\bar{A}_x}{\delta} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}-\bar{A}_x}{\delta}. $$

4.2.4 m-metų atidėtas n-metų tolygus anuitetas

Draudėjas pinigus moka tolygiai. Per metus sumokama suma lygi 1. Mokėjimai prasideda po m metų ir baigiasi, kai draudėjo amžius tampa $x+m+n$. Draudėjas moka, jei yra gyvas.

m-metų atidėto n-metų tolygaus anuiteto atveju dabartinė būsimų įmokų vertė

$$ Y_x = (\bar{a}_{\overline{T_x}|} - \bar{a}_{\overline{m}|})\mathbb{I}_{(m<T_x\leqslant m+n)} + (\bar{a}_{\overline{m+n}|} - \bar{a}_{\overline{m}|})\mathbb{I}_{(T_x>m+n)}, $$

o aktuarinė dabartinė būsimų mokėjimų vertė

$$ \begin{aligned} {}_{m|n}\bar{a}_x = \mathbb{E}Y_x = \int\limits_m^{m+n} \nu^t {}_tp_x dt = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|} \\ = \frac{1}{\delta}(\bar{A}_{x:\overline{m}|} - \bar{A}_{x:\overline{m+n}|}) = {}_mE_x \cdot \bar{a}_{x+m:\overline{n}|}. \end{aligned} $$

vspace1cm

4.2.5 Sukauptoji būsimų įmokų vertė

Determinuotų anuitetų atvėju šalia dabartinės įmokų vertės buvo nagrinėjama ir sukauptoji įmokų vertė $\bar{s}_{\overline{n}|}$. Gyvenimo anuitetų atvėju, kai mokėjimų laikotarpis fiksuotas, irgi galima kalbėti apie sukauptą įmokų vertę. Aišku, kad sukaupta įmokų vertė turi prasmę tik tada, kai (x) skaičiavimo momentu yra gyvas.

Panagrinėkime n-metų tolygų gyvenimo anuitetą. Sakykime, kad $\bar{S}_{x:\overline{n}|}$ yra sukauptoji įmokų vertė po n metų. Atsitiktinin dydis $\bar{S}_{x:\overline{n}|}$ yra ta suma, kurią turėtų draudėjas (x), jei būtų gyvas po n metų. Vadinasi,

$$ \bar{a}_{\overline{T_x}|}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x>n)} = \bar{S}_{x:\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\nu^n. $$

Dydis
$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\bar{S}_{x:\overline{n}|} | T_x > n)$$
vadinamas vidutine (sąlygine) sukaiptąja verte. Aišku, kad

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\mathbb{E}(\bar{S}_{x:\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x>n)})}{\mathbb{P}(T_x > n)} \\
&= \frac{1}{{}_np_x} \cdot \frac{1}{\nu^n} \cdot \mathbb{E}\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\mathbb{I}_{(T_x \leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right) \\
&= \frac{1}{{}_nE_x} \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}$$

4.3 Diskretūs gyvenimo anuitetai

Šiame skyriuje nagrinėsime diskrečius draudėjo (x) įmokų srautus. Įmokas draudėjas moka arba metų pradžioje, arba metų pabaigoje. Visais nagrinėjamais atvejais draudėjas eilinę įmoką sumoka, jeigu mokėjimo momentu yra gyvas. Skyrelyje pateiksime būsimų mokėjimų dabartinės vertės Y_x išraiškas įvairiais atvejais, gausime formules dabartinės aktuarinės vertės $\mathbb{E}Y_x$ ir atsitiktinio dydžio Y_x dispersijos $\mathbb{D}Y_x$ skaičiavimams.

4.3.1 Viso gyvenimo diskretus išankstinis anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pradžioje, kol (x) gyvas. Laikome, kad lėšos investuojamos su pastovia metine palūkanų norma i.

Aprašytoje situacijoje būsimų įmokų dabartinė vertė:
$$Y_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$$
čia, kaip ir anksčiau,
$$K_x = [T_x], \ \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{d}.$$
Kadangi
$$\mathbb{P}(K_x = k) = {}_{k|}q_x = {}_kp_x q_{x+k} \ ,$$

tai būsimų įmokų dabartinė aktuarinė vertė

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}Y_x = \mathbb{E}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k}p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) \\ &= \ddot{a}_{\overline{1}|}({}_0p_x - {}_1p_x) + \ddot{a}_{\overline{2}|}({}_1p_x - {}_2p_x) + \ddot{a}_{\overline{3}|}({}_2p_x - {}_3p_x) + ... \\ &= {}_0p_x \underbrace{\ddot{a}_{\overline{1}|}}_{1} + {}_1p_x(\underbrace{\ddot{a}_{\overline{2}|} - \ddot{a}_{\overline{1}|}}_{\nu}) + {}_2p_x(\underbrace{\ddot{a}_{\overline{3}|} - \ddot{a}_{\overline{2}|}}_{\nu^2}) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k{}_kp_x.\end{aligned}$$

Antra vertus, pagal 3.2.1 skyrelyje gautas formules

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \mathbb{E}\left(\frac{1-\nu^{K_x+1}}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d}\mathbb{E}\left(1-\nu^{K_x+1}\right) = \frac{1}{d}\left(1-\mathbb{E}\nu^{K_x+1}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(1-A_x\right).\end{aligned}$$

Taigi

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x.$$

Analogiškai galime rasti ir būsimų įmokų dabartinės vertės dispersiją. Būtent:

$$\mathbb{D}Y_x = \mathbb{D}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \mathbb{D}\left(\frac{1-\nu^{K_x+1}}{d}\right) = \frac{1}{d^2}\mathbb{D}\nu^{K_x+1} = \frac{1}{d^2}\left({}^2A_x - (A_x)^2\right) .$$

4.3.2 n-metų diskretus išankstinis gyvenimo anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pradžioje, jei (x) mokėjimo metu gyvas. Mokėjimai vyksta n metų.

Aprašytu atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$Y_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)},$$

o aktuarinė dabartinė būsimų įmokų vertė

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Y_x &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \overbrace{{}_kp_x q_{x+k}}^{({}_kp_x - {}_{k+1}p_x)} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x \\
&= \ddot{a}_{\overline{1}|}({}_0p_x - {}_1p_x) + \ddot{a}_{\overline{2}|}({}_1p_x - {}_2p_x) + \ldots + \ddot{a}_{\overline{n}|}{}_np_x) \\
&= {}_0p_x \underbrace{\ddot{a}_{\overline{1}|}}_{1} + {}_1p_x \underbrace{(\ddot{a}_{\overline{2}|} - \ddot{a}_{\overline{1}|})}_{\nu} + {}_2p_x \underbrace{(\ddot{a}_{\overline{3}|} - \ddot{a}_{\overline{2}|})}_{\nu^2} + \ldots - \underbrace{\ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x}_{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k {}_kp_x.
\end{aligned}
$$

Antra vertus iš 3.2.2 skyrelyje gautų formulių nesunku gauti, kad

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}Y_x &= \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1-\nu^{K_x+1}}{d}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \frac{1-\nu^n}{d}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&= \frac{1}{d}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{(K_x<n)} - \nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)} - \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}) \\
&= \frac{1}{d}\left(1 - \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)})\right) \\
&= \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}|}).
\end{aligned}
$$

Vadinasi,

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}.$$

Naudojantis dispersijos savybėmis ir jau minėto 3.2.2 skyrelio formulėmis, galime gauti atsitiktinio dydžio Y_x dispersijos išraišką vienkartinėmis grynosiomis premijomis:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}Y_x &= \mathbb{D}\left(\frac{1-(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)})}{d}\right) \\
&= \frac{1}{d^2}\mathbb{D}\left(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&= \frac{1}{d^2}\left({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2\right).
\end{aligned}
$$

Pagaliau, n metų išankstiniam anuitetui galima suskaičiuoti ir vidutinę sukauptąją įmokų vertę. Sakykime atsitiktinis dydis ($\ddot{S}_{x:\overline{n}|}$) yra sukauptoji įmokų vertė. Tada

$$\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)} = \ddot{S}_{x:\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\nu^n.$$

Vadinasi,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\ddot{S}_{x:\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x \geqslant n)}\nu^n).$$

Todėl

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}(\ddot{S}_{x:\overline{n}|} | K_x \geqslant n) = \frac{\mathbb{E}(S_{x:\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x \geqslant n)})}{\mathbb{P}(K_x \geqslant n)} \\ &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\nu^n {}_n p_x} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_n E_x}.\end{aligned}$$

4.3.3 n-metų atidėtas diskretus išankstinis viso gyvenimo anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pradžioje, kol draudėjas (x) gyvas. Mokėti pradedama po n metų ir mokama iki gyvos galvos.

Šiuo atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$Y_x = (\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})\mathbb{I}_{(K_x \geqslant n)},$$

o aktuarinė dabartinė būsimų įmokų vertė

$$\begin{aligned}{}_{n|}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}Y_x = \mathbb{E}\left((\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})\mathbb{I}_{(K_x \geqslant n)}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}(\ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})\ \underbrace{{}_k p_x q_{x+l}}_{{}_k p_x - {}_{k+1}p_x} \\ &= (\ddot{a}_{\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})({}_n p_x - {}_{n+1}p_x) + (\ddot{a}_{\overline{n+2}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})({}_{n+1}p_x - {}_{n+2}p_x) + ... \\ &= {}_n p_x \underbrace{(\ddot{a}_{\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})}_{\nu^n} + {}_{n+1}p_x \underbrace{(\ddot{a}_{\overline{n+2}|} - \ddot{a}_{\overline{n+1}|})}_{\nu^{n+1}} + ... \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} {}_k p_x \nu^k = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k {}_k p_x - \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k {}_k p_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ .\end{aligned}$$

Antra vertus

$$\begin{aligned}{}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=n}^{\infty} \nu^k {}_k p_x = \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{n+j} {}_{n+j}p_x \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{n+j} \cdot {}_n p_x \cdot {}_j p_{x+n} = {}_n p_x \nu^n \sum_{j=0}^{\infty} \nu^j {}_j p_{x+n} \\ &= {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n}.\end{aligned}$$

Be to,

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} \nu^k {}_kp_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n} = \frac{1}{d}(A_{x:\overline{n}|} - A_x). $$

4.3.4 Viso gyvenimo diskretus vėluojantis anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pabaigoje, jei draudėjas (x) mokėjimo metu gyvas. Laikome, kad lėšos investuojamos su pastovia metine palūkanų norma i.

Šiuo atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$ Y_x = a_{\overline{K_x}|} = \frac{1-\nu^{K_x}}{i}. $$

Aktuarinė dabartinė aprašyto įmokų srauto vertė

$$ \begin{aligned} a_x &= \mathbb{E}Y_x = \mathbb{E}a_{\overline{K_x}|} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k}|} \cdot \overbrace{{}_kp_x q_{x+k}}^{{}_kp_x - {}_{k+1}p_x} \\ &= a_{\overline{0}|}({}_0p_x - {}_1p_x) + a_{\overline{1}|}({}_1p_x - {}_2p_x) + ... \\ &= \underbrace{{}_0p_x \cdot a_{\overline{0}|}}_{0} + {}_1p_x \underbrace{(a_{\overline{1}|} - a_{\overline{0}|})}_{\nu} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k {}_kp_x - 1 = \ddot{a}_x - 1\ . \end{aligned} $$

Antra vertus, pagal 3.2.1 skyrelio formules,

$$ \begin{aligned} a_x &= \mathbb{E}a_{\overline{K_x}|} = \mathbb{E}\left(\frac{1-\nu^{K_x}}{i}\right) = \frac{1}{i}\mathbb{E}\left(1 - \nu^{K_x+1} \cdot \frac{1}{\nu}\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{\nu}\mathbb{E}\nu^{K_x+1}\right) = \frac{1}{i}\left(1 - (1+i)A_x\right). \end{aligned} $$

Vadinasi,

$$ 1 = i \cdot a_x + (1+i)A_x. $$

4.3.5 n-metų diskretus vėluojantis gyvenimo anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pabaigoje, jei draudėjas (x) gyvas. Mokėjimai vyksta daugiausiai n metų.

Šiuo atveju atsitiktinis dydis

$$Y_x = a_{\overline{K_x}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + a_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}.$$

Vadinasi, būsimų įmokų dabartinė aktuarinė vertė

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}(a_{\overline{K_x}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + a_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|} \underbrace{{}_kp_x q_{x+k}}_{{}_kp_x - {}_{k+1}p_x} + a_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \ldots = \sum_{k=1}^{n} \nu^k\,{}_kp_x. \end{aligned}$$

Arba

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k\,{}_kp_x - 1 + \nu^n\,{}_np_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x.$$

4.3.6 n-metų atidėtas diskretus vėluojantis gyvenimo anuitetas

Suma, lygi 1, mokama kiekvienų metų pabaigoje, jei draudėjas (x) gyvas. Mokėjimai prasideda po n metų. Šiuo atveju:

$$\begin{aligned} Y_x &= (a_{\overline{K_x}|} - a_{\overline{n}|})\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}, \\ {}_{n|}a_x &= \mathbb{E}Y_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu^k\,{}_kp_x = a_x - a_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x a_{x+n}. \end{aligned}$$

4.3.7 Papildomos formulės

Šiame trumpame skyrelyje be įrodymo pateiksime dar keletą formulių, siejančių dydžius $A, \ddot{a}$ ir a. Būtent, bet kokiems x ir n teisingos lygybės:

$$\begin{aligned} A_x &= \nu\ddot{a}_x - a_x\ , \\ A^1_{x:\overline{n}|} &= \nu\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}\ , \\ A_{x:\overline{n}|} &= \nu\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}\ . \end{aligned}$$

4.4 Gyvenimo anuitetai mokami dažnumu m

Šiame skyriuje vėlgi nagrinėsime diskrečius draudėjo (x) įmokų srautus. Metai dalijami į m lygių dalių. Įmokas draudėjas moka arba gautų laikotarpių pradžioje, arba šių laikotarpių pabaigoje. Visais nagrinėjamais atvejais draudėjas eilinę įmoką sumoka, jeigu mokėjimo momentu yra gyvas. Kaip ir ankstesniuose skyreliuose, pateiksime būsimų mokėjimų dabartinės vertės Y_x išraiškas, gausime formules dabartinės aktuarinės vertės $\mathbb{E}Y_x$ skaičiavimui. Atsitiktinio dydžio Y_x dispersiją $\mathbb{D}Y_x$ nagrinėsime tik paprasčiausiu atveju.

4.4.1 Viso gyvenimo diskretus išankstinis anuitetas mokamas dažnumu m

Metai dalijami į m lygių dalių. Suma lygi $\frac{1}{m}$ mokama kiekvieno gauto periodo pradžioje tol, kol draudėjas (x) gyvas. Laikome, kad lėšos investuojamos su pastovia metine palūkanų norma i.

Aprašytoje situacijoje būsimų įmokų dabartinė vertė

$$Y_x = \begin{cases} \frac{1}{m}, & T_x < \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{m}(1+\nu^{\frac{1}{m}}), & T_x \in [\frac{1}{m}; \frac{2}{m}), \\ \frac{1}{m}(1+\nu^{\frac{1}{m}}+\nu^{\frac{2}{m}}), & T_x \in [\frac{2}{m}; \frac{3}{m}), \\ \ldots \\ \frac{1}{m}(1+\nu^{\frac{1}{m}}+\ldots+\nu^{\frac{h}{m}}), & T_x \in [\frac{h}{m}; \frac{h+1}{m}). \end{cases}$$

Kadangi

$$h \leqslant T_x \cdot m < h+1 \Leftrightarrow h = [T_x \cdot m],$$

tai

$$Y_x = \frac{1}{m}\left(1+\nu^{\frac{1}{m}}+\nu^{\frac{2}{m}}+\ldots+\nu^{\frac{[mT_x]}{m}}\right) = \frac{\nu^{\frac{[T_x m]}{m}}-1}{m(\nu^{\frac{1}{m}}-1)}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{h}{m} \leqslant T_x < \frac{h+1}{m}\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(T_x < \frac{h+1}{m}\right) - \mathbb{P}\left(T_x < \frac{h}{m}\right) \\ = \; & {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x \ , \end{aligned}$$

tai aktuarinė būsimų įmokų dabartinė vertė

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m} \left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{h}{m}}\right) \left({}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x\right) \\
&= \frac{1}{m} \Big[\left({}_0p_x - {}_{\frac{1}{m}}p_x\right) + \left(1 + \nu^{\frac{1}{m}}\right) \left({}_{\frac{1}{m}}p_x - {}_{\frac{2}{m}}p_x\right) \\
&+ \left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}}\right) \left({}_{\frac{2}{m}}p_x - {}_{\frac{3}{m}}p_x\right) + \ldots\Big] \\
&= \frac{1}{m} \left({}_0p_x + {}_{\frac{1}{m}}p_x \nu^{\frac{1}{m}} + {}_{\frac{2}{m}}p_x \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} \nu^{\frac{h}{m}} {}_{\frac{h}{m}}p_x.
\end{aligned}$$

Apibrėžę

$$A_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{\infty} \nu^{\frac{h+1}{m}} \cdot \underbrace{{}_{\frac{h}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{h}{m}}}_{\mathbb{P}(\frac{h}{m} \leqslant T_x < \frac{h+1}{m})} = \mathbb{E}\left(\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}}\right),$$

ir pasinaudoję 1.12 skyrelio formulėmis gauname, kad

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m} \left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{h}{m}}\right) \mathbb{P}\left(\frac{h}{m} \leqslant T_x < \frac{h+1}{m}\right) \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m} \left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{h}{m}}\right) \mathbb{P}\left([T_x m] = h\right) \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\nu^{\frac{h+1}{m}} - 1}{\nu^{\frac{1}{m}} - 1} \mathbb{P}\left([T_x m] = h\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\nu^{\frac{[T_x x]+1}{m}} - 1}{m(\nu^{\frac{1}{m}} - 1)}\right) \\
&= \frac{1}{m\left(1 - \nu^{\frac{1}{m}}\right)} \left(1 - \mathbb{E}\left(\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}}\right)\right) = \frac{1}{m\left(1 - \nu^{\frac{1}{m}}\right)} \left(1 - A_x^{(m)}\right) \\
&= \frac{1}{m d_*^{(m)}} \left(1 - A_x^{(m)}\right) = \frac{1}{d^{(m)}} \left(1 - A_x^{(m)}\right).
\end{aligned}$$

Taigi

$$d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} = 1.$$

Čia $d^{(m)}$ - nominali diskonto norma laikotarpiui $\frac{1}{m}$, o dydis

$$A_x^{(m)} = \mathbb{E}(\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}})$$

yra vienkartinė grynoji premija draudimui iki gyvos galvos, esant tokioms sąlygoms: metai dalijami į m lygių dalių, suma lygi 1 išmokama periodo, kuriame mirė draudėjas, gale.

Aprašytu atveju galima nesunkiai surasti ir būsimų įmokų dabartinės vertės dispersiją. Būtent:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}Y_x = \mathbb{D}\left(\frac{\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}}-1}{m(\nu^{\frac{1}{m}}-1)}\right) &= \frac{1}{m^2\left(1-\nu^{\frac{1}{m}}\right)^2}\mathbb{D}\left(\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}}\right)\\ &= \frac{1}{(d^{(m)})^2}\left({}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2\right).\end{aligned}$$

4.4.1 Teorema. *Jeigu išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina sąlygą*

$$s(x+t) = (1-t)\cdot s(x) + t\cdot s(x+1),\ \ x \in \mathbb{N}\cup 0,\ \ t\in[0;1],$$

tai $\ddot{a}_x^{(m)}$ galime išreikšti dydžiu $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m),$$

kur

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}},$$

$$\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

$\triangle$ 4.3.1 skyrelyje buvo parodyta, kad

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x.$$

Šiame skyrelyje įrodėme, kad

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}.$$

Vadinasi,

$$d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}.$$

Iš čia

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}(A_x^{(m)} - A_x)$$

Kadangi išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina prielaidą "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai, pasinaudoję keliomis išraiškomis iš pirmo ir trečio skyrių, gauname:

$$
\begin{aligned}
A_x^{(m)} &= \mathbb{E}\left(\nu^{\frac{[T_x m]+1}{m}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{\frac{k+1}{m}} \cdot {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{\frac{k+1}{m}} \cdot {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{1+\frac{k+1}{m}} \cdot {}_{1+\frac{k}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+1+\frac{c}{m}} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{2+\frac{k+1}{m}} \cdot {}_{2+\frac{k}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+2+\frac{k}{m}} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{s(x+\frac{k}{m}) - s(x+\frac{k+1}{m})}{s(x)} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{1+\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{s(x+1+\frac{k}{m}) - s(x+1+\frac{k+1}{m})}{s(x)} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{2+\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{s(x+2+\frac{k}{m}) - s(x+2+\frac{k+1}{m})}{s(x)} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{1+\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{s(x+1) - s(x+2)}{s(x)} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{2+\frac{k+1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{s(x+2) - s(x+3)}{s(x)} + \ldots \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{\frac{k+1}{m}} \overbrace{\left({}_0p_x q_x + \nu {}_1p_x q_{x+1} + \nu^2 {}_2p_x q_{x+2} + \ldots\right)}^{\frac{A_x}{\nu}} \\
&= \frac{A_x}{\nu \cdot m} \sum_{k=0}^{m-1} \nu^{\frac{k+1}{m}} = \frac{A_x}{\nu \cdot m} \cdot \frac{\nu^{\frac{1}{m}}\left((\nu^{\frac{1}{m}})^m - 1\right)}{\nu^{\frac{1}{m}} - 1} \\
&= \frac{A_x(1+i)}{m} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i} - 1\right)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)} \\
&= \frac{A_x}{m} \cdot \frac{i}{\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.
\end{aligned}
$$

Taigi

$$
\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}} \left(\frac{i}{i^{(m)}} - 1\right) A_x.
$$

Dar kartą pasinaudoję formule

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x,$$

pagaliau gauname

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}\left(\frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}}\right)(1 - d\ddot{a}_x) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

Teoremos lygybė įrodyta. △

4.4.2 n metų diskretus išankstinis gyvenimo anuitetas mokamas dažnumu m

Metai dalijami į m lygių dalių. Suma lygi $\frac{1}{m}$ mokama kiekvieno gauto periodo pradžioje n metų. Mokėjimai vyksta tol kol draudėjas (x) gyvas. Lėšos investuojamos su pastovia metine palūkanų norma i. Šiuo atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$\begin{aligned} Y_x = &\frac{1}{m}\left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{[T_x m]}{m}}\right)\mathbb{I}_{([T_x m] < nm)} \\ &+ \frac{1}{m}\left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{[mn-1]}{m}}\right)\mathbb{I}_{([T_x m] \geqslant nm)} \end{aligned}$$

Analogiškai kaip ir praeitame skyrelyje, galime gauti kelias aktuarinės dabartinės būsimų mokėjimų vertės išraiškas:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \mathbb{E}Y_x = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1} \nu^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)}.$$

Jeigu išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina prielaidą "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai galima įrodyti, kad

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x),$$

čia $\alpha(m)$ ir $\beta(m)$ koeficijentai, apibrėžti 4.4.6 teoremoje.

4.4.3 n metų atidėtas diskretus išankstinis gyvenimo anuitetas mokamas dažnumu m

Metai dalijami į m lygių dalių. Suma lygi $\frac{1}{m}$ mokama kiekvieno gauto periodo pradžioje. Mokėjimai prasideda po n metų ir tęsiasi tol kol draudėjas gyvas. Metinė palūkanų norma i.

Šiuo atveju būsimų įmokų dabartinė vertė

$$Y_x = \frac{\nu^n}{m}\left(1 + \nu^{\frac{1}{m}} + \nu^{\frac{2}{m}} + \ldots + \nu^{\frac{[T_x m]}{m}}\right)\mathbb{I}_{(T_x \geqslant n)}.$$

Po tam tikrų paskaičiavimų galime gauti, kad aktuarinė dabartinė būsimų įmokų vertė

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=nm}^{\infty} \nu^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x,$$

o kai išgyvenimo funkcija $s(x)$ tenkina prielaidą "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai" , tai

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)_n E_x.$$

4.4.3 Diskretūs vėluojantys gyvenimo anuitetai mokami dažnumu m

Analogiškai diskretiems išankstiniams gyvenimo anuitetams apibrėžiami ir vėluojantys gyvenimo anuitetai. Vėluojantys gyvenimo anuitetai skiriasi nuo išankstinių tik tuo, kad suma lygi $\frac{1}{m}$ yra mokama ne periodo pradžioje, o gale. Analogiškai nustatomos ir būsimų įmokų vertės ir aktuarinės dabartinės vertės. Po tam tikrų skaičiavimų galime gauti:

viso gyvenimo m dažnumu mokamam vėluojančiam anuitetui

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} \nu^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m},$$

n metų m dažnumu mokamam vėluojančiam gyvenimo anuitetui

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} \nu^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x = \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} - \frac{1}{m} + \frac{{}_nE_x}{m},$$

n metų atidėtam m dažnumu mokamam vėluojančiam anuitetui

$$ {}_{n|}a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=nm+1}^{\infty} \nu^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x = {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} - \frac{{}_nE_x}{m}. $$

V. Periodinės premijos

5.1 Ekvivalentumo principas

Trečiame skyriuje nagrinėjome kiek reikia mokėti draudėjui (x) už vieną ar kitą draudimo paslaugą, kai už paslaugą mokama iš karto. Išmokome rasti vienkartines premijas įvairių draudimo rūšių atveju. Ieškodami tų premijų taikėme vadinamąjį ekvivalentumo principą. Aptarsime šį principą plačiau.

Apdrausdamas draudėją (x) draudikas patiria nuostolius

$$L_x = Z_x - P,$$

čia Z_x - būsimos išmokos dabartinė vertė, o P draudėjo (x) mokama premija. Taigi draudiko nuostoliai L_x yra atsitiktinis dydis. Pareikalavus

$$\mathbb{E}L_x = 0,$$

gauname, kad

$$P = \mathbb{E}Z_x.$$

Pavyzdžiui, draudimo iki gyvos galvos atveju,

$$P = \mathbb{E}Z_x = \bar{A}_x = \int_0^{\infty} \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t}.dt$$

Reikalavimas $\mathbb{E}L_x = 0$ paprastai yra vadinamas ***ekvivalentumo principu***. Šis reikalavimas reiškia, kad draudiko vidutiniai nuostoliai sutarties sudarymo momentu lygūs nuliui.

Kitas dažnai praktikoje taikomas premijos nustatymo principas yra vidutinio kvadratinio nuokrypio arba centrinės ribinės teoremos principas. Aptarsime plačiau ir šį principą. Sakykime, draudikas draudžia $N, N \geqslant 100$, draudėjų (x). Tada visų draudėjų draudikui padarytas nuostolis

$$S_N = L_{x_1} + L_{x_2} + \ldots + L_{x_N} = Z_{x_1} + \ldots + Z_{x_N} - NP.$$

Reikalavimas

$$\mathbb{P}(S_N > 0) < \delta,$$

čia δ mažas teigiamas skaičius, vadinamas ***vidutinio kvadratinio nuokrypio principu arba centrinės ribinės teoremos principu.***

Iš užrašytos nelygybės išplaukia:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} Z_{x_i} - NP > 0\right) < \delta,\\
&\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} Z_{x_i} < NP\right) \geqslant 1-\delta,\\
&\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_{x_i} - N\mathbb{E}Z_x}{\sqrt{N\mathbb{D}Z_x}} < \frac{NP - N\mathbb{E}Z_x}{\sqrt{N\mathbb{D}Z_x}}\right) \geqslant 1-\delta.
\end{aligned}$$

Pritaikę centrinę ribinę teoremą, iš paskutinio įverčio gauname apytikrę nelygybę

$$\frac{NP - N\mathbb{E}Z_x}{\sqrt{N\mathbb{D}Z_x}} \geqslant \varphi_{1-\delta},$$

kur $\varphi_{1-\delta}$ yra standartinio normalaus skirstinio $N(0,1)$ $1-\delta$ lygio kritinė reikšmė , t.y., $\varphi_{1-\delta}$ parenkamas taip, kad

$$\Phi(\varphi_{1-\delta}) = 1-\delta.$$

Čia, kaip visada tokiais atvejais,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du.$$

Vadinasi, vienkartinė premija P turi tenkinti nelygybę

$$P \geqslant \mathbb{E}Z_x + \frac{\varphi_{1-\delta}\sqrt{\mathbb{D}Z_x}}{\sqrt{N}} \; .$$

Pavyzdžiui, draudimo iki gyvos galvos atveju

$$P \geqslant \bar{A}_x - \frac{\varphi_{1-\delta}}{\sqrt{N}}\sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}.$$

Aktuarinėje matematikoje yra ir daugiau visuotinai priimtinų premijos sudarymo principų. Tačiau jų, bent jau kolkas, nenagrinėsime.

Draudėjas (x), drausdamas savo gyvybę, dažnai neturi reikiamos sumos pinigų sumokėti už paslaugą vienu kartu. Tokiu atveju draudėjas (x) pasižada mokėti už paslaugą tam tikras periodines įmokas. Draudėjo (x) periodinės įmokos už draudimo paslaugą vadinamos ***periodinėmis premijomis.*** Kaip ir vienkartinės premijos taip ir periodinės nustatomos naudojant tuos pačius principus. Galima naudoti įvairius (kartais gana keistus ir sudėtingus) premijų nustatymo būdus. Šiokią tokią premijų nustatymo būdų įvairovę galime pastebėti iš sekančio uždavinio.

5.1 Uždavinys: *Draudikas draudžia draudėją* (0), *kurio gyvenimą aprašo skirstinys*

$$ {}_{k|}q_0 = \frac{1}{4}, k = 0, 1, 2, 3. $$

Draudikas mokės sumą lygią vienetui draudėjo (0) *mirties metų pabaigoje. Draudėjas kiekvienų metų pradžioje įsipareigoja mokėti premiją* P*, jei tuo metu bus gyvas. Draudikas investuoja gautus pinigus su palūkanų norma* $i = 0,06$*. Rasime premijos* P *dydį taikydami tokias taisykles: (1) Premija* P *turi būti tokia, kad būsimi vidutiniai draudiko nuostoliai būtų lygūs nuliui. (2) Premija* P *turi būti lygi mažiausiai sumai, kurią sumokėjus draudiko nuostolio tikimybė būtų ne didesnė už* $\frac{1}{4}$*.*

$\triangle$ Pradžioje rasime norimą premiją taikydami pirmąją taisyklę. Aišku, kad ši pirmoji aprašyta taisyklė yra jau minėtas ekvivalentumo principas. Sakykime P_1 - premija, apskaičiuota pagal pirmąją taisyklę. Aišku, kad būsimos išmokos dabartinė vertė yra

$$ \nu^{K_0+1}, $$

o draudėjo būsimų įmokų dabartinė vertė

$$ P_1 \ddot{a}_{\overline{K_0+1|}} . $$

Vadinasi, draudiko nuostoliai sutarties sudarymo momentu

$$ L_0 = \nu^{K_0+1} - P_1 \ddot{a}_{\overline{K_0+1|}} . $$

Pagal pirmąją taisyklę

$$ \mathbb{E} L_0 = 0. $$

Todėl

$$ \mathbb{E}\left(\nu^{K_0+1} - P_1 \ddot{a}_{\overline{K_0+1|}}\right) = 0, $$

$$ \sum_{k=0}^{3} \left(\nu^{k+1} - P_1 \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) \cdot \mathbb{P}(K_0 = k) = 0. $$

Kadangi

$$ \mathbb{P}(K_0 = k) = {}_kp_0 \cdot {}_1q_k = {}_{k|}q_0 = \frac{1}{4}, k = 0, 1, 2, 3, $$

tai:

$$ \sum_{k=0}^{3} \left(\nu^{k+1} - P_1 \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = 0. $$

Be to

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} &= \sum_{k=0}^{3} \nu^{k+1} \\ &= 3,465105613, \\ \sum_{k=0}^{3} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} &= \ddot{a}_{\overline{1}|} + \ddot{a}_{\overline{2}|} + \ddot{a}_{\overline{3}|} + \ddot{a}_{\overline{4}|} \\ &= 1 + (1+\nu) + (1+\nu+\nu^2) + (1+\nu+\nu^2+\nu^3) \\ &= 9,449800842.\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$P_1 = 0,3667 \ .$$

$\triangle$

$\triangle$ Dabar paskaičiuosime periodinę premiją naudodami antrąją taisyklę. Sakykime P_2 yra ieškomoji premija.

P_2 turi būti mažiausia iš visų galimų premijų P kurioms:

$$\mathbb{P}(L_0 > 0) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Kitaip tariant, P_2 turi būti mažiausia iš visų P, kurioms

$$\mathbb{P}\left(\nu^{K_0+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_0+1}|} > 0\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Sudarome atsitiktinio dydžio $L_0 = \nu^{K_0+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_0+1}|}$ skirstinio lentelę.

K_0	L_0	$\mathbb{P}(L_0) = \mathbb{P}(K_0)$
0	$\nu - P\ddot{a}_{\overline{1}|}$	$\frac{1}{4}$
1	$\nu^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|}$	$\frac{1}{4}$
2	$\nu^3 - P\ddot{a}_{\overline{3}|}$	$\frac{1}{4}$
3	$\nu^4 - P\ddot{a}_{\overline{4}|}$	$\frac{1}{4}$

Kadangi $\nu^k - P\ddot{a}_{\overline{k}|}$ mažėja didėjant k, tai sąlyga $\mathbb{P}(L_0 > 0) \leqslant \frac{1}{4}$ bus patenkinta tik tada, kai

$$\nu - P\ddot{a}_{\overline{1}|} = 0,$$

arba

$$\nu^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0.$$

Pirmuoju atveju gauname

$$P = \frac{\nu}{\ddot{a}_{\overline{1}|}} = \frac{\nu}{1} = 0,94339226,$$

o antruoju atveju gauname

$$P = \frac{\nu^2}{\ddot{a}_{\overline{2}|}} = \frac{\nu^2}{1+\nu} = 0,45796.$$

Vadinasi,

$$P_2 = 0,45796.$$

$\triangle$

Iš pavyzdžio matome, kad ekvivalentumo principas gali būti lengvai taikomas ir periodinių premijų nustatyme. Šis principas išlieka toks pats: reikalaujama, kad $\mathbb{E}L_x = 0$, kur L_x yra būsimi draudiko nuostoliai sutarties sudarymo momentu. Periodinės premijos, gautos naudojant ekvivalentumo principą, vadinamos ***grynosiomis periodinėmi premijomis***. Toliau šiame skyriuje nagrinėsime grynąsias periodines premijas įvairioms draudimo rūšims, kai kurioms draudimo rūšims rasime būsimų draudiko nuostolių L_x dispersijos išraiškas.

5.2 Tolydžios grynosios metinės premijos

Pradžioje išnagrinėsime draudimo iki gyvos galvos atvejį. Sakykime, draudėjas (x) draudžia savo gyvybę iki gyvos galvos. Suma lygi 1 išmokama iš karto po draudėjo mirties. Sakykime, draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma i, o draudėjas (x) įmokas moka tolygiai kol gyvas. Tegul metinė draudimo įmoka lygi $\bar{P}$. Naudodami ekvivalentumo principą rasime $\bar{P}$ išraišką, apskaičiuosime draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją taip parinktai premijai $\bar{P}$.

$\triangle$ Aprašytoje situacijoje draudiko nuostolių dabartinė vertinė

$$L_x = \nu^{T_x} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T_x}|} \, .$$

Pagal ekvivalentumo principą $\mathbb{E}L_x = 0$. Todėl

$$\bar{P} = \frac{\mathbb{E}\nu^{T_x}}{\mathbb{E}\bar{a}_{\overline{T_x}|}} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \, .$$

Kadangi

$$\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1$$

(žiūrėkite teoremą 4.2.2), tai

$$\bar{P} = \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}.$$

Ieškomoji premija $\bar{P}$ turi specialų aktuarinį pažymėjimą $\bar{P}(\bar{A}_x)$. Taigi

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}.$$

Dabar rasime $\mathbb{D}(L_x)$ gautai metinei premijai $\bar{P}(\bar{A}_x)$.

Jei metinė tolygiai mokama premija yra $\bar{P}$, tai iš dispersijos savybių ir lygybių, įrodytų 1.3 ir 3.1 skyreliuose, gauname:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(L_x) = \mathbb{D}\left(\nu^{T_x} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) &= \mathbb{D}\left(\nu^{T_x} - \bar{P}\frac{1 - \nu^{T_x}}{\delta}\right) \\
= \mathbb{D}\left[\nu^{T_x}\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta} - \frac{\bar{P}}{\delta}\right)\right] &= \left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 \mathbb{D}\nu^{T_x} \\
= \left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right).
\end{aligned}$$

Jeigu $\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x)$, tai

$$\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 = \left(1 + \frac{\bar{A}_x}{\delta \bar{a}_x}\right)^2 = \left(1 + \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\delta \bar{a}_x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta \bar{a}_x}\right)^2.$$

Vadinasi, šiuo atveju

$$\mathbb{D}(L_x) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta \bar{a}_x)^2}.$$

$\triangle$

Rastas formules nesunku pritaikyti skaičiavimuose.

5.2 Uždavinys. *Draudėjo (x) gyvenimą valdo pastovus mirtingumas $\mu = \mu_{x+t} = 0,04$, o draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia palūkanų galia $\delta = 0,06$. Draudėjas draudžia savo gyvybę iki gyvos galvos, išmoka išmokama iš karto po mirties. Premiją $\bar{P}$ draudėjas moka tolygiai, kol gyvas. Raskite šią metinę premiją $\bar{P}$ ir draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją.*

$\triangle$ Pasinaudoję išvesta formule, gauname

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}.$$

Tačiau

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu ds}}{e^{-\int_0^x \mu ds}} \mu dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt = \mu \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t} dt \\
&= \frac{\mu}{\delta + \mu} = 0.4,
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \int_0^\infty \nu^t {}_tp_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt \\
&= \frac{1}{\delta + \mu} = 10.
\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x) = 0.04.$$

Antra vertus,

$$\mathbb{D}(L_x) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta \bar{a}_x)^2}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}
{}^2\bar{A}_x &= \int_0^\infty \mu^{2t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-2\delta t} e^{-\mu t} \mu dt \\
&= \frac{\mu}{2\delta + \mu} = 0.25,
\end{aligned}$$

tai

$$\mathbb{D}(L_x) = \frac{0.25 - 0.16}{(0.06 \cdot 10)^2} = 0.25.$$

$\triangle$

Analogiškai draudimo iki gyvos galvos atvejui galima apskaičiuoti tolygiai mokamas metines premijas kitoms draudimo rūšims. Po paskaičiavimų gauname tokią tolygių periodinių premijų lentelę.

Planas	Būsimos išmokos dabartinė vertė	Būsimų įmokų dabartinė vertė	Tolydžiai mokama grynoji metinė premija
Draudimas iki gyvos galvos	ν^{T_x}	$\bar{P}\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}$	$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$
n metų draudimas (išmoka iš karto po mirties)	$\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)}$	$\bar{P}\big(\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\big)$	$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n metų kaupiamasis draudimas	$\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}$	$\bar{P}\big(\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\big)$	$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}} = \frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}} = \frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}$
h metų mokamas viso gyvenimo anuitetas	ν^{T_x}	$\bar{P}\big(\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant h)} + \bar{a}_{\overline{h}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>h)}\big)$	$\bar{P} = {}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
n metų grynasis kaupimas	$\nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}$	$\bar{P}\big(\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\big)$	$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n metų atidėtas viso gyvenimo anuitetas	$\nu^n\bar{a}_{\overline{T_x-n}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>n)}$	$\bar{P}\big(\bar{a}_{\overline{T_x}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\big)$	$\bar{P} = \bar{P}({}_{n\mid}\bar{a}_x) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

Būsimų draudiko nuostolių dispersijos išraišką radome draudimo iki gyvos galvos atveju. Kitoms draudimo rūšims norima išraiška randama analogiškai. skyrelio pabaigoje rasime minėtos dispersijos išraišką terminuoto gyvybės draudimo atveju.

5.3 Uždavinys. *Raskite draudiko būsimų nuostolių dabartinės vertės L_x, esant n metų kaupiamajam draudimui, dispersijos išraišką. Draudikas, kaip visada, investuoja gautas lėšas su pastovia palūkanų norma i, o draudėjo metinės tolygiai mokama premija paskaičiuota pagal ekvivalentumo principą.*

$\triangle$ Iš lentelės matome, kad

$$L_x = \nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)} - \bar{P}(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \bar{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(T_x>n)}),$$

ir

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Pasinaudoję tolygaus anuiteto išraiška iš 1.13 skyrelio ir dispersijos savybėmis, gauname:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}L_x &= \mathbb{D}\left[\left(\nu^{T_x} - \bar{P}\frac{1-\nu^{T_x}}{\delta}\right)\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)}\right.\\
&\quad\left.+\left(\nu^n - \bar{P}\frac{1-\nu^n}{\delta}\right)\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right]\\
&= \mathbb{D}\left[\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)}\right.\\
&\quad\left.+\nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right]\\
&= \mathbb{D}\left[\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)\left(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right)\right]\\
&= \left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2\mathbb{D}\left(\nu^{T_x}\mathbb{I}_{(T_x\leqslant n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(T_x>n)}\right)\\
&= \left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2\left({}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2\right).
\end{aligned}$$

Pagal teoremą 4.2.6

$$1+\frac{\bar{P}}{\delta} = 1+\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}.$$

Vadinasi,

$$\mathbb{D}L_x = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}.$$

$\triangle$

5.3 Diskrečios grynosios metinės premijos

Pradžioje, analogiškai kaip 5.2 skyrelyje, išnagrinėsime draudimo iki gyvos galvos atvejį. Sakykime draudėjas (x) apdraudžia gyvybę iki gyvos galvos. Suma lygi 1 bus išmokama mirties metų pabaigoje. Sakykime draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma i, o draudėjas (x) įsipareigojo už draudimą įmokas P mokėti kiekvienų metų pradžioje, jei tuo metu bus gyvas. Naudodami ekvivalentumo principą rasime P išraišką. Rastai P reikšmei apskaičiuosime draudiko nuostolių dabartinės vertės L_x dispersiją.

$\triangle$ Aprašytoje situacijoje draudiko nuostolių dabartinė vertė

$$L_x = \nu^{K_x+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|},$$

čia, kaip visada, $K_x = [T_x]$.

Pagal ekvivalentumo principą

$$\mathbb{E}L_x = 0.$$

Vadinasi,

$$\mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) = P\mathbb{E}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}.$$

Iš 3.2 ir 4.3 skyreliuose gautų formulių

$$\mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) = A_x,\ \mathbb{E}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \ddot{a}_x.$$

Todėl metinė premija

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Dabar šiai premijos P išraiškai rasime draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją. Pasinaudoję dispersijos savybėmis, formulėmis išankstiniam anuitetui iš 1.10 skyrelio, $\mathbb{D}\nu^{K_x+1}$ išraiška iš 3.2.1 skyrelio ir 4.3.1 skyrelyje įrodyta formule

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x,$$

gauname:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}L_x &= \mathbb{D}\left(\nu^{K_x+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\right)\\ &= \mathbb{D}\left(\nu^{K_x+1} - P\frac{1-\nu^{K_x+1}}{d}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{D}\left[\nu^{K_x+1}\left(1+\frac{P}{d}\right)-\frac{P}{d}\right]\\
&= \left(1+\frac{P}{d}\right)^2 \mathbb{D}\nu^{K_x+1}\\
&= \left(1+\frac{P}{d}\right)^2 \left({}^2A_x-(A_x)^2\right)\\
&= \left(1+\frac{A_x}{d\ddot{a}_x}\right)^2 \left({}^2A_x-(A_x)^2\right)\\
&= \left(\frac{d\ddot{a}_x+A_x}{d\ddot{a}_x}\right)^2 \left({}^2A_x-(A_x)^2\right)\\
&= \left(\frac{1}{d\ddot{a}_x}\right)^2 \left({}^2A_x-(A_x)^2\right)\\
&= \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(1-A_x)^2}\ .
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Gautąsias formules nesunku pritaikyti praktiniams skaičiavimams

5.4 Uždavinys. *Sakykime draudėjo (x) gyvenimą valdo dėsnis:*

$$
{}_{k|}q_x = \frac{0,04}{0,96}(0,96)^{k+1} \qquad k = 0,1,2,\dots\ ,
$$

o draudikas investuoja gautas lėšas su palūkanų norma $i = 0,06$. Rasime metinę diskrečią premiją P viso gyvenimo draudimui ir draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją $\mathbb{D}L_x$, jeigu draudikas draudėjo (x) mirties metų gale išmoka sumą lygią 1.

$\triangle$ Gavome, kad

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x},\\
\mathbb{D}L_x &= \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}.
\end{aligned}
$$

Pagal 3.2.1 skyrelyje išvestą formulę

$$
A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}.
$$

Be to

$$
{}_{k|}q_x = {}_tp_xq_{x+k}.
$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{0,04}{0,96}\sum_{k=0}^{\infty}(1,06)^{-(k+1)}(0,96)^{k+1} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{48}{53}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{24}\cdot\frac{\frac{48}{53}}{1-\frac{48}{53}} = 0,4. \end{aligned}$$

Be to, pagal 4.3.1 skyrelyje įrodytą formulę,

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} = \frac{(1-A_x)}{i}(1+i) = 10,6.$$

Taigi

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0,0377.$$

Gautasis rezultatas rodo, kad norėdamas gauti 1 mirties metų gale, draudėjas turi mokėti po $0,0377$ kiekvienų metų pradžioje kol gyvas.

Antra vertus,

$$\begin{aligned} {}^2A_x &= \sum_{k=0}^{\infty}\nu^{2(k+1)}{}_kp_xq_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\nu^{2(k+1)}{}_{k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1,06)^{-2(k+1)}\frac{0,04}{0,96}(0,96)^{k+1} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{0,96}{(1,06)^2}\right)^{k+1} \\ &= 0,2445. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}L_x &= \frac{0,2445-(0,4)^2}{\left(\frac{0,06}{1,06}10,6\right)^2} \\ &= 0,2347. \end{aligned}$$

△

Analogiškai draudimui iki gyvos galvos galime išnagrinėti ir kitas draudimo rūšis, kai draudimo išmoka mokama mirties metų gale, o premijas draudikas moka kiekvienų metų pradžioje, jeigu tuo metu yra gyvas.

Atlikę panašius skaičiavimus, galime užpildyti tokią lentelę.

Planas	Būsimos išmokos dabartinė vertė	Būsimų įmokų dabartinė vertė	Metinės premijos išraiška
Viso gyvenimo draudimas	ν^{K_x+1}	$P\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}$	$P = P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ $= \frac{dA_x}{1-A_x} = \frac{1-d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$
n metų draudimas	$\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$	$P(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$ $+\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)})$	$P = P^1_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n metų kaupiamasis draudimas	$\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$ $+\nu^{n}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}$	$P(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$ $+\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)})$	$P = P_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$ $= \frac{dA_{x:\overline{n}\rceil}}{1-A_{x:\overline{n}\rceil}}$ $= \frac{1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
h metų mokamas draudimas iki gyvos galvos	ν^{K_x+1}	$P(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x<h)}$ $+\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant h)})$	$P = {}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
h metų mokamas n metų kaupiamasis draudimas	$\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$ $+\nu^{n}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}$	$P(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x<h)}$ $+\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant h)})$	$P = {}_hP_{x:\overline{n}\rceil}$ $= \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
n metų atidėtas viso gyvenimo anuitetas	$\nu^{n}\ddot{a}_{\overline{K_x+1-n}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}$	$P(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x<n)}$ $+\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)})$	$P = P({}_{n\rceil}\ddot{a}_x)$ $= \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

Ekvivalentumo principu rastai diskrečiai metinei premijai, spręsdami 5.3 uždavinį, radome draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją. Panašiai šią dispersiją galima rasti ir kitoms draudimo rūšims.

5.4 Uždavinys. *Draudėjas* (x) *draudžia savo gyvybę* n *metų laikotarpiui kaupiamuoju draudimu. Draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma* i*. Draudėjas* (x) *kiekvienų metų pradžioje įsipareigojo mokėti premiją* $P_{x:\overline{n}|}$*. Rasime draudiko būsimų nuostolių* L_x *dispersijos* $\mathbb{D}L_x$ *išraišką.*

△ Aprašytu atveju

$$\begin{aligned}
L_x &= \nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)} \\
&- P_{x:\overline{n}|}\left(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&= \left(1+\frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)\left(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&- \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\left(\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&= \left(1+\frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)\left(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}.
\end{aligned}$$

Pagal dispersijos savybes ir formules iš 3.2.2 skyrelio

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}L_x &= \left(1+\frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2\mathbb{D}\left(\nu^{K_x+1}\mathbb{I}_{(K_x<n)} + \nu^n\mathbb{I}_{(K_x\geqslant n)}\right) \\
&= \left(1+\frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2\left({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2\right) \\
&= \left(1+\frac{A_{x:\overline{n}|}}{d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)^2\left({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)^2\left({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2\right).
\end{aligned}$$

△

Aišku,kad nustatant diskrečias metines premijas gali būti taikomas ne tik ekvivalentumo principas. Tą nesunku pastebėti iš tokio uždavinio.

5.5 Uždavinys. 35 *metų draudėjas, Lietuvos respublikos pilietis, draudžiasi iki gyvos galvos* 10000 *Lt. sumai. Jam mirus išmoka bus išmokama mirties metų gale. Investicijų palūkanų norma* i *pastovi ir lygi* $0,06$*. Draudėjas įsipareigoja mokėti metinę premiją* π *kiekvienų metų pradžioje, jei yra gyvas. Pažymėkime* $L(\pi)$ *draudiko nuostolių vertę poliuso pasirašymo momentu.*

(1) Rasime metinę draudėjo premiją π_a *naudodami ekvivalentumo principą ir draudiko nuostolių dabartinės vertės dispersiją* $\mathbb{D}L(\pi_a)$ *premijai* π_a*.*

(2) Rasime premiją π_b iš sąlygos: π yra mažiausia, kuriai

$$P(L(\pi) > 0) < 0,5.$$

Apskaičiuosime $\mathbb{D}L(\pi_b)$ ir šiai premijai.

(3) Sakykime, susirinko šimtas 35 *metų draudėjų. Naudodami centrinę ribinę teoremą, rasime mažiausią metinę premiją π_c, kuriai esant draudiko nuostolių tikimybė būtų ne didesnė už 0,05.*

$\triangle$ Pradžioje rasime metinę premiją π_a. Pagal gautas formules

$$\pi_a = 10^4 \cdot P_{35} = 10^4 \frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}}.$$

Iš mirtingumo lentelės randame, kad:

$$A_{35} = 0,1287194, \ \ddot{a}_{35} = 15,39262.$$

Taigi,

$$\pi_a = 83,62 \text{ Lt}.$$

Be to

$$\mathbb{D}L(\pi_a) = (10000)^2 \frac{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}{(d\ddot{a}_{35})^2}.$$

Iš mirtingumo lentelės suradę

$${}^2A_{35} = 0,0348973,$$

pagaliau įsitikiname, kad

$$\mathbb{D}L(\pi_a) = 2412713,$$

arba

$$\sigma L(\pi_a) = 1553\text{Lt}.$$

$\triangle$

$\triangle$ Dabar rasime metinę premiją π_b. Sakykime, π yra kokia nors metinė premija. Tada

$$L(\pi) = 10000\nu^{K_{35}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{35}+1|}}.$$

Pagal nurodytą sąlygą turi būti:

$$\mathbb{P}\left(10^4\nu^{K_{35}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{35}+1|}} > 0\right) < 0,5.$$

Didėjant K_{35} draudiko nuostoliai mažėja. Iš mirtingumo lentelės turime:

$${}_{38}p_{35} = 0,53323, \ {}_{39}p_{35} = 0,50754, \ {}_{40}p_{35} = 0,480143$$

Vadinasi, parinkus π taip, kad

$$10^4\nu^{39} - \pi\ddot{a}_{39} = 0,$$

gausime

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(L(\pi) > 0\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(K_{35} < 39\right) = \mathbb{P}\left(K_{35} \leqslant 38\right) \\ = \; & 1 - \mathbb{P}\left(T_{35} \geqslant 39\right) = 1 - {}_{39}p_{35} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Taigi galime pasirinkti

$$\pi_b = \frac{10^4\nu^{39}}{\ddot{a}_{39}} = 53,4\text{Lt}.$$

Šiuo atveju

$$\begin{aligned} \mathbb{D}L(\pi_b) &= \mathbb{D}\left(10^4\nu^{K_{35}+1} - \pi_b\frac{1-\nu^{K_{35}+1}}{d}\right) \\ &= \mathbb{D}\left(\nu^{K_{35}+1}\left(10^4 + \frac{\pi_b}{d}\right)\right) \\ &= \left(10^4 + \frac{\pi_b}{d}\right)^2 \mathbb{D}\nu^{K_{35}+1} \\ &= \left(10^4 + \frac{\pi_b}{d}\right)^2 \left({}^2A_{35} - (A_{35})^2\right) \\ &= 2171630, \end{aligned}$$

arba

$$\sigma L(\pi_b) = 1474 \text{ Lt}.$$

△

△ Pagaliau rasime metinę premiją pagal trečią taisyklę π_c. Jeigu draudėjas (35) moka metinę premiją π, tai vienas poliusas draudikui atneša nuostolius

$$L(\pi) = 10000\nu^{K_{35}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{35}+1}|} = \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)\nu^{K_{35}+1} - \frac{\pi}{d}.$$

Aišku, kad $L(\pi)$ yra atsitiktinis dydis. Šio dydžio vidurkis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L(\pi) &= \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)\mathbb{E}\nu^{K_{35}+1} - \frac{\pi}{d} \\ &= A_{35}\left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right) - \frac{\pi}{d}, \end{aligned}$$

o dispersija

$$\begin{aligned}\mathbb{D}L(\pi) &= \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)^2 \mathbb{D}(\nu^{K_{35}+1}) \\ &= \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)^2 ({}^2A_{35} - (A_{35})^2) \\ &= \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)^2 \cdot 0,01831562.\end{aligned}$$

Šimto draudiko pasirašytų sutarčių būsimų nuostolių dabartinė vertė

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi).$$

Laikome, kad skirtingų draudėjų gyvenimo trukmės yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Esant tokiai natūraliai prielaidai, atsitiktiniai dydžiai kur

$$L(\pi), L_1(\pi), L_2(\pi), \ \ldots\ , L_{100}(\pi)$$

yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

Vadinasi,

$$\mathbb{E}S = 100\mathbb{E}L(\pi),\ \mathbb{D}S = 100\mathbb{D}L(\pi).$$

Pagal uždavinio sąlygą, turi būti

$$\mathbb{P}(S > 0) \leqslant 0,05.$$

Todėl

$$\mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}} > \frac{-\mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}}\right) \leqslant 0,05.$$

Arba

$$\mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}} < \frac{-\mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}}\right) \geqslant 0,95.$$

Pagal centrinę ribinę teoremą kairė paskutinės nelygybės pusė apytikriai lygi

$$\Phi\left(\frac{-\mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}}\right).$$

Vadinasi, paskutinė nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$-\frac{\mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}} \geqslant 1,645.$$

Iš čia

$$-\frac{100\mathbb{E}L(\pi)}{\sqrt{100\mathbb{D}L(\pi)}} \geqslant 1,645,$$

arba

$$\frac{\frac{\pi}{d} - A_{35}\left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)}{\sqrt{0,01831562} \cdot \left(10^4 + \frac{\pi}{d}\right)} \geqslant 0,1645.$$

Taigi

$$\pi \geqslant \pi_c = 10^4 d \cdot \frac{0,1645\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2} + A_{35}}{1 - (A_{35} + 0,1645\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2})} = 100,6 \text{ Lt}.$$

$\triangle$

Be diskrečių ir tolydžių grynųjų premijų draudos matematikoje sutinkamos ir vadinamosios ***pusiau tolydžios grynosios premijos***. Šios premijos sutinkamos aprašant draudėjo mokėjimų srautą, kai draudiminė išmoka mokama iš karto po draudėjo mirties, o įmokos už draudimą mokamos kiekvienų draudėjo gyvenimo metų pradžioje. Šios, pusiau tolydžios grynosios premijos, žymimos gana įprastai:

$P(\bar{A}_x)$ - draudimo iki gyvos galvos atveju,
$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$ - n metų gyvybės draudimo atveju,
$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ - kaupiamojo gyvybės draudimo atveju,
${}_hP(\bar{A}_x)$ - h metų mokamo draudimo iki gyvos galvos atveju,
${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ - h metų mokamo n metų kaupiamojo draudimo atveju.

Visos išvardintos premijos nustatomos pagal ekvivalentumo principą. Nesunku rasti išvardintų pusiau tolydžių grynųjų premijų išraiškas:

$$\begin{aligned}
P(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}, \\
P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) &= \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \\
P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \\
{}_hP(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}, \\
{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.
\end{aligned}$$

5.4 m dažnumu mokamos premijos

Dažnai įmokas už paslaugas draudėjas moka m kartų per metus. Tokiu būdu per metus sumokama suma vadinama m ***dažnumu mokamoma premija***. Paprastai m lygus $2, 4$ arba 12. Be to, laikoma, kad draudimo įmokos mokamos kiekvieno laikotarpio pradžioje. Draudimo išmokos gali būti išmokamos tiek mirties metų pabaigoje, tiek ir iš karto po mirties. Pavyzdžiui, dydis $P_x^{(m)}$ žymi metinę premiją, mokamą lygiomis dalimis m kartų per metus už draudimą iki gyvos galvos, kai draudimo išmoka mokama metų gale; o dydis $P_x^{(m)}(\bar{A}_x)$ žymi analogišką dydį, tuo atveju, kai išmoka išmokama iš karto po mirties. Taikant ekvivalentumo principą nesunku sudaryti tokią m dažnumu mokamų grynųjų premijų lentelę.

Planas	m dažnumu mokama metinė premija,kai išmoka mokama metų gale	m dažnumu mokama metinė premija, kai išmoka mokama iš karto po mirties
Draudimas iki gyvos galvos	$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}}$
n metų gyvybės draudimas	$P_{x:\overline{n}\rceil}^{1(m)} = \frac{A^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}}$
n metų kaupiamasis draudimas	$P_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}}$

h metų mokamas draudimas iki gyvos galvos	${}_hP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rceil}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rceil}}$
h metų mokamas n metų kaupiamasis draudimas	${}_hP_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rceil}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rceil}}$

Dar kartą atkreipiame dėmesį, kad dydžiai $P^{(m)}$ lygūs sumai sumokamai per metus. Norint surasti kokia suma mokama per m–ąjį laikotarpį reikia nepamiršti minėtą dydį padalinti iš m.

5.6 Uždavinys. 50 *metų Lietuvos Respublikos pilietis draudžiasi* 10 *metų* 10000 *Lt. sumai kaupiamuoju gyvybės draudimu. Laukiama investicijų palūkanų norma* $i = 0,06$. *Draudėjas pasižadėjo mokėti įmokas* h *du kartus per metus: sausio pradžioje ir liepos pradžioje. Naudojant ekvivalentumo principą rasime* h*: (1) jei draudimo išmoka išmokama mirties metų pabaigoje; (2) jei išmoka išmokama iš karto po mirties. Laikysime, kad aukščiau paminėto Lietuvos piliečio išgyvenimo funkcija* $s(x)$ *tenkina sąlygą*

$$s(x+t) = (1-t)\cdot s(x) + t\cdot s(x+1),\ x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$\triangle$ Pradžioje rasime įmoką h, kai draudimo išmoka mokama draudėjo mirties metų pabaigoje. Šiuo atveju

$$h = \frac{1}{2}10000P^{(2)}_{50:\overline{10}\rceil} = 5000\frac{A_{50:\overline{10}\rceil}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{10}\rceil}}.$$

Aišku, kad

$$i^{(2)} = 2\left((1+i)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0,059126028,$$
$$d^{(2)} = 2\left(1 - (1-d)^{\frac{1}{2}}\right) = 0,057428275.$$

Todėl

$$\alpha(2) = \frac{id}{i^{(2)}d^{(2)}} = 1,0002122,$$
$$\beta(2) = \frac{i - d^{(2)}}{i^{(2)}d^{(2)}} = 0,25739081.$$

Iš Lietuvos respublikos mirtingumo lentelės randame

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{50:\overline{10}|} &= \sum_{k=0}^{9} \nu^k {}_kp_x = \frac{1}{\ell_{50}}\left(\ell_{50} + \nu\ell_{51} + \ldots + \nu^9\ell_{59}\right) \\ &= 7,20308, \\ {}_{10}E_{50} &= \nu^{10}{}_{10}p_{50} = \left(\frac{1}{1,06}\right)^{10}\frac{\ell_{60}}{\ell_{50}} = 0,444788.\end{aligned}$$

Pagal 4.4.2 skyrelyje pateiktą formulę

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{10}|} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{10}|} - \beta(2)(1 - {}_{10}E_{50}) = 7,061702.$$

O pagal 4.2.5 teoremą

$$A_{50:\overline{10}|} = 1 - d\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 0,600281136.$$

Vadinasi, ieškomoji įmoka

$$h = 425 \text{ Lt}.$$

$\triangle$

$\triangle$ Dabar rasime įmoką h draudimui, kai išmoka mokama iš karto po draudėjo mirties. Šiuo atveju

$$h = \frac{1}{2}10000P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{10}|}) = 5000\frac{\bar{A}_{50:\overline{10}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{10}|}}.$$

Kadangi "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", tai pagal 3.3 skyrelyje gautus sąryšius

$$\begin{aligned}\bar{A}_{50:\overline{10}|} &= \bar{A}^1_{50:\overline{10}|} + \bar{A}_{50:\overset{1}{\overline{10}|}} = \underbrace{\frac{i}{\ln(1+i)}}_{=\delta} A^1_{50:\overline{10}|} + {}_{10}E_{50} \\ &= \frac{i}{\ln(1+i)}\left(A_{50:\overline{10}|} - {}_{10}E_{50}\right) + {}_{10}E_{50} \\ &= 0,60490063.\end{aligned}$$

Taigi, nagrinėjamu atveju, pusmečio įmoka

$$h = 428,3 \ \text{ Lt}.$$

$\triangle$

Uždaviniai

1. 2001 m. sausio 1 d. Anzelmukas attidarė sąskaita Slėnio banke ir į ją pervedė 8500 Lt. Banko palūkanų norma $i = o.07$. Kiek pinigų Anzelmuko sąskaitoje bus 2007 gruodžio 31 d.?

2. Bankas Saulėlydis palūkanas skaičiuoja naudodamas kintamą palūkanų galią
$$\delta(t) = \frac{t^2}{100}, t > 0.$$
Momentu $t = 0$ į sąskaitą pervedama 100 Lt., o momentu $t = 3$ į sąskaitą pervedama papildoma suma X. Raskite šią sumą X, jei žinoma, kad ji lygi palūkanoms, paskaičiuotoms laikotarpiui $3 \leqslant t \leqslant 6$.

3. Bankas Geniukas palūkanas skaičiuoja pagal kintamą palūkanų galią. 2003 birželio 1 d. Milda padęjo į sąskaitą 50000 Lt. 2005 birželio 1 d. Mildos sąskaita išaugo iki 59102. Žinome kad palūkanų galia kinta tiesiškai. Kam lygi palūkanų galia 2004 birželio 1 d.?

4. Pensininkas Jeronimas nori gauti 5000 Lt. 2007 liepos 1 d., 3000 Lt. 2010 kovo 1 d., 2000 Lt. 2011 spalio 1 d. ir 8000 Lt. 2013 balandžio 1 d. Pensijinio fondo techninė palūkanų norma - $0,05$. Kiek pensininkas Jeronimas turi sumokėti 2005 sausio 1 d. už šią paslaugą?

5. Vėluojanti mažėjanti renta mokama 20 metų, pirmoji išmoka 8000 Lt., o kiekviena sekanti išmoka 300 Lt mažesnė už prieš tai buvusią. Pensijinio fondo palūkanų norma $i = 0,05$. Kokia dabartinė aprašytos rentos vertė?

6. Viktoras perka begalinę rentą, už ją sumoka 167,5 mln. Lt. Pirmus 5 metus kiekvienų metų gale Viktoras gaus po 10 mln. Lt. O pradedant 6 metais išmokama suma bus didinama $k\%$ kasmet. Rasti k, jeigu investicinio fondo palūkanų norma $i = 0,092$.

7. Kurios iš šių funkcijų gali būti laikomos išgyvenimo funkcijomis:
$$s_1(x) = e^{x-((0.02)^x-1)},$$
$$s_2(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$
$$s_3(x) = e^{-x^2}?$$

8. Gyvenimo trukmė X turi tankį:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{30^2} e^{-\frac{x}{30}}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Raskite:

išgyvenamumo funkciją $s(x)$,

mirtingumo galią μ_x,

vidutinę gyvenimo trukmę $\overset{\circ}{e}_0$.

9. 20 metų Angelė gimė Klaipėdoje. Kokia tikimybė, kad ji sulauks 40 metų, bet nesulauks 50 metų.

10. Kiek vidutiniškai iš 1000 lietuvos vyrų sulaukia 60 metų, tačiau miršta nesulaukę 70 metų? Kokia tokių vyrų skaičiaus dispersija?

11. Yra žinoma, kad

$${}_tp_x = 1 - \left(\frac{t}{110 - x} \right)^{\frac{3}{2}}, \ t \in (0; 110 - x).$$

Raskite $\overset{\circ}{e}_{10}$.

12. Duotos vyro ir moters išgyvenimo funkcijos:

$$s_v(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{75}, & \text{kai } x \in [0; 75], \\ 0, & \text{kitur,} \end{cases}$$

$$s_m(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{85}, & \text{kai } x \in [0; 85], \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Vyrui yra 65 metai, o žmonai - 60 metų. Apskaičiuokite:

(a) kiek vidutiniškai prabėgs laiko iki pirmos mirties,

(b) kiek vidutiniškai prabėgs laiko iki antros mirties,

(c) kokia tikimybė, kad vyras mirs pirmas,

(d) kokia tikimybė, kad pirma mirs moteris?

13. Draudėjo išgyvenimo funkcija
$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{110}\right)^2, \ x \in [0; 110].$$
Draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0.05$. 30-metis draudėjas apdraudžia savo gyvybę iki gyvos galvos. Draudimo išmoka 20000 Lt bus išmokama iš karto po draudėjo mirties. Draudėjas sumokėjo draudikui už paslaugą 3000 Lt vienkartinę premiją. Kokia tikimybė, kad ši sutartis bus pelninga draudikui?

14. 18 metų Onutė iš Kauno nusprendė apdrausti savo gyvybę 7 metams paprastu gyvybės draudimu. Suma, lygi 10000 Lt, bus išmokama iš karto po Onutės mirties. Draudimo bendrovė gautas lėšas investuoja su pastovia palūkanų norma $i = 0.05$. Kokią premiją reikėtų sumokėti Onutei, jeigu Onutės "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai", o premija būtų paskaičiuota taikant ekvivalentumo principą.

15. Draudėjo gyvenimo trukmę aprašo išgyvenimo funkcija
$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2, \ x \leqslant 0 \leqslant 100.$$
Draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0.07$. 20 metų draudėjas apdraudžia savo gyvybę kaupiamuoju draudimu 10 metų. Draudimo išmoka, lygi 10000 Lt, bus išmokama mirties momentu arba suėjus 10 metų terminui. Už paslaugą draudėjas sumokėjo 7000 Lt premiją. Kokia tikimybė, kad ši sutartis draudikui bus pelninga?

16. 60 metų Pranas iš Kelmės nusprendė apdrausti savo gyvybę 6 metams, 15000 Lt sumai paprastu gyvybės draudimu. Po jo mirties nurodyta suma iš karto bus išmokama Prano artimiesiems. Draudimo bendrovė investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0.05$. Kokią premiją turi sumokėti Pranas, jei draudikas nori gauti pelną su tikimybe 0,98? Laikykite, kad draudikas draudžia tokiu draudimu 25000 analogiškų klijentų, o Prano "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai".

17. Draudėjas (x) apdraudė savo gyvybę 3 metams. Jei draudėjas mirs per pirmus metus, tai pirmų metų gale jo artimieji gaus 300000 Lt. Jei jis mirs antraisiais metais, tai antrųjų metų gale jo artimieji gaus 350000 Lt. Jei trečiaisiais, tai – 400000 Lt. Draudikas investuoja gautas lėšas

su pastovia palūkanų norma $i = 0.06$. Draudėjo (x) likusio gyvenimo trukmę valdo desnis

$$q_{x+k} = 0.02(k+1),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Raskite draudimo kompanijos įsipareigojimų vidutinę dabartinę vertę.

18. Draudikas apdraudė daug vienodo amžiaus draudėjų (x) dviems metams paprastu gyvybės draudimu. Pagal sutartį, mirties atveju draudėjas gaus 100000 Lt mirties metų pabaigoje. Trečdalis apdraustųjų rūko, likę du trečdaliai nerūko. Rūkančiųjų likusio gyvenimo trukmę aprašo dėsnis

$${}_tp_x^* = e^{-\left(\frac{t}{1.5}\right)^2},$$

o nerūkančiųjų likusio gyvenimo trukmę aprašo dėsnis

$${}_t\tilde{p}_x = e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2}.$$

Draudikas investuoja gautas lėšas su pastovia palūkanų norma $i = 0.05$. Draudimo bendrovė nusprendė nekreipti dėmesio į žalingus įpročius ir visiems draudėjams nustatė vienodo dydžio grynąją premiją už aprašytą paslaugą. Raskite šią premiją.

19. Draudėjo gyvenimo trukmę valdo išgyvenimo funkcija

$$s(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{110}},\ x \in [0; 110],$$

o draudikas, kaip dažnai pasitaiko, investuoja gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0.06$. 20-metis draudėjas apdraudė savo gyvybę iki gyvos galvos. 100000 Lt bus išmokama jo artimiesiems iš karto po draudėjo mirties. Draudėjas įsipareigoja mokėti tolygiai kasmet po 3000 Lt iki mirties. Kokia tikimybė, kad ši sutartis draudikui bus pelninga?

20. Draudėjo gyvenimą valdo išgyvenimo funkcija:

$$s(x) = \frac{x+30}{x} \exp\left\{-\frac{x}{30}\right\},\ x \geqslant 0,$$

o draudikas investuoja gautus pinigus su pastovia metine palūkanų norma $i = 0,08$. 20-metis draudėjas apdraudžia savo gyvybę iki gyvos galvos. Draudimo išmoka, lygi 90000 Lt, bus išmokama iš karto po jo mirties. Draudėjas įsipareigojo mokėti tolygiai, kasmet po H Lt 25 metų laikotarpyje. Draudikas apskaičiavo H reikšmę naudodamas ekvivalentumo principą. Raskite H.

21. Raskite $P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x)$, jeigu $i = 0.04$, ir

$$\mu_{x+t} = 0.06, \ t \geqslant 0.$$

22. Raskite anuiteto iki gyvos galvos dabartinę aktuarinę vertę draudėjui (x), jeigu $\delta = 0.06$, o draudėjo gyvenimo trukmę valdo mirtingumo galia

$$\mu_{x+t} = \begin{cases} 0.01, & \text{kai } 0 \leqslant t < 5, \\ 0.02, & \text{kai } t \geqslant 5. \end{cases}$$

23. 27-metis Mykolas iš Vilniaus apdraudė savo gyvybę penkiems metams, 20000 Lt sumai paprastu gyvybės draudimu mokamu iš karto po mirties. Draudimo bendrovė investuoja gautas lėšas su pastovia palūkanų norma $i = 0.09$. Mykolas už gyvybės draudimą įsipareigojo mokėti sumą H kiekvienų metų pradžioje per ateinančius penkis savo gyvenimo metus. Draudikas premiją H paskaičiavo naudodamasis ekvivalentumo principu. Be to, žinome, kad Mykolo "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai". Raskite metinę Mykolo įmoką H.

24. Draudėjo (x) gyvenimo trukmųaldo išgyvenimo funkcija

$$s(x) = 1 - \frac{x}{120}, \ 0 \leqslant x \leqslant 120.$$

Draudimo bendrovė "Mūsų gyvenimas lošimas" sudarė su trisdešimtmečiu draudėju tokią sutartį:

> draudėjo mirties metų gale, jo artimieji gaus milijoną Lt su tikimybe 0.2, kitu atveju, jie negaus nieko.
>
> Kiekvienų gyvenimo metų pradžioje draudėjas moka premiją H su tikimybe 0.8, kitu atveju jis nemoka nieko.

Draudikas premiją H paskaičiavo naudodamasis ekvivalentumo principu. Raskite įmoką H, jei bendrovės investicijų metinė palūkanų norma $i = 0.06$.

25. 40-metė sesuo Anelė iš Vilniaus apdraudė savo gyvybę penkiems metams 30000 Lt sumai. Anelei mirus, nurodyta suma bus išmokama iš karto. Draudimo bendrovės techninė palūkanų norma $i = 0.06$. Už savo gyvybės draudimą Anelė įsipareigojo mokėti sumą H kiekvieno ketvirčio pradžioje per sekančius 5 savo gyvenimo metus. Taikydami ekvivalentumo principą raskite H, jeigu Anelės "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai".

26. Draudėjas (x) sudarė su draudiku tokią sutartį:

    (a) H dydžio premiją draudėjas moka kiekvienų metų pradžioje per ateinančius 3 savo gyvenimo metus.
    (b) Jei draudėjas miršta per ateinančius 3 metus, draudikas nemoka nieko.
    (c) Jei draudėjas išgyvena bent 3 metus, tai po 3 metų nuo sutarties sudarymo kievienų metų pradžioje draudikas išmoka draudėjui tam tikrą sumą.
    (d) pirmoji išmokama suma lygi 1000 Lt, o kiekviena sekanti išmoka didesnė už prieš tai buvusią 4%.

    Yra žinoma, kad

    $$e_x = 11.05,\ p_x = 0.99,\ {}_2p_x = 0.98.$$

    Be to, metinė draudimo bendrovės investicijų palūkanų norma $i = 0.04$. Naudojantis ekvivalentumo principu raskite H.

27. 30-metis Kostas iš pabradės apdraudė savo gyvybę 4 metams kaupiamuoju draudimu 30000 Lt sumai. Jei jis mirs per ateinančius 4 metus, nurodyta suma išmokama iš karto po mirties. Už draudimą Kostas įsipareigojo per ateinančius 4 metus kiekvieno mėnesio pradžioje mokėti sumą H. Draudikas tikisi investuoti gautas lėšas su pastovia metine palūkanų norma $i = 0.06$. Pagal ekvivalentumo principą raskite mėnesinę įmoką H, laikydami, kad Kosto "mirtingumas pasiskirstęs tolygiai".

28. 30-metis draudėjas draudžia savo gyvybę 40 metų kaupiamuoju draudimu. Draudimo išmoka, lygi 50000 Lt, bus išmokama mirties metų pabaigoje. Draudėjas įsipareigoja per ateinančius 30 metų kiekvienų metų pradžioje mokėti po 1500 Lt, jei tuo metu bus gyvas. Draudiko gyvenimą valdo išgyvenimo funkcija

    $$s(x) = 1 - \frac{x}{110},\ 0 \leqslant x \leqslant 110,$$

    o investicijų metinė palūkanų norma $i = 0.06$. Kokia tikimybė, kad sudaryta sutartis bus pelninga draudikui?

29. Įrodykite, kad

    $$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\overset{\circ}{e}_0}\ ,$$

    jeigu $\delta = 0$.

30. Laikydami, kad $\mu_{x+t} = \mu$ visiems $t > 0$, dydį

$$\left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \cdot \frac{1}{(\delta \cdot \bar{a}_x)^2}$$

išreikškite konstantomis μ ir δ.

31. Atsitiktinis dydis $K_x = [T_x]$ p;asiskirstęs pagal dėsnį

$$\mathbb{P}(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x = (1-\alpha)\alpha^k, \ k = 0, 1, \dots \ .$$

Čia $\alpha \in (0; 1)$ yra konstanta. Išreikškite premiją P_x konstantomis α ir i.

32. Draudikas draudžia šeimą: vyrą ir žmoną. Draudimo suma 10000Lt bus išmokama iš karto po antrosios mirties. Draudimo įmokas šeima moka tolygiai kiekvienais metais po H kasmet iki pirmosios mirties. Yra žinoma, kad žmonos ir vyro likusio gyvenimo trukmės yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dyždiai. Žmonos ir vyro likusių gyvenimų trukmes valdo pastovi mirtingumo galia $\mu = 0.07$, o draudiko investicijų palūkanų galia $\delta = 0.05$. Naudojant ekvivalentumo principą, raskite H.

33. Yra žinoma, kad

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2, \ 0 \leqslant x \leqslant 100,$$

o $\delta = 0.07$. 20-metis draudėjas apdraudė savo gyvybę 30-čiai metų paprastu draudimu 50000 Lt sumai. Išmoka išmokama iš karto po draudėjo mirties. Draudėjas įsipareigojo mokėti po 500 Lt kasmet tolygiai, per ateinančius 30 savo gyvenimo metų. Apskaičiuokite šios sutarties rezervą pradiniu laiko momentu ir po: $10, 20, 30$ metų.

34. 20-metė Marytė iš Pavilnio apsidraudė penkiems metams paprastu gyvybės draudimu 10000 Lt sumai. Draudimo išmoka bus išmokama mirties metų pabaigoje. Investicijų metinė palūkanų norma $i = 0.08$. Už paslaugą bus mokama kiekvienų metų pradžioje. Įmoką draudikas paskaičiavo naudodamasis ekvivalentumo principu. Raskite aprašytos sutarties rezervą po 2 metų ir po 4 metų.

35. Yra žinoma, kad

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2, \ x \in [0; 100].$$

30-metis draudėjas draudžiasi 20 metų kaupiamuoju gyvybės draudimu 20000 Lt sumai. Išmoka bus išmokama iš karto po mirties. Techninė metinė palūkanų norma $i = 0.06$. Už paslaugą mokama tolygiai po H Lt kasmet. Premijos dydį draudikas paskaičiavo taip, kad sutarties rezervas po 5 metų būtų lygus 0. Raskite premiją H. Kokia tikimybė, kad aprašyta sutartis draudikui bus pelninga?

Uždavinių atsakymai

1. 13649 Lt.
2. $X = 785$ Lt.
3. $\delta(1) = 0,0835$.
4. $X = 14222$ Lt.
5. $X = 70151$ Lt.
6. $k = 4$.
7. $s_2(x)$ ir $s_3(x)$.
8. $s(x) = e^{-\frac{x}{30}}(1 + \frac{x}{30}),\ \mu_x = \frac{x}{30(30+x)},\ \mathring{e}_0 = 60$.
9. $0,1105$.
10. Vidutiniškai 364 vyrai. Dispersija $231,5$.
11. 60 metų.
12. (a) 4 metai ir 4 mėnesiai, (b) 13 metų ir 2 mėnesiai.
13. $0,264$.
14. 35 Lt.
15. $0,8719$
16. Reikia mokėti ne mažiau kaip 2521 Lt.
17. 36829 Lt
18. 64559 Lt.
19. $0,9262$.
20. 1894 Lt.
21. $0,4632$.
22. 13,02733.

23. 72 Lt.

24. 3195 Lt.

25. $H = 22$ Lt.

26. $H = 2824$ Lt.

27. $H = 559$ Lt.

28. $0,775$.

29. ...

30. $\frac{\mu}{2\delta+\mu}$.

31. $\frac{1-\alpha}{1+i}$.

32. 817 Lt.

33. ${}_0\bar{V}_{20} = 17281$ Lt., ${}_{10}\bar{V}_{20} = 24184$ Lt., ${}_{20}\bar{V}_{20} = 28278$ Lt., ${}_{30}\bar{V}_{20} = 0$.

34. ${}_2V^1_{20:\overline{5}|} = 0,15$ Lt., ${}_4V^1_{20:\overline{5}|} = 0,97$ Lt.

35. $H = 2010$ Lt., $P = 0,7084$.