ĮVADAS Į MATEMATIKOS FILOSOFIJĄ

Paskaitų konspektas - 5 Variantas

Rimas Norvaiša

E-paštas: norvaisa @ktl.mii.lt

Vilnius, 2005 spalis

Turinys

Skyrius 1

Įvadas

> Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie.
> Sans la philosophie on ne péǹtre point au fond des mathématiques.
> Sans les deux on ne péǹtre au fond de rien. — Gottfried Wilhelm von Leibniz
>
> [Without mathematics we cannot penetrate deeply into philosophy.
> Without philosophy we cannot penetrate deeply into mathematics.
> Without both we cannot penetrate deeply into anything.]

Matematikos tyrimo objekto supratimo poreikis tampa ypač akivaizdžiu bandant taikyti matematikos teorijas gamtos ir visuomenės moksluose, pradedant fizika ir baigiant ekonomika bei politika. Tais atvejais tenka fizinius objektus ir visuomenines institucijas (pinigai, finansų rinka) interpretuoti naudojant tokius matematikos objektus kaip aibės, funkcijos, Euklidinė erdvė ir panašiai. Kitas sunkumas atsiranda tais atvejais, kai bandoma pagrįsti matematinės teorijos išvados taikymo galimumą realiame gyvenime. Kodėl turėtume tikėti, kad visuomenės elgesys bent kiek adekvačiai gali būti atspindimas matematikos teiginių logika?

Pagrindinis dalykas kuriuo remiamasi nagrinėjant šiuos klausimus yra paskutinių 2500 metų žmonijos istorija įrodanti matematikos naudingumą - tai yra faktas, kuriuo remiamasi ir kuri norima suprasti bei paaiškinti. Tai, kad iki šiol nėra visuotinai pripažintų aiškinimų rodo, jog problemos susijusios su matematikos prigimties klausimais nėra lengvos.

Šiose paskaitose mes aptariame tik pagrindinius požiūrius ir argumentus į matematiką ir jos prigimtį. Tikimės pateikti kuo platesnį, ir todėl neišvengiamai apytikrį, šios srities vaizdą.

Pagrindinė šio teksto tema yra matematika ir kalbama apie ją filosofiniu požiūriu. Todėl verta pradėti pastebint, kuo šis požiūris ypatingas.

1.1 Filosofijos metodas

Kuo ypatingas yra filosofinis požiūris arba metodas? Vienas galimų atsakymų į šį klausimą yra toks: filosofo uždavinys yra išsiaiškinti žodžių reikšmes. Šis metodas dominavo praeito amžiaus pirmosios pusės filosofijoje ir paprastai siejamas su austrų filosofo Ludwig'o Wittgenstein'o darbais. Buvo pagrįstai teigiama, jog pagrindinės problemos filosofijoje atsirado dėl nesusipratimų susijusių su nesugebėjimų pastebėti skirtingas naudojamų žodžių reikšmes ir tų reikšmių priklausomybę nuo konteksto. Šiais laikais jau retai, kas mano jog tai vienintelis ar pagrindinis filosofijos problemų šaltinis. Tačiau naudojamų žodžių reikšmės išsiaiškinimas tapo būtina pradine filosofinio svarstymo dalimi.

Dar svarbiau yra tai, kad filosofija yra susijusi su argumentų analize, dažnai naudojant formalius simbolinės logikos, tikimybių teorijos ar kitos kurios nors mokslo srities metodus. Gindamas savo požiūrį, filosofas pateikia savo argumentą. Be to, papildomai analizuojami konkuruojantį požiūrį ginantys argumentai. Tokiais atvejais yra nagrinėjama argumento struktūra, jo loginis korektiškumas, papildomų prielaidų įtaka argumento išvadai ir daugelis kitų su argumentavimu susijusių aspektų.

Tačiau beveik neįmanoma išskirti grynai filosofinį, tai yra tik filosofijoje naudojamą metodą. Paprastai nėra griežtos takoskyros skiriančios filosofinį samprotavimą nuo kurioje nors mokslo srityje taikomų metodų, taip pat dažnai neįmanoma nustatyti kur baigiasi filosofija ir prasideda mokslas. Atrodo, jog filosofai nevengia jokio metodo, kuris gali padėti susivokti filosofinėje problemoje.

1.2 Filosofinės problemos

Tiesą sakant yra sunku pasakyti, kokia problema yra filosofinė. Tačiau per du su puse tūkstančių metų išriškėjo tai, ką galima vadinti išskirtinai filosofinėmis problemomis. Svarbiausomis yra trys filosofinių tyrimų sritys: *etika, epistemologija ir ontologija* (*metafizika*). Be abejonės, tuo filosofinių problemų sąrašas nėra išsemiamas. Šį sąrašą galima tęsti paminint estetiką, logiką, socialinė ir politikos filosofija, kalbos, proto (mind), mokslo ir religijos filosofijos. Tačiau minėtosios trys sritys kertasi su visomis kitomis filosofijos dalimis ir jos apima didžiąją filosofijos dalį.

Epistemologija (gr. *episteme* - pažinimas, žinios + *logos* - mokslas) tai filosofinis pažinimo[1] kilmės, esmės, perspektyvų ir t. t. svarstymas. Trumpai kalbant, jusliškai suvokiamą išorinio pasaulio atskirybę pažinimas susieja su visuotiniu jos reikšmingumu ir apibrėžia naudodamas kitus visuotiniais požymiais. Tokiu būdu pažinimas yra tam tikras mastymo būdas, kuris remiasi patyrimu ir nuolatos prie jo grįžta. Patyrimas nėra vien tik pasyvus duotybės pripažinimas - jis vadovaujasi ankstesniu supratimu apie tą duotybę.

Ontologija (gr. *ontos* - esantis + *logos* - mokslas) tai filosofinė būties teorija, t. y. teorija apie esamybę - tiek, kiek ji yra. Ontologija yra pagrindinė metafizikos disciplina. Ontologija nusako (išvardina) tai, kas egzistuoja. Tuo tarpu metafizika bando pasakyti kažką apie tai, kas egzistuoja. Iš esmės, ontologija pateikia objektų sąrašą, o metafizika pasiūlo aiškinamąją teoriją apie tų objektų prigimtį.

Etika (gr. *ethos* - įprotis, paprotys) yra moralės filosofija, kurios tyrimo objektas - gėris kaip svarbiausias teisingo elgesio ir doroviško gyvenimo orientyras.

Matematikos filosofijoje nagrinėjamos tokios su matematika susijusios problemos:

1. kodėl matematika naudinga tiriant gamtą?

[1]graikiškai "pažinimas" reiškia ir "episteme" ir "gnosis". Neretai pirmoji iš šių reikšmių siejama su moksliniu pažinimu, o antroji su dvasiniu pažinimu

2. ar egzistuoja matematikos objektai ir jei taip tai kokia prasme?

3. kodėl ir kokia prasme teisingi matematikos teiginiai?

Klausimai:

1. Kokias žinote skirtingas žodžio "argumentas" reikšmes?

2. Ką reiškia žodis "egzistuoja"?

Literatūra internete.

1. On Gödel's Philosophy of Mathematics
   `http://www.friesian.com/goedel/`
2. R.B. Jones' philosophy of mathematics page
   `http://www.rbjones.com/rbjpub/philos/maths/index.htm`
3. Open Directory Project: Philosophy of Mathematics
   `http://www.dmoz.org/Society/Philosophy/Philosophy_of_Science/Philosophy_of_Mathematics/`
4. Philosophia Mathematica journal
   `http://philmat.oxfordjournals.org/`
5. The Utility of Mathematics
   `http://catb.org/˜esr/writings/utility-of-math/`
6. The Philosophy of Real Mathematics Page : an article by David Corfield
   `http://www-users.york.ac.uk/˜dc23/phorem.htm`
7. The Philosophy of Mathematics Education Journal homepage
   `http://www.ex.ac.uk/˜PErnest/`
8. Zalta, E. (1995). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
   `http://plato.stanford.edu`

Papildoma literatūra.

1. Halder, A. (2002). Filosofijos žodynas. Alma litera.

Skyrius 2

Kas yra matematika?

> Mathematics is the subject in which we know neither what we are talking about nor whether what we say is true.
>
> Bertrand Russell (1872 - 1970), in "Recent Work on the Principles of Mathematics", The International Monthly, 4 (1901), 83-101.

Aiškinantis kas yra matematika verta aptarti tai, kas matematikai yra būdinga, kas ją skirią nuo kitų panašių žmogaus veiklos sričių ir kaip galima paaiškinti jos naudingumą.

2.1 Matematikos įvaizdis

Matematikos įvaizdžiui nusakyti pradėsime matematikos turinio pavyzdžiu. Priminsime, kad *pirminiu* vadinams už vienetą didesnis sveikas skaičius, kuris dalosi be liekanos tik iš vieneto ir savęs. Priešingu atveju toks sveikas skaičius vadinamas *sudėtiniu*.

2.1 Teorema. *Egzistuoja be galo daug pirminių skaičių.*

Įrodymas. Priešingai teoremos teiginiui, tarkime, kad egzistuoja tik baigtinis pirminių skaičių kiekis. Tarp baigtinio kiekio skaičių visada egzistuoja didžiausias, kurį žymėsime raide p. Galime apibrėžti skaičių n lygų 1 plius visų pirminių skaičių sandauga, t. y.

$$n := 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p.$$

Galimi du atvejai arba n yra sudėtinis arba pirminis. Tarkime, kad n yra pirminis. Kadangi $n > p$, tai prieštarauja prielaidai, kad p yra didžiausias pirminis skaičius. Dabar tarkime, kad n yra sudėtinis. Tada kuris nors pirminis skaičius privalo (kodėl?) dalyti jį be liekanos. Tačiau visi pirminiai dalo n tik su liekana 1. Tai reikštų, kad bet kuris pirminis, dalantis n, privalo būti didesnis už p, ko būti negali. Tokiu atveju pradinė prielaida apie pirminių skaičių kiekio baigtinumą yra neteisinga, kas įrodo teoremos teiginį. Q. E. D.

Ši teorema elegantiška, svarbi ir kartu tipiška matematikai iliustruoti. Tarp kitko, neegzistuoja metodo, kuris įgalintų surasti kaip norimai didelį pirminį skaičių. Iki šiol tokio skaičiaus paieška atliekama nuosekliu tikrinimu. Didžiausias šiuo metu žinomas pirminis skaičius yra $2^{25964951} - 1$ ir jį sudaro 7816230 skaitmenys surastas 2005 metais[1].

Kalbant apie įvaizdį nėra būtina jo pagrįsti argumentais. Priešingai įvaizdis neretai gali būti ir klaidingas. Toliau išvardintoms matematikos savybėms pritarų matematikos profesionalai ir gal būt didelė dalis matematikos filosofų.

Būtinumo pobūdis. Teoremos apie pirminių skaičių kiekio begalinumą įrodymas sukuria įspūdį, kuris neleidžiantį abejoti teiginio teisingumu. Apskritai, matematikos teiginiai skiriasi nuo gamtos mokslų tuo, kad sukuria tą neišvengiamumo arba būtinumo pojautį. Pavyzdžiui, intuityviai, visai nebūtinai saulė privalo turėti lygiai devynias planetas, arba gravitacijos dėsnis nebūtinai privalo turėti Newton'o dėsnio formą. Tuo tarpu matematinis teiginys $7 + 5 = 12$ atrodo kaip tiesos būtinumo etalonas. Matematika atrodo besanti vienintelė žmonių intelektinės veiklos sritis, kurioje galima absoliučiai pasitikėti gaunamomis žiniomis.

Aprioriškumo pobūdis. Frazė "a priori" (lot. iš pirmesnio) reiškia nepriklausomumą nuo patirties, arba "iki patirties". Sakoma, kad teiginys *žinomas a priori* jei jo žinojimas nesiremia jokia patirtimi apie išorinio pasaulio konkrečių įvykių eigą, o išplaukia iš vartojamų sąvokų reikšmės. Priešingą reikšmę turi frazė "a posteriori" (lot. iš paskesnio). Teiginys *žinomas a posteriori* arba empiriškai, jei jo žinojimas gaunamas remiantis išorinio pasaulio patirtimi, t. y. jei teiginys nėra žinomas a priori.

Empirinės žinios remiasi fiziniais pojūčiais: regėjimu, klausa, skoniu, kvapu ir litėjimu. Tuo tarpu tai, kas suvokiama protu atrodo nepriklauso šiam pojūčių sąrašui. "Matymas proto akimis" suvokiama kaip patirtis nepriklausanti nuo fizinių pojūčių. Įrodytoji teorema apie pirminius skaičius suvokiama remiantis protu bet ne pojūčiais. Jei sutinkama, kad a priori žinojimas yra galimas, tai to pavyzdžiais yra pateikiami matematikos teiginiai.

Objektyvumo pobūdis. Sakymas, kad kažkas yra *subjektyvu* reiškia to kažko priklausomybę nuo suvokiančiojo proto. Suvokimas yra *intersubjektyvus* jei jis yra vienodas ir būdingas bet kuriam protui. Tuo tarpu sakymas, kad kažkas yra *objektyvu* reiškia nepriklausomumą ne tik nuo tą reiškinį suvokiančiojo proto bet ir nuo bet kurio suvokimo protu, t. y. objektyvumas reiškia to kažko buvimą net jei neliktų jį suvokiančiojo proto.

Matyt niekam nekelia abejonių matematikos teiginių intersubjektyvumas, o matematinė kalba ir jos teiginiai visų žmonių yra suvokiami vienareikšmiškai. Abejones gal būt galėtų kelti nuomonė jog matematika turėtų būti vienoda bet kuriai protingai visatos būtybei. Neabejotina, jog, pavyzdžiui, šachmatų žaidimo taisyklės yra suprantamos vienodai, t. y. šachmatų taisyklėms būdingas intersubjetyvumas. Tačiau visiškai įmanomas dalykas, kad šios taisyklės gali būti kitokios. Tuo tarpu matematika atrodo nepriklausanti nuo tokio susitarimo ir šia prasme ji atrodo esanti objektyvia.

Bet kuri bent kiek pilnesnė matematikos filosofijos kryptis privalo gebėti paaiškinti būtinumo, aprioriškumo ir objektyvumo įspūdžio matematikoje priežastis, arba paaiškinti tokių įspū-

[1] Žiūrėk tinklapį `http://www.mersenne.org/`

džių klaidingumą. Tačiau iki šiol dar niekas negali pasigirti visuotinai priimtinu šių klausimų paaiškinimu.

Kanto aiškinimas: matematika tiria žmogaus suvokimo formas.

Atrodo, jog tokio aiškinimo, nesiremiančio Kanto intuicija, paieška buvo pagrindinė 19 a. vakarų filosofijos problema (Alberto Coffa, 1991).

Galima ir neigti būtinumo ir aprioriškumo įspūdį matematikoje, teigiant, kad tai tik iliuzija. Tokio požiūrio laikosi W. V. O. Quine natūralizmas/empiricizmas (paaiškinti). Bet tada neišvegiama kitos problemos: paaiškinti, tokios iliuzijos prigimtį.

Paminėsime vieną neabejotinų matematikos bruožą, skiriantį ją nuo kitos intelektinės veiklos.

Įrodymo būtinumas. Bet kurio matematikos teiginio, pavyzdžiui, "jei p tai q" teisingumas nustatomas jį įrodant. *Įrodymu* vadinamas samprotavimas, kuriame naudojamsi: matematinėmis sąvokomis (apibrėžimais), fundamentaliomis prielaidomis (aksiomomis), anksčiau įrodytais teiginiais (teoremomis) ir logiškai teisingu samprotavimu (loginiu argumentu). Teorema apie pirminius skaičius buvo įrodyta tariant esant teisingam priešingą teiginį. Tada buvo parodyta, kad gauname prieštaravimą. Teoremos teiginys išplaukė iš to, kad jam priešingas nėra teisingas. Ši išvada remiasi logikos principais, pirma, jog betkoks teiginys nėra vienu metu ir teisingas ir klaidingas (prieštaravimo dėsnis); antra, jei teiginys yra klaidingas tai jo neiginys yra teisingas (negalimo trečiojo dėsnis) (žr. A.1.1 skyrių A.1 Priede). Matematikos teiginio būtinumo įspūdį sukuria arba sustiprina jo įrodymas.

Gali būti atvejų, kai matematinis teiginys nėra akivaizdus, tačiau įrodymas paprastai pakeičia ankstesnįjį požiūrį. Neretai, matematikai tiki matematinio teiginio teisingumo ir nežinodami jo įrodymo. Bet toks teiginys vadinamas hipoteze ir nėra naudojamas kitų teiginių įrodymuose. Pavyzdžiui, Goldbach'o hipotezė teigia, kad bet kuris lyginis skaičius yra išreiškiamas dviejų pirminių skaičių suma, t. y. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$ ir t. t. Ši hipotezė buvo patikrinta milijonams atvejų ir nežinomas nei vienas kontrpavyzdys. Tuo tarpu biologai remdamiesi tuo, kad visi iki šiol gyvenę varnai buvo juodi, nesivaržo daryti išvadą, kad visi varnai yra juodi.

2.2 Matematikos taikomumas

Tęsiant kalbą apie tai, kas yra matematika, vienas iš įdomiausių ir svarbiausių paradoksų yra jos taikomumas moksluose tiriančiuose fizinį pasaulį. Atrodytų, kad tai įprastas dalykas ir jokio paradokso čia būti negali. Mes skaičiuojame obuolius ir daliname tortą taip, kad jo gautų po lygiai visi svečiai. Mes taip pat matuojame galaktikas ir naudojame Hilbert'o erdves prognozuodami įvairius reiškinius. Atrodytų, jog nėra jokių sunkumų taikant matematiką. Tačiau pradedant gilintis į matematikos taikomumo supratimą vaizdas tampa neaiškiu. Pavyzdžiui, Eugene Wigner savo garsiajame 1960-ųjų metų straipsnyje rašė: "nepaprastas matematikos naudingumas gamtos moksluose yra kažkas, kas ribojasi su paslaptingumu ir neturi racionalaus paaiškinimo".

Nenuostabu ir puikiai žinoma, kad matematika naudojama fizikoje tam, kad kiekybiškai įvertinti gamtos dėsnių veikimą. Tačiau šis matematikos vaidmuo fizikoje galėtų būti įvardintas kaip įrankis ir šia prasme nėra labai svarbus. Iš tikro, matematika atlieka gerokai svarbesnį ir atsakingesnį vaidmenį. Būtent, tam, kad matematika galėtų būti taikoma fizikoje, gamtos dėsniai privalo būti formuluojami matematikos kalba. Panagrinėkime pavyzdžiui Newton'o gravitacijos dėsnį: tarp kūno a ir kūno b egzistuoja jėga f_{ab}, nukreipta link a ir jos dydis F nusakomas formule

$$F = \frac{g m_a m_b}{r^2},$$

kur g yra universali konstanta, m_a yra kūno a masė, m_b yra kūno b masė ir r yra atstumas tarp a ir b. Tarsime, kad fizikos tikslas yra tikslių gamtos dėsnių paieška (tai tik viena - realizmo - pozicija fizikos filosofijoje). Be to, tarsime, kad šis Newton'o dėsnis yra tikslus (nors žinome, kad taip nėra). Tokiu atveju Newton'o dėsnis suvokiamas taip, kad egzistuoja tokie objektai - jėga, masė ir atstumas - kuriuos galima išmatuoti naudojantis realiais skaičiais. Kadangi šių objektų fiziniame pasaulyje tiesiogiai nestebime, tai jie turėtų egzistuoti kaip ir kiti matematikos objektai.

Jei šis pavyzdys kelia abejones dėl matematikos svarbos, tai šiuolaikinė fizika pateikia naujus matematikos nepakeičiamumo pavyzdžius. Pakanka prisiminti kvantinės mechanikos formulavimą, kurį pasiūlė Dirakas. Kvantinėje mechanikoje yra dvi svarbios sąvokos: būsena ir stebėjimas; abi jos išreiškiamos naudojant tiesinių operatorių Hilberto erdvėje teoriją. Šiuo atveju būsena yra vektorius Hilberto erdvėje - gerai pažįstamas ir išnagrinėtas objektas matematikos kontekste. Tačiau tai, ką šis objektas atitinka fiziniame pasaulyje nėra akivaizdu. Viena nuomonė teigia, kad nieko apart matematikos nėra kvantinėje būsenoje. Kita nuomonė teigia egzistuojant realų fizinį lauką vadinamą Bohm'o kvantiniu potencialu. Šis ir kiti klausimai tiriami ieškant kvantinės mechanikos interpretacijos.

Nemažiau sudėtinga yra erdvės-laiko intepretavimo problema: ar egzistuoja reali erdvės-laiko daugdara, kurią atitinka matematinė erdvės-laiko struktūra $\mathbb{R}^4$. Paprastai neginčijamas yra įvykių realumas. Požiuris pagal kurį realūs įvykiai užima taip pat realios erdvės-laiko daugdaros taškus vadinamas absoliutizmu. Priešingas jam yra požiūris angliškai vadinamas relationalists, pagal kurį realūs įvykiai tiesiogiai patalpinamį į matematinę erdvės-laiko struktūrą $\mathbb{R}^4$ (žr. [9]).

Fizika yra tampriai susijusi su matematika, kuri fizikos dėsniams suteikia formą ir įgalina kiekybinę prognozę. Fizikinės teorijos beveik be išimties yra formuluojamos naudojantis matematiniais santykiais. Skirtumas tarp fizikos ir matematikos yra tas, kad galiausiai fizika siekia aprašyti fizinį pasaulį, o tuo tarpu matematika susijusi su abstrakčiomis struktūromis, kurios gali būti niekaip nesusiję su fiziniu pasauliu. Tačiau šis skirtumas ne visada ryškus. Egzistuoja didelė tarpinė tyrimų sritis tarp fizikos ir matematikos skirta nagrinėti fizikos teorijų matematines struktūras. Netgi yra fizikos teorijų (string theory), turinčių matematinės teorijos formą ir neturinčių jokio empirinio patvirtinimo.

Tiksliau nematematinę realybę galima išreikšti matematiškai surandant specialią funkciją tarp nematematinių objektų šeimos N ir matematinių objektų šeimos M. Šeimą N sudaro nematematinių objektų aibė S ir sąryšiai $R_1, R_2, \ldots$ apibrėžti aibėje S. Panašiai, šeimą N sudaro matematinių objektų aibė S^* ir sąryšiai $R_1^*, R_2^*, \ldots$ apibrėžti aibėje S^*. Ieškomoji funkcija ϕ apibrėžiama aibėje S su reikšmėmis S^* taip, kad ji išsaugo aibėse apibrėtų sąryšių struktūras. Pavyzdžiui, tarkime, kad S sudaro masę turintys fiziniai kūnai, o S^* yra realių skaičių aibė $\mathbb{R}$. Tegul $\succeq$ ir $\oplus$ yra binariniai sąryšiai aibėje S apibrėžti fizinių svorių lyginimu ir fizine svorių sudėtimi. Tegul $\geq$ ir $+$ yra įprastiniai binariniai sąryšiai apibrėžti tarp realiųjų skaičių.

Tada šeimos $N = (S, \succeq, \oplus)$ ir $M = (\mathbb{R}, \geq, +)$. Kūnams $a, b, \ldots \subset S$ priskiriami skaičiai $\phi(a), \phi(b), \ldots \subset \mathbb{R}$ atitnkantys masę taip, kad funkcijai ϕ: $S \to \mathbb{R}$ galioja savybės:

$$a \succeq b \Rightarrow \phi(a) \geq \phi(b) \quad \text{ir} \quad \phi(a \oplus b) = \phi(a) + \phi(b).$$

Šios funkcijos savybės išsaugo sąryšius tarp fizinių kūnų perkeldamos juos į matematinę erdvę. Vieną iš fizinių kūnų u galima išskirti taip, kad $\phi(u) = 1$.

Griežtai kalbant betkuri funkcija privalo būti apibrėžta aibėje, o aibę paprastai sudaro matematiniai objektai. Tačiau aibių teorijoje nagrinėjamas atvejis kai aibę sudaro nematematiniai elementai vadinami *urelementais*. Greta fizinių kūnų urelementais gali būti abstraktūs ar fantastiniai objektai. Sunkiausia dalis tokiais neįprastais atvejais yra apibrėžti sąryšius atspindinčius esmines nagrinėjamų elementų savybes. Pavyzdžiui, ekonomikoje nagrinėjamos gėrybių aibės S ir joje apibrėžtas preferencijos sąryšis $\succeq$ tenkinantis tokias savybes, kurios atitinka tai, kas vadinama "racionaliu sprendimu".

Kalbant apie matematikos taikymą iškyla tokie klausimai:

1. Kaip iš tikro matematika "sukimba" su fiziniu pasauliu? Tai yra klausimas, kurį tiria gana techninė mokslo filosofijos sritis vadinama "measurement theory".

2. Ar kai kurie objektai nagrinėjami įvairiose gamtos teorijose yra paprasčiausiai matematiniai objektai ar jie turi kitokį statusą? Ši problema iškyla atskirų gamtos mokslo sričių filosofijose. Pavyzdžiui, ar erdvė-laikas arba kvantinė būsena egzistuoja kuria nors prasme besiskiriančia nuo jų matematinės išraiškos, arba tai yra nieko daugiau kaip matematikos objektai?

3. Ar matematika nepakeičiama gamtos moksluose? Kadangi savo laiku W. V. O. Quine ir H. Putnam pirmieji atsakė į šį klausimą - taip, o H. Field po to teigė - ne, tai šis klausimas matematikos filosofijoje tapo centriniu diskusijoje tarp vadinamųjų realistų ir nominalistų. Prie šio klausimo grįšime 3 skyriuje aptardami "nepakeičiamumo argumentą".

Jei matematika yra tokia skirtinga nuo gamtos ir visuomenės mokslų, tai ar pati ji yra mokslas; nepaisant to, kad graikų kalba $math\tilde{e}ma$ reiškia "mokslas, žinios ar pažinimas".

2.3 Ar matematika yra mokslas?

Mokslu vadinamas ir žinių įgyjimo procesas ir susistemintos žinios, įgytos šiuo procesu[2]. Tuo tarpu mokslo procesas yra sistemingas naujų žinių apie išorinį pasaulį įgyjimas, vadinamas moksliniu metodu.

Turbūt nenuostabu, kad žodžiai "faktas", "hipotezė", "modelis", "teorija" ir "dėsnis" moksle ir kasdieninėje kalboje ir mokslo kontekste vartojami skirtingomis prasmėmis. Žmonės nesusiję

[2]Anglų kalboje žodis "science" paprastai siejamas su gamtos mokslais. Rusų kalboje žodis "nauka" siejamas ir su literatūra, ir su suvirinimu, ir su mezgimu ir pan. Tuo tarpu mūsų kalboje, remiantis Lietuvių kalbos žodynu, kartu su įprastiniu reikšmių sąrašu, žodis "mokslas" taip pat reiškia svarbius religijos teiginius ar nurodymus, o seniau mokslu buvo vadinamas ir pamokslas

su mokslu dažnai "faktu" vadina tai, ką mokslininkai vadina "teorija". Kasdieninėje kalboje žodis "teorija" reiškia tas idėjas, kurios dar neturi pakankamo pagrindimo; kai tuo tarpu mokslinėje terminologijoje šis žodis reiškia tas idėjas, kurios nekartą išlaikė griežtą patikrinimą. Mokslo teorijos keičiamos naujomis, kai tik atsiranda joms prieštaraujančių faktų, arba kai atsiranda naujos įvairiais požiūriais labiau priimtinos teorijos. Tai nereiškia, kad atmestoji teorija tapo neteisinga. Griežtai kalbant jokia mokslinė teorija nepateikia tikslaus tikrovės vaizdo - tokio, kokia yra pati tikrovė visoje savo įvairovėje. Teorija yra tik apytikris tikrovės vaizdas tam tikru aspektu. Vaizdžiai kalbant teorija galėtume laikyti pasaulio žemėlapiu, kuriame atvaizduojami tik tam tikri objektai skirtingais aspektais (pavyzdžiui, geografinis, klimato, geologijos ir kt. žemėlapiai). Atsiradus naujam, tikslesniam žemėlapiui (teorijai), senasis yra išmetamas arba naudojamas tada, kai tikslesnis naujasis žemėlapis nereikalingas.

Pavyzdžiui greičiu sudėtis aprašoma dviem skirtingomis teorijomis. Tarkim kamuolys išmestamas iš lėktuvo greičiu W, o lėktuvas skrenda greičiu V. Su šiais greičiais susiesime realius skaičius $w = \phi(W)$ ir $v = \phi(V)$. Klasikinėje fizikoje greičių kompozicija $\oplus$ turi paprastą formą: $\phi(W \oplus V) = \phi(W) + \phi(V) = w + v$. Tuo tarpu reliatyvistinėje fizikoje greičių kompozicija įgyja sudėtingesnę formą:

$$\phi(W \oplus V) = \frac{\phi(W) + \phi(V)}{1 + [\phi(W) \cdot \phi(V)]/c^2} = \frac{w + v}{1 + (wv)/c^2},$$

čia c yra šviesos greitis.

Apytiksliai kalbant, gamtos dėsnis yra reiškinių reguliarumas, t. y. reiškinių pasikartojimas tam tikromis aplinkybėmis. Hipotezė yra toks požiūris, kuris dar nėra pakankamai pagrįstas arba dar neatmestas remiantis eksperimentu. Terminu "modelis" mokslininkai vadina tokį reiškinio ar dalyko apibudinimą, kuris gali būti naudojamas tiek prognozei, tiek ir tikrinimui remiantis eksperimentu ar stebėjimu. Lyginant modelį su teorija, pirmasis terminas dažniau naudojamas nusakyti reiškinį, o antrasis - paaiškinti. Be to, priklausomai nuo konteksto ta pati mokslo žinių sistema gali būti vadinama tiek teorija, tiek ir modeliu.

Mokslo efektyvumas ir naudingumas visuomenei verčia ieškoti filosofinio paaiškinimo. Mokslo filosofija siekia suprasti mokslo žinių prigimtį ir pateisinimą, bei išsiaiškinti mokslinio proceso etines pasekmes. Pasirodė jog labai sunku tiksliai nustatyti kas skiria mokslą nuo nemokslo ir kas sudaro mokslinio metodo esmę.

Matematika yra mokslo pagrindas. Svarbiausia matematikos funkcija moksle yra galimybė formuluoti mokslinį modelį. Stebint ir renkant duomenis, bei kuriant hipotezes ir prognozuojant, paprastai yra būtinas matematinis modelis bei matematinė teorija. Dažniausiai naudojamos matematinės teorijos yra analizė ir statistika, tačiau taikomos net ir pačios abstrakčiausios matematikos sritys: skaičių teorija ir topologija.

Kai kurie filosofai matematiką priskiria gamtą tiriančių mokslų sistemai, o matematinį įrodymą intepretuoja kaip eksperimentą. Tačiau kita dalis filosofų nemano matematiką esant mokslu, kadangi matematinėms teorijoms patvirtinti nėra reikalingas gamtamokslinis eksperimentas. Bet kuriuo atveju, matematikos efektyvumas moksle yra pagrindinė matematikos filosofijos problema.

Kiekvienas mokslas turi savo tyrimo objektą. Todėl jei matematika yra mokslas, tai kas yra jos tyrimo objektąs?

2.4 Šiuolaikinė matematikos filosofija

Iš to, kas pasakyta ankstesniame skyrelyje, kyla klausimas tai apie ką kalbama matematikoje, jei ne apie mus supantį pasaulį. Nenuostabu, jog svarbiausiu šiuolaikinėje matematikos filosofijoje tapo klausimas kas yra matematikos tyrimo objektas ir kaip įgyjamos žinios apie jį?

Pagrindiniai požiūriai. Anksčiau įrodyta teorema apie pirminius skaičius priklauso aritmetikai ir tai rodo, jog aritmetikoje kalbama apie skaičius. Taigi konkrečiai šiuo atveju klausiama kas yra *skaičius*? Tur būt sutinkame, jog skaičiai nėra mus supančio pasaulio daiktai, panašiai kaip medžiai, kalnai, žmonės. Taip pat žinojimas apie skaičius neatsiranda stebint jų elgesį. Galima manyti, jog jei aritmetikoje kalbama apie skaičius, tai skaičiai egzistuoja. Jei jie egzistuoja, tai ar jų egzistavimas priklauso nuo matematiko, jo proto, kalbos ir taip toliau? Požiūris pagal, kurį matematikos objektai egzistuoja nepriklausomai nuo matematikų vadinamas *realizmu ontologijoje* arba *platonizmu*.

Priešingas platonizmui yra *anti-realizmas*, kuriam priskiriami ivairūs požiūriai, pavyzdžiui, nominalizmas ir idealizmas. *Idealistas* sutinka, kad matematikos objektai egzistuoja, tačiau mano, kad jie priklauso nuo žmogaus proto. Jis gali teigti, kad matematikos objektai atsiranda konkretaus matematiko protinės veiklos dėka. Tiksliau toks požiūris vadinamas *subjektyviuoju idealizmu*, pagal analogiją požiūriui apie fizinių objektų prigimtį. Tokiu būdu, subjektyvaus idealizmo požiūriu, kiekvienas matematikas turi savo nuosavus skaičius, funkcijas, aibes ir panašiai. Kiti idealistai matematikos objektus priskiria sričiai, kuri yra prieinama visiems žmonėms. Tokiu atveju matematika susijusi su tuo, kas turi galimybę būti sukonstruojamu. Toks idealizmas vadinamas intersubjektyviu. Visi idealistai sutinka su tuo, kad jei nebūtų proto, tai nebūtų ir matematinių objektų. Tuo tarpu platonistai neigia šią poziciją tvirtindami, kad matematikos objektai egzistuoja nepriklausomai nuo proto.

Nominalizmas yra dar radikalesnis objektyvaus matematinių objektų egzistavimo neigimas. Viena jo versija teigia, jog matematikos objektai yra tik kalbos konstrukcijos. Ką tai galėtų reikšti? Tarkime mes skiriame žodžius "Rimas Norvaiša" nuo žmogaus su šiuo vardu, panašiai kaip bet kurį daiktą nuo jo pavadinimo. Kai kurie nominalistai neigia matematinius objektus turint tokį skirtumą, sakydami, kad, pavyzdžiui, skaičius devyni yra tas pats kaip jo užrašas - skaitmuo 9, IX, nine - ir nieko daugiau. Tačiau kiti nominalistai tiesiog neigia matematikos objektų egzistavimą.

Jei matematikos objektai egzistuoja, tai kaip jie atrodo ir kaip jie susiję su labiau įprastais realaus pasaulio daiktais? Pati platonizmo nuostata nieko apie tai nesako, išskyrus objektyvaus egzistavimo teigimą. Tačiau tarp platonistų yra paplitęs požiūris jog matematikos objektai nėra susiję priežastiniais ryšiais, yra amžini, nesunaikinami, ir nepriklauso erdvės-laiko sistemai. Dėl šių savybių realizmas ontologijoje ir vadinamas platonizmu nes Platono Formos pasižymi panašiomis savybėmis, išskyrus priežastinius ryšius.

Ontologinės ir epistemologinės problemos. Platonizmas neblogai paaiškina matematikos teiginių būtinumo pobūdį. Jei matematikos tyrimo objektas yra toks kaip jį apibudina platonizmas, tai matematikos teiginių teisingumas nepriklauso nuo nieko kas susiję su fiziniu pasauliu ar su žmogaus protu.

Problema su platonizmu atsiranda tada, kai remiantis šiuo požiūriu bandoma suprasti matematikos žinių aprioriškumo pobūdį. Kaip žmogus, būdamas fiziniu objektu, gali pažinti matematikos realybę, kuri savo esminėmis savybėmis skiriasi nuo fizinio pasaulio. Jei toks ryšis yra tarp šių sričių, tai jis dažnai priskiriamas tam, kas vadinama "matematine intuicija". Neretai į šį pojūtį nurodoma, kai kalbama apie matematikos aksiomų intuityvų supratimą. Kadangi matematinė intuicija lyg ir nepriklauso nuo jutiminių pojūčių (regėjimas, klausa, ...), tai toks ryšys tarp proto ir matematikos realybės gali neblogai paaiškinti matematikos žinių aprioriškumą. Tačiau matematinės intuicijos egzistavimo prielaida yra dažnai filosofų atmetama dėl tos priežasties, kad nėra mokslinių duomenų patvirtinančių jos egzistavimą.

Atmetus matematinės intuicijos idėją, ontologinis realistas lieka bejėgis su savo mislingu episteminiu ryšiu. Jei platonistai yra teisūs ir matematikos objektai priklauso trečiajai mistinei erdvei (pirmoji erdvė - fizinis pasaulis, antroji erdvė - minčių pasaulis), tai kaip žmogus įgyja žinias apie ją?

Tai gal anti-realistams gyvenimas geresnis? Deja, anti-relistams problemos susikeičia vietomis. Tai kas realistams lengvai sprendžiama, anti-realistams yra problema ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, jei skaičiai yra žmogaus proto vaisius arba priklauso mąstymo sričiai, kaip tvirtina idealistai, tai matematinės žinios yra nuosavo proto žinojimo rezultatas. Toks žinojimas gali būti laikomas objektyviu tą prasme, kad nepriklauso nuo išorinių pojūčių ir patirties. Tokių žinių būtinumas suprantamas kaip nuosavo proto veiklos ir struktūros būtinumas. Tačiau problemos atsiranda bandant aiškinti pačios matematikos turinį ir jos naudojimo galimumą kitose žinojimo ir veiklos srityse. Pavyzdžiui, kaip suderinti natūrinių ir tuo labiau realių skaičių kiekio begalinumą su konkretaus proto ribotumu.

Jei matematikos objektai yra kalbos kontrukcijos, tai matematikos žinios yra kalbos žinojimas. Tada neaiškus tampa matematikos taiginių būtinumo ir aprioriškumo pobūdis. Tai priklausytų nuo nominalisto požiūrio į kalbą. Galiausiai ta pati problema iškyla siekiant kaip suderinti tokį požiūrį su matematikos realybe. Jei matematikos objektai neegzistuoja, tai nominalistas turėtų pasiūlyti, kaip formuluoti matematikos teiginius nesinaudojant nuorodomis į neegzistuojančius matematrinius objektus, arba belieka teigti jog matematikos teiginiai yra klaidingi ar tušti.

Matematikos teiginių teisingumas. Jei matematikos teiginiai nieko nesako apie išorinį pasaulį, tai kyla klausimas ką reiškia matematikos teiginiai? Kokia yra jų loginė forma? Šie klausimai priklauso matematikos kalbos objektyvumo problemų ratui. Požiūris pagal kurį matematikos teiginių teisingumo reikšmės yra objetyvios, t. y. nepriklauso nuo matematiko proto, kalbos susitarimų ir panašiai, vadinamas *teisingumo reikšmės realizmu*.

Priešingas šiam yra teisingumo reikšmės anti-realizmo požiūris sakantis, jog net ir esant teisingumo reikšmėms, jos gali būti priklausomos nuo matematiko.

Dažniausiai šiuolaikinės matematikos filosofijoje diskutuojama dėl dviejų klausimų: kokia yra matematinės tiesos prasmė (statusas) ir kokia yra matematikos objektų prigimtis? Kitais žodžiais tariant, kas suteikia matematikos teiginiams neklaidingumo jausmą ir galų gale *apie ką* tie teiginiai?

Tačiau ne visada šie klausimai buvo laikomi svarbiausiais matematikos filosofijoje. Dar visai nesenai, prieš keletą dešimtmečių, matematikos filosofija buvo tapatinama su tuo, kas vadinama matematikos pagrindais.

2.5 Matematikos filosofijos raida

Paprastai filosofai yra linkę spręsti pagrindų klausimus. Tokie išsireiškimai, kaip "žinojimo pagrindai", "moralės pagrindai", "fizikos pagrindai" nuolatos sutinkami su filosofija susijusiuose tekstuose. Jei konkreti žmonių veiklos sritis vystosi normaliai ar į ją žiūrima tolerantiškai, tai filosofų kalbos apie pagrindus paprastai ignoruojamos. Tačiau, jei kuri nors žinojimo sritis patiria krizę, tai filosofiniai svarstymai pritraukia papildomą dėmesį.

Manoma, kad matematikoje buvo keletas krizių. Pavyzdžiui, aptikus iracionalius skaičius, žlugo tikėjimas, jog geometriniai matavimai išreiškiami racionaliais skaičiais (Pythagor'as). Kita matematikos krizė susijusi su begalo mažų dydžių analize (Newton'as ir Leibniz'as).

Ypatingai stiprią intelektualinę savo srities krizę teko pergyventi devyniolikto amžiaus matematikams. Jie bandė įsisavinti neeuklidinę geometriją, atskirti geometriją nuo aritmetikos ir analizės, pagrįsti be galo mažų dydžių ir begalybės naudojimą, atskleisti aibės prigimtį, išvengti aibių teorijos paradoksų ir panašiai. Tuo pačiu metu matematiniai teiginiai tampa vis labiau bendri ir abstraktūs. To meto matematikų žavėjimasį "Dievo duotais natūraliaisiais skaičiais" keitė domėjimasis abstrakčia skaičių sistema, lygčių sprendimą keitė sprendinių grupių analizė. Tam, kad įprasminti visus šiuos pokyčius, devyniolikto amžiaus pabaigos ir dvidešimto amžiaus pradžios matematikams teko ieškoti naujų matematikos griežtumo ir jos teiginių prasmingumo vertinimo kriterijų. Simbolinė logika tapo tokio kriterijaus pagrindu to laikotarpio ir po jos einančioms matematikų kartoms. Svarbiausiu matematikos pagrindų architektu buvo Gottlob Frege (1848-1925) - vokiečių matematikas, logikas ir filosofas.

Frege veiklos motyvu buvo tiek noras rasti ontologiškai patenkinamą skaičiaus sąvoką, tiek ir griežtumo matematikoje siekis. Ypatingai svarbi yra jo matematinės sąvokos dviprasmiškumo analizė, kuri be kitą ko davė pradžią šiuolaikinei filosofijai. Frege tikėjo, jog matematika turėtų atsisakyti kasdieninės kalbos ir vietoje jos naudoti formalią kalbą. Tokios kalbos kūrimo pagrindu jis laikė simbolinę logiką.

Simbolinė logika yra dedukcinio mąstymo matematinis modelis; bent taip buvo iš pradžių. Toks modelis konstruojamas panašiai kaip yra kuriamas realaus lėktuvo modelis, išskiriant tam tikras lėktuvą geriausiai atspindinčias dalis. Tuo tarpu logika modeliuoja "logiškai teisingas" išvadas, vadinamas argumentais. Pavyzdžiui, silogizmas:

Visi žmonės yra mirtingi
Sokratas yra žmogus
Todėl, Sokratas yra mirtingas

Trečiojo teiginio išvedimas nepriklauso nuo konkretaus objekto vadinamo Sokratu. Išvada remiasi sakinio struktūra, bet ne empirinėmis žinuiomis apie mirtinguma. Net nesvarbu, ką reiškia „mirtingi", čia svarbu „visi". Loginis panašių išvadų teisingumas priklauso nuo formos bet ne nuo turinio.

Tačiau jau senokai matematika naudojo argumentus, kurie nėra išreiškiami tokiais paprastais silogizmais. Iki Frege pradedant savo mokslinę veiklą, "logika" reiškė Aristotelio logiką:

minties struktūra išreiškiama subjektu ir predikatu, nagrinėja tokius silogizmus kaip *Modus Ponens*, t. y. jei p ir $p \Rightarrow q$, tai q. Siekdamas matematikos teiginius išreikšti logikos pagalba, Frege iš esmės patobulino Aristotelio logiką, subjekto-predikato ryšį pakeisdamas funkcija P, kurios argumentas x yra subjektas, funkcijos reikšmė $P(x)$ yra arba tiesa arba netiesa, o pati funkcija P yra predikatas. Ši logikos forma apėmė Aristotelio logiką ir šiuo metu vadinama pirmos eilės predikatų logika. Kai kurie matematikos teiginiai yra sudaryti iš predikatų, kurių argumentais gali būti kitas predikatas, o atitinkama teorija vadinama aukštesnės eilės predikatų logika. Pavyzdžiui, antros eilės predikatų logikoje galimi teiginiai: "egzistuoja tokia sąvoka (predikatas) F, kad F galioja ....".

Frege tvirtino dar daugiau, kad taip pertvarkyta logika yra matematikos pagrindas tą prasme, jog visas matematikos sąvokas galima išreikšti logikos terminais ir visas matematikos teoremas galima išvesti naudojant tik logikos principus. Tiksliau, Frege tvirtino, jog logika pagrindžia aritmetiką ir analizę. Šias sritis jis skyrė nuo geometrijos, kuri anot jo savo teisingumą grindžia ne logika, bet intuityvia erdvės samprata. Tuo metu teigimas, jog aritmetika nesiremia patyrimu bet aritmetikos dėsniai išplaukia iš logikos ir yra atskiras jos atvejis buvo visiškai naujas. Tai taip pat reiškė paslaptingo matematikos žinių būtinumo ir aprioriškumo problemos sprendimą.

Šiai savo programai pagrįsti Frege reikėjo dviejų dalykų: (a) išvystyti savąją logikos versiją ir (b) nuosekliai išvesti klasikinę matematiką iš logikos. Tai jis bandė atlikti savo trijuose pagrindiniuose darbuose:

- Begriffsschrift, formalioji kalba, sudaryta pagal aritmetikos prototipą (1879);
- Die Grundlagen der Arithmetik, aritmetikos pagrindai, skaičiaus sąvokos loginis ir matematinis tyrimas (1884, žr [7]);
- Grundgesetze der Arithmetik, pagrindiniai aritmetikos dėsniai (du tomai 1893 ir 1903).

Tačiau paskutiniame veikale Bertrand'as Russell'as aptiko prieštaravimą, kuris neleido laikyti Frege programą užbaigta.

Nepaisant to, kai kurių filosofų nuomone, Frege indėlis į filosofiją yra didžiausias visų laikų požiūriu. Tiesa, Frege įtaka nebuvo tiesioginė. Savo gyvenimo laikotarpyje jis nebuvo viešai žinomas ir jo darbo nuopelnas nebuvo pripažintas. Tačiau, jo mokiniai ir kolegos (tarp kurių buvo Russell, Wittgenstein, Husserle) išpopuliarino Frege idėjas ir padarė jį didžiausiu logiku po Aristotelio. Frege programa tapo *matematikos pagrindų* programa: rasti neprieštaringus matematikos pagrindus. Šį darbą tęsė Cantor, Dedekind, Zermelo, Peano, Russell, Hilbert ir daugelis kitų matematikų.

Matematikos pagrindų paieška buvo vystoma daugeliu krypčių, kurios sudarė įvairias mokyklas. Russell'as kartu su Whitehead'u bandė išgelbėti logicizmą, t. y. Frege tezę, kad matematikos pagrindą sudaro logika. Savo veikale *Principia Mathematika*, jie Frege logikos versiją pakeitė vadinamąja tipų teorija. Tačiau dėl savo kai kurių prielaidų keistumo ši teorija nebuvo matematikų priimta. Be to, logicizmo žavumas nublanko ir dėl to, jog paplito daugelis kitų logikos variantų: daugelio reikšmių logika, intuicionistinė logika, modalinė logika ir kitos.

Kitą matematikos pagrindimo alternatyvą sudarė aibių teorija. Aibių teorija turėjo Russell'o sistemos galią ir be to buvo gerokai aiškesnė ir elegantiškesnė. Šį matematikos pagrindimo variantą sudarė klasikinės matematikos rekonstrukcija remiantis aibių teorija. Šios programos trūkumą sudarė neaiškumas kurias iš aibių teorijos aksiomų laikyti natūraliomis. Didžiausią kontraversiją šiuo klausimu sukėlė *pasirinkimo aksioma*.

Kitą alternatyvą logicizmui sudarė bandymas Russell'o logikos variantą pakeisti *metamatematika*, kurią turėtų sudaryti formalių sistemų loginis manipuliavimas. Šio formalizmo požiūriu, matematikos teoremos yra tiesiog loginės dedukcijos remiantis aibių sistemomis rezultatas. Matematikos pagrindas yra metamatematika, suteikianti jai reikalingus įrankius - formalią kalbą, teorijas ir išvedimo taisykles. Tokias formalizmo viltis surasti visai matematikai pakankamą, suderintą ir pilną formalią teoriją sužlugdė K. Gödel'io rezultatai.

Dar vieną matematikos pagrindimo galimybę nagrinėja vadinamoji *intuicionizmo* mokykla, kurios pradininku buvo Brouwer'is. Šios krypties išskirtiniu bruožu yra atsisakymas negalimo trečiojo dėsnio. Šis logikos dėsnis atmetamas todėl, kad jo teisingumas grindžiamas matematikos objektų egzistavimu nepriklausomai nuo matematikų, t. y. intuicionistų nuomone, šis dėsnis išplaukia iš realizmo ontologijoje nuostatos.

Ivairios matematikos pagrindimo programos yra vykdomos iki šiol. Tačiau palaipsniui paplito nuomonė, jog matematikai nereikia jokių pagrindų. Vietoje to matematikos filosofija turėtų domėtis kitais, anksčiau minėtais ir dar kitais matematikos problemų klausimais. Diskusiją apie matematikos pagrindų naudingumą galima rasti straipsnių rinkinyje [20].

2.6 Matematikos praktika

Matematikos praktiką apibudinsime keturiomis sąvokomis: kontekstu, pamatiniais susitarimais, turiniu ir intuicija.

Kontekstu vadinsime prielaidas, aksiomas ir apibrėžimus naudojamus tam tikroje matematikos srityje. Juos paprastai sudaro matematinės prielaidos ir logikos taisyklės. Kaip pavyzdį galima paminėti tai kas vadinama klasikine (tradicine) matematika ir konstruktyvine(iąja?) matematika.

Nėra visuotinai priimtinos nuomones ką laikyti tradicine matematika. Dažniausiai taip vadinami visi tie teiginiai, kuriuos galima įrodyti naudojant Peano aritmetiką, naiviąją aibių teoriją, pasirinkimo aksiomą ir tokią tiesos sampratą ("a naive notion of truth" ?) iš kurios išplaukia trečiojo negalimo dėsnis.

Pamatiniais susitarimais matematikoje galima vadinti tas procedūras, kuriomis remiantis, nagrinėjamo konteksto ribose, nustatomas teoremos įrodymo korektiškumas. Pavyzdžiui, jei kontekstas nereikalauja trečiojo negalimo dėsnio, tai reikia patikrinti ar ištikro nėra naudojamasi šia teiginių logikos tautologija. Jei pasirinkimo aksioma nėra reikalaujama nagrinėjamame aibių teorijos kontekste, tai ja negalima naudotis. Panašiai galima teigti ir apie lygiagrečių tiesų aksiomą projektyvinėje geometrijoje ar apie Robinsono tipo be galo mažus dydžius nestandartinėje analizėje.

Matematinės teoremos įrodymą sudaro argumentai, įtikinantys jog iš teoremos prielaidų išplaukia teoremos teiginys. Šie argumentai išreiškiami neformaliai naudojantis matematine logika. Iš pricipo įrodymą visada galima užrašyti naudojantis formaliąją logikos kalba, tačiau jis būtų per daug ilgas ir sunkiai suvokiamas žmogaus protui bet ne skaičiavimo mašinai. Kiekviena įrodymo eilutė yra teisinga arba ne, ir jei visos eilutės yra teisingos, tai ir visas teoremos ėrodymas yra teisingas. Toks įrodymo teisingumo supratimas nepriklauso nuo konkretaus konteksto ir yra vienas iš pamatinių susitarimų matematikoje. Praktiškai matematika visada sutaria dėl to ar konteksto ribose įrodymas yra korektiškas. Nesutarimai dažnai iškyla dėl to, kad kai kurie įrodymo žingsniai yra per daug neformalūs ir todėl reikalauja patikslinimų tam, kad įsitikintu viso teoremos įrodymo korektiškumu.

Trečioji matematikos praktiką apibudinanti sąvoka yra *turinys*. Ją sudaro teoremos, tiek individualios tiek ir jų grupės, sudarančios teoriją ir įrodytos konkrečiame kontekste. Kai matematikas sako, jog teorema yra teisinga, tai jis turi galvoje arba, kad perskaitė ir suprato įrodymą, arba pasitiki tais, kurie tai padarė. Kai matematikas sako, kad teorema yra klaidinga, tai jis arba žino kontr-pavyzdį (pavyzdį, tenkinatį teoremos sąlygas bet paneigiantį jos teiginį), arba žino, kad teiginys kam nors prieštarauja, arba galvoja, jog nesunkiai gali sukonstruoti tokį prieštaravimo pavyzdį.

Žodžiai, "teorema yra teisinga" ar "teorema yra klaidinga" primena pasakymus "faktas yra teisingas" ar "faktas yra klaidingas", o tai yra žodžiai vartojami kalbant apie išorinį pasaulį. Tačiau matematikų terminologija nesiremia nuorodomis į įšorinį pasaulį. Be to, matematikai gali tikėti, jog kurio nors teiginio įrodymas galų gale bus *surastas* ir jis taps teorema. Tačiau tikėjimo teiginiai nėra publikuojami kaip matematikos teiginiai, nors kartais tokie teiginiai išreiškiami akademiniuose žurnaluose kaip autoriaus nuomonė.

Greta matematikos teiginių vadinamų teoremomis vartojami ir tokie teiginių pavadinimai kaip "lema", "teiginys" ir "išvada". Tradiciškai "lema" vadinamas pagalbinis rezultatas, neturintis savarankiškos reikšmės ir dažniausiai naudojamas supaprastinti teoremos įrodymui; "teiginiu" vadinamas mažai savarankiškos reikšmės turintis rezultatas, o "išvada" yra tiesiog lengvai iš teoremos išplaukianti pasekmė. Šių pavadinimų vartojimas nėra formaliai apibrėžtas ir dažniausiai atspindi autoriaus požiūrį į teiginių reikmę teorijoje.

Ketvirtoji ir matyt pati įdomiausia sąvoka yra *intuicija*, įgalinanti matematiką spręsti apie tai, kokias teoremas galima tikėtis įrodyti tam tikrame kontekste. Paprastai intuicija grįsti samprotavimai nėra publikuojami nes jie yra asmeninio pobūdžio. Apie intuiciją ....

Matematikų intuicijos pobūdis labai skiriasi, tačiau dauguma iš jų pamena tuos atvejus, kai intuicija paveda, t. y. jie tikėjo teiginio teisingumu, kai tuo tarpu jis pasirodė neteisingas, arba atvirkščiai. Nepasitvirtinus intuicijai, ji gali buti keičiama ir neretais atvejais gana skausmingai. Nekeičiant intuicijos, galima bandyti keisti teorijos kontekstą, keičiant aksiomas arba apibrėžimus. Derinant intuiciją su turiniu galimas uždaras ratas - turinio pasikeitimas, keičia intuiciją, nauja intuicija keičia kontekstą, kai tuo tarp kontekstas nulemia turinį. Visa tai labai susiję ir galima sakyti jog matematinę kūrybą sudaro tokių uždarų ratų atradimas ar kūrimas. Jų svarba priklauso nuo originalumo ir rezultato techninio netrivialumo.

Pateikti pavyzdį kai intuicija perieštaravo turiniui (funkcijos samprata?) ....

Konteksto, pamatinių susitarimų, turinio ir intuicijos vaidmenius matematikos praktikoje taip pat iliustruoja matematikos sintaksės ir semantikos apibudinimas šiomis sąvokomis. Akivaizdu, jog pamatinius susitarimus naudojamus patikrinti įrodymams galima vadinti sintakse, kai tuo tarpu intuicija yra laikytina semantine kategorija. Jei žiurima tik į užbaigtą matematinę teoriją, tai nesunkiai galima susidaryti vaizdą jog matematiką sudaro tik sintaksė, nes tuo atveju sužinome tik apie aksiomas, apibrėžimus ir teoremų įrodimus. Toks matematikos vertinimas nesunkiai pagrindžia požiūrį į matematiką vadinamą formaliu Hilberto prasme.

Tuo tarpu matematika yra tikslinga veikla, ir jos turinį lemia žmogaus intuicijos veikimas.

Intuicijos ir matematikos turinio derinimo procesas gali vesti prie netikėtų rezultatų. Kuo didesnę patirti matematikas turi konkrečioje srityje, tuo greičiau jis patikrins teoremos įrodimą suvokdamas jo idėją, o detales tikrina tik po to, kai įsitikina jog teiginys neprieštarauja jo intuicijai ir jis supranta bendrą įrodymo schemą. Nuoseklus įrodymo skaitimas atliekamas tik tais atvejais, kai sritis yra visiškai nauja. Patyrusio matematiko požiūriu, teorija suvokiama remiantis intuicija, o formalūs aspektai laikomi tik detalėmis.

Klausimai:

1. Matematikos teiginiai yra išradimai ar atradimai?
2. Apie ką yra matematika, jei iš viso apie ką nors?
3. Kaip matematika suvokiama?
4. Ką reiškia matematikos teiginiai?
5. Kokiu mastu matematika yra objektyvi ir nepriklausoma nuo proto, kalbos ir socialinės struktūros?
6. Koks yra ryšys tarp matematikos ir mokslų, įgalinantis jos taikomumą?

Pastabos. Postnikov (1997) teigiama, kad gamtos moksluose pasaulis tiriamas ne tiesiogiai, bet naudojant modelius kaip tarpininkus. Kitas pastebėjimas yra tai, kad kai kurie skirtingose mokslo srityse naudojami modeliai sutampa. Tokį modelių sutapimą apibudinant kaip jų priklausimą tai pačiai *schemai*, matematika yra apibrėžiama kaip mokslas apie visas galimas schemas, jų ryšius, konstravimo būdus, schemų hierarchijas ir panašiai.

Steiner (1999), konkrečiais pavyzdžiais iš fizikos, atskleidžia matematikos esminį vaidmenį bandant paaiškinti fizinį pasaulį. Norėdamas pagrįsti matematikos efektyvumą, autorius siūlo antropocentristinį pasaulio suvokimą. Šis požiūris pakečia evoliucinį, pagal kurį žmogaus atsiradimas buvo tik atsitiktinumas.

Omnés (2004) siekia pagrįsti, kad matematika *yra* fizika ta prasme, jog matematika nusako visatą ir elementarias daleles nusakančius dėsnius.

Lietuvių kalba parašyta, A. Baltrūno (2004) knyga apie tris krizes matematikoje siejant jas su begalybės sampratos problemomis.

Papildoma literatūra.

1. Baltrūnas, A. (2004). Begalybės biografija. Žara, Vilnius.
2. Goodman, N. D. (1979). Mathematics as an objective science.
3. Omnés, R. *Converging Realities: Toward a Common Philosophy of Physics and Mathematics*. Princeton University Press, 2004.
4. Postnikov, M. M. (1997). Ar matematika yra mokslas? (rusų kalba). Matematicheskoje Obrazovanije, 1997, No. 2, 83-88.
5. Steiner, Mark. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Harvard University Press, 1999.
6. Wigner, Eugene. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (February 1960). Taip pat tinklapyje: http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

Skyrius 3

Matematiniai objektai ir matematinis objektyvumas

Mathematics is not real, but it feels real. Where is this place?
Richard Feynman

Kas yra tiriama matematikoje? Ar matematika turi savo tyrimo objektą? Neabejotinai vienas iš svarbiausių klausimų, pradedant rimtai mąstyti apie matematiką. Trumpam pabandžius prisiminti savo matematines žinias, arba tiesiog žvilgterėjus į praeitame skyriuje įrodytą teoremą apie pirminius skaičius, matome, kad matematikoje kalbama apie skaičius, funkcijas, aibes ir kitus panašius dalykus. Kas yra visi šie dalykai, kuriuos vadiname matematiniais objektais? Ar galima teigti, jog skaičiai, funkcijos ir aibės egzistuoja vien dėl to, kad jie yra nuolatos minimi matematiniame tekste?

Matematikos filosofijoje dažnai sakoma, kad "matematiką galima suvesti į aibių teoriją". Tai reiškia, kad tokie matematikos objektai, kaip skaičiai ir funkcijos, apibėžiami naudojantis tik aibių pagalba. Jei taip, tai matematikos objektų prigimties klausimas tampa klausimu apie aibių prigimtį.

3.1 Natūralieji skaičiai ir aibės

Aibių teorijos tapimas matematikos pagrindais vyko palaipsniui, bandant spręsti matematikos griežtumo problemas. Būtent, 19 amžiaus viduryje, ieškomi be galo mažų dydžių analizės pagrindimo būdai, ir tam naudojama naujoji Weierstrass'o ribų teorija. Tai savo ruožtu skatino realiųjų skaičių apibrėžimo paiešką. Tam skirtas Dedekind'o metodas rėmėsi aibės sąvoką. Matematikos objektu aibė tapo dėka G. Cantor'o (1845-1918) 19-o amžiaus septintame dešimtmetyje, kurios ankstyvąją teoriją jis sukūrė norėdamas pagrįsti begalybės vartojimą. Ankstyvoji Cantor'o aibių teorija ir natūrinio skaičiaus sąvoka įgalino sugriežtinti matematinės analizės pagrindus. Tuo būdu matematika buvo suvesta į natūraliuosius skačius ir aibes. Tačiau klausimas apie natūraliųjų skačių apibrėžimo pagrindimą išliko atviras. Kodėl redukcija į aibių teoriją sustojo ties natūraliaisiais skaičiais? Sunkiausias filosofines problemas sukelia paprasčiausi dalykai, šiuo atveju paprasčiausi matematikos objektai - natūralieji skaičiai.

Klausimą apie natūraliųjų skaičių pagrindimą 1889 metais Peano sprendė naudodamas aksiomatizacijos metodą. Neformaliai Peano aksiomos formuluojamos taip:

1. 0 yra natūralusis skaičius;
2. kiekvienas natūralusis skaičius n turi *įpėdinį* $S(n)$;
3. nėra natūralaus skaičiaus, kurio įpėdiniu būtų 0;
4. skirtingi natūralieji skaičiai turi skirtingus įpėdinius, t. y. jei $k \neq n$ tai $S(k) \neq S(n)$;
5. jei kuria nors savybe pasižymi 0 ir įpėdinis skaičiaus pasižyminčio šia savybe, tai šia savybe pasižymi visi natūralieji skaičiai (matematinės indukcijos principas).

Nors ir griežta Peano natūraliųjų skaičių charakterizacija, vis dar turi trūkumų. Pavyzdžiui ji nepasako kas yra 0 ir įpėdinis. Taip pat neapibrėžia natūrinių skaičių aibės vieninteliu būdu. Pavyzdžiui, lyginiai natūralieji skaičiai taip pat tenkina šias aksiomas.

Sekantį žingsnį natūraliųjų skaičių pagrindimo linkme padarė Frege. Jo pasiūlyta skaičiaus sąvoka yra ontologinė ta prasme, jog skaičiai yra tam tikrų aibių vardai. Toliau pateikiamas Frege skaičiaus apibrėžimas turėjo tikslą visą matematiką suvesti į logiką.

Kiekvieną savybę atitinka aibė visų objektų turinčių šią savybę ir kuri vadinama tos savybės *ekstensija*. Ekstensija žymima $\{x\colon P(x)\}$, t. y. aibė visų x turinčių savybę $P(x)$. Pavyzdžiui ekstensija $\{x\colon x \neq x\}$ yra tuščia aibė $\varnothing$, nes nėra objektų su tokia savybe. Tegul $M = \{$obuolys, akmuo, kamuolys$\}$, o $P_M(x)$ reiškia, kad x ir M turi tą patį elementų kiekį. Tada savybės P_M ekstensija $\{x\colon P_M(x)\}$ gali pretenduoti į skaičiaus 3 apibrėžimą. Tačiau taip apibrėžti skaičiai tarpusavyje lyg ir nesusiję. Todėl Frege siūlė natūraliuosius skaičius apibrėžti taip:

$$
\begin{aligned}
0 &:= \{x\colon P_{\varnothing}(x)\} = \{x\colon x \text{ ir } \varnothing \text{ turi tą patį elementų kiekį}\} \\
1 &:= \{x\colon P_{\{0\}}(x)\} = \{x\colon x \text{ ir } \{0\} \text{ turi tą patį elementų kiekį}\} \\
2 &:= \{x\colon P_{\{0,1\}}(x)\} = \{x\colon x \text{ ir } \{0,1\} \text{ turi tą patį elementų kiekį}\} \\
& \quad \text{ir t.t.}
\end{aligned}
$$

Toks natūraliųjų skaičių apibrėžimas naudojant aibes parodo jų fundamentalų vaidmenį matematikoje. Natūralieji skaičiai apibrėžiami naudojant savybės sąvoką, savybės ekstensiją (aibę), lygybę ir neigimą - visos šios sąvokos priklauso logikai, ne matematikai.

Problema su šiuo apibrėžimu išryškėjo netrukus. B. Russell'as parodė, jog yra loginių sunkumų susijusių su tuo, kad bet kuri savybė turi ekstensiją.

Aibė yra rinkinys objektų[1], vadinamų (aibės) elementais, o pats rinkinys laikomas vienu objektu. Griežtai kalbant, tai nėra aibės apibrėžimas, nes sąvoka "rinkinys" nėra apibrėžta. Šiuolaikinėje matematikoje, aibė ir buvimas jos elementu yra pirminės sąvokos apibrėžiamos aksiomatiškai (žr. A Priedo A.2.2 skyrelį). Norėdami pasakyti, kad x yra aibės A elementas, rašome $x \in A$. Užrašas $x \notin A$ reiškia, kad x nėra aibės A elementas.

[1] čia ir toliau "objektas" suprantamas plačiąja prasme (žr B Priede terminų žodinėlį B.1)

Pavyzdžiui, sudarykime aibę, kurios elementais yra pirminiai skaičiai neviršijantys 10. Šios aibės elementais yra skaičiai 2, 3, 5 ir 7. Nurodyti į šią aibę galima įvairiai. Vienas iš būdų yra tiesiog išvardinti jos elementus tarp riestinių skliaustų: $\{2, 3, 5, 7\}$. Pažymėkime šią aibę raide A ir tegul B yra aibė, kurios elementais yra lygties

$$x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$$

šaknys. Pakankamai darbštus skaitytojas galėtų įsitikinti, kad aibė B yra sudaryta iš skaičių 2, 3, 5 ir 7. Dėl šios priežasties A ir B yra tos pačios aibės, t. y. $A = B$. Nesvarbu, kad abi šios aibės yra apibrėžiamos skirtingai. Jos yra lygios vien dėl to, kad jas sudaro tie patys elementai.

Apibendrindami šį pavyzdį galime suformuluoti *ekstencijos principą*: jei dvi aibės turi tuos pačius elementus, tai jos yra lygios. Rašymo ekonomijos ir aiškumo tikslu, neretai naudojami sutrumpinimai ir simboliniai žymėjimai. Tarp tokių sutrumpinimų yra ir "t.t.t" reiškiantis frazę "tada ir tik tada, kai". Kitų dažnai naudojamų žymėjimų paaiškinimus galima rasti A Priedo A.2.1 skyrelyje. Ekstencijos principą galima suformuluoti ir taip: jei A ir B yra tokios aibės, kad su bet kuriuo objektu x, $x \in A$ t.t.t $x \in B$, tai $A = B$. Kadangi "$A = B$" reiškia, kad A ir B yra tie patys objektai, tai yra teisinga ir atvirkštinė implikacija: jei A ir B yra tokios aibės, kad $A = B$, tai su bet kuriuo objektu x, $x \in A$ t.t.t $x \in B$.

Aibė, kuri neturi nei vieno elemento vadinama *tuščia aibe* ir žymima $\varnothing$. Remiantis ekstensijos principu, tuščia aibė yra vienintelė. Pastebėsime, kad $\varnothing$ ir $\{\varnothing\}$ yra dvi skirtingos aibės, nes $\varnothing \in \{\varnothing\}$ ir $\varnothing \notin \varnothing$. Su bet kuriais dviem objektais x ir y galima sudaryti aibes $\{x, y\}$ ir $\{y, x\}$, kurios yra lygios, nes abi jas sudaro tie patys du elementai. Atskiru atveju, kai $x = y$, yra teisinga lygybė $\{x, x\} = \{x\}$.

Paprastai aibė yra apibrėžiama formuluojant sąlygą, kurią privalo tenkinti objektai tam, kad būtų aibės elementais. Pavyzdžiui, su bet kuria aibe A, 2^A yra aibė sudaryta iš visų aibės A poaibių, arba $2^A := \{x\colon x \subset A\}$. Sąlyga, apibrėžianti aibę yra loginė formulė $P(x)$, priklausanti nuo objekto x, ir šia prasme P yra argumento x funkcija. Tokiu atveju sakoma, kad aibė $\{x\colon P(x)\}$ apibrėžiama abstrahavimo metodu. Taip buvo apibrėžta skyrelio pradžio aibė B.

Aibės apibrėžimas abstrahavimo metodu gali sukelti ir problemų, kaip rodo kitas pavyzdys. Aibę $C := \{x\colon x \notin x\}$ sudaro tie objektai, kurie nėra pačių savęs elementais. Tada galima klausti, ar C yra pačios savęs elementas? Jei $C \notin C$, tai C tenkina ją apibrėžiančią sąlygą ir todėl $C \in C$. Iš kitos pusės, jei $C \in C$, tai C netenkina ją apibrėžiančią sąlygą ir todėl $C \notin C$. Tačiau teiginiai $C \in C$ ir $C \notin C$ yra negali būti teisingais kartu, remiantis teiginių logikos prieštaravimo dėsniu (žr. A.1.1 skyrelį A Priede). Šis pavyzdys yra vadinamas Russell'o paradoksu. Bertrand'as Russell'as nusiuntė jį 1902 metais Gottlob'ui Frege, nes paradoksas reiškė Frege naudojamų logikos aksiomų nesuderinamumą.

Russell'o paradoksas buvo apeinamas (sprendžiamas ?) įvairiais būdais. Paprastai teigiama, kad loginė formulė yra apibrėžta tik po to, kai nurodomi objektai kuriems ji yra taikoma. Kitaip tariant funkcija yra apibrėžiama visų pirma nurodant jos argumento kitimo sritį. Tokiu būdu apibrėžiant aibę abstrahavimo metodu, būtina nurodyti aibę X, kurios elementais ir gali būti loginės formulės objektai, t. y. naudojamas toks aibės apibrėžimas $\{x \in X\colon P(x)\}$.

Tiesa, tokio ar panašaus ribojimo motivacija kėlė nemažesnes diskusijas nei pats Russell'o paradoksas. Pats Bertrand'as Russell'as rėmėsi *vicious circle* principu (ydingojo rato principu), iš esmės draudžiančiu nuorodą į savę. Tuo tarpu Kurt'as Gödel'is buvo įsitikinęs, kad panašūs paradoksai kyla ne matematikoje bet logikoje ir epistemologijoje, srityse kurias jis griežtai skyrė nuo matematikos. Jo manymu matematikoje visada kalbama apie konkrečias objektų aibes (skaičiai, funkcijos ir panašiai), kas ir apsaugo nuo Russell'o paradokso (žr. [10]).

Grįžtant prie Frege natūraliųjų skaičių apibrėžimo, kyla klausimas kaip jį pataisyti atsižvelgiant į Russell'o paradoksą. Paprastai natūralieji skaičiai apibrėžiami von Neumann'o būdu:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{\varnothing\}, \quad 2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad 3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

Kitas panašus natūraliųjų skaičių identifikavimo būdas pasiūlytas Zermelo:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{\varnothing\}, \quad 2 := \{\{\varnothing\}\}, \quad 3 := \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

Tačiau ir šie apibrėžimai susilaukė kritikos, kurios esmė tam, kad juose postuluojama daugiau savybių nei būtina natūraliems skaičiams apibrėžti. Pavyzdžiui, $0, 1 \in 2$ pagal pirmąjį apibrėžimą, bet $0 \notin 2$ ir $1 \in 2$ pagal antrąjį apibrėžimą.

Funkcija. Naudodamies aibe galime apibrėžti ir kitus įprastus matematikos objektus. Aibė sudaryta iš dviejų elementų dar vadinama nesutvarkyta pora. Pavyzdžiui, jei $\{x, y\} = \{u, v\}$, tai $x = u$ arba $x = v$. Naudojantis nesutvarkyta pora, sutvarkytą porą galima apibrėžti įvairias būdais. Pavyzdžiui, pasirinkime bet kuriuos du objektus a ir b, toliau naudojamus kaip žymės. Tada su bet kuriais dviem objektais x ir y apibrėšime *sutvarkytą porą* $(x, y) := \{\{x, a\}, \{y, b\}\}$. Nesunku patikrinti, kad su bet kuriais objektais x, y, u, v, $(x, y,) = (u, v)$ t.t.t $x = u$ ir $y = v$. Tai yra pagrindinė sutvarkytų porų savybė.

Jei X ir Y yra aibės, tai *binariniu sąryšiu* tarp šių aibių elementų vadinamas bet kuris sutvarkytų porų poaibis $R \subset X \times Y := \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}$. Tarkime R yra toks binarinis sąryšis, kad (1) su kiekvienu $x \in X$ egzistuoja toks $y \in Y$, kad $(x, y) \in R$ ir (2) su bet kuriais objektais $x \in X$ ir $y, z \in Y$,

$$\text{jei} \quad (x, y) \in R \quad \text{ir} \quad (x, z) \in R \quad \text{tai} \quad y = z.$$

Toks binarinis sąryšis R vadinamas *funkcija* apibrėžta aibėje X ir reikšmes įgyjanti aibėje Y, naudojant žymėjimą: $f(x) = y$ t.t.t kai $(x, y) \in R$. Kadangi binarinis sąryšis apibrėžiamas per sutvarkytas poras, o šios savo ruožtu apibrėžiamos per aibes, tai funkcija yra apibrėžiama naudojantis tik aibėmis.

3.2 Abstraktūs objektai

Kaip buvo minėta, požiūris, jog matematiniai objektai egzistuoja nepriklausomai nuo matematikų, t. y. egzistuoja objektyviai, vadinamas *ontologiniu realizmu* arba *platonizmu*. Požiūris priešingas ontologiniam realizmui yra vadinamas *anti-realizmu*. Ontologinis realizmas nieko daugiau neteigia apie matematinius objektus išskyrus tai, kad jie objektyviai egzistuoja. Šis požiūris nepasako, pavyzdžiui, kuo matematiniai objektai skiriasi nuo įprastų mūsų aplinkoje nuolatos sutinkamų daiktų: medžių, akmenų ar obuolių. Paprastai tie, kas mano jog matematiniai objektai egzistuoja objektyviai, taip pat teigia, jog šie objektai neturi erdvės ar laiko požymių ir nėra susiję priežastiniais ryšiais. Šios savybės dažnai priskiriamos objektams, kurie vadinami abstrakčiais. Taigi manoma, jog matematiniai objektai yra *abstraktūs*. Deja, toks matematinių objektų charakterizavimas nelabai pagilina mūsų žinias, kadangi abstraktūs objektai savo ruožtu yra ne mažiau paslaptinga filosofinė kategorija nei matematiniai objektai.

Visus mūsų gyvenime pasitaikančius objektus ir reiškinius galima būtų suskirstyti į dvi rūšis: konkrečius ir abstrakčius. Apytikriai kalbant konkrečiais laikomi tie objektai ar reiškiniai, kuriuos užčiuopia mūsų pojūčiai, t. y. fiziniai kūnai: medžiai, akmenys, debesys ir t.t. Likusius objektus, tokius kaip matematiniai objektai: klasės, aibės, skaičiai, funkcijos, priskiriame antrajai, abstrakčių objektų, rūšiai. Šis sąrašas gali būti tęsiamas toliau:

abstraktūs objektai	*konkretūs objektai*
matematiniai objektai	fiziniai kūnai
sąvybės ir sąryšiai	mintys
prezidento institucija	V. Adamkus

Tačiau tikslesnis konkrečiųjų ir abstrakčiųjų objektų apibūdinimas yra gerokai sudėtingesnis ir atrodo visuotinai priimtino kriterijaus skyriant objektus į šias dvi rūšis nėra. Bet kuriuo atveju, matematiniai objektai yra laikomi pagrindiniais abstrakčiųjų objektų pavyzdžiais.

Yra keletas būdų, kuriais remiantis dauguma objektų ar reiškinių yra skirstomi į konkrečius ar abstrakčius. Tačiau prieš aptariant juos verta apžvelgti istorinį kontekstą.

3.2.1 Istorinės pastabos

Šiuolaikinis abstrakčių ir konkrečių objektų skyrimas, gerokai besiskiriantis nuo ankstesniojo, susiformavo maždaug 19-ojo amžiaus pabaigoje. Be to, toks objektų ir reiškinių skirstymas nebuvo reikšmingas filosofijoje iki 20-ojo amžiaus. Šiuolaikinis skyrimas šiek tiek primena Platono skyrimą tarp to, kas turi formą ir jutimų. Tačiau Platono formos tariamos esant priežastimis, kai tuo tarpu abstraktūs objektai laikomi inertiškais priežastingumo atžvilgiu visomis galimomis prasmėmis.

Pradinis abstrakčių-konkrečių objektų skyrimas buvo skyrimas tarp žodžių arba terminų. Tradiciškai gramatika (morfologija) skiria abstrakčius daiktavardžius nuo konkrečių. Anglų kalboje abstraktus daiktavardis "whiteness" skiriasi nuo konkretaus "white". Tuo tarpu lietuvių kalboje abstrakčiais laikomi daiktavardžiai reiškiantys neskaičiuojamus dalykus: remontas, aplinka, valstybingumas, pajėgumas. Toks lingvistinis rūšiavimas nereiškia žodžiams atitinkančių daiktų ar reiškinių rūšiavimo.

Maždaug 17 amžiuje gramatinis abstraktaus-konkretaus rūšiavimas persikėlė į idėjų sritį. Pavyzdžiui Locke[2] kalba apie bendrą "trikampio" įdėja, kuri nesutampa su stačiuoju, lygiašoniu ar lygiakraščiu trikampais. Tačiau Lock'ui abstrakčių idėjų išskirimas nereiškė panašų skyrimą tarp atitinkamų objektų: "It is plain,..." - sako Lock'as, "that general and Universal, belong not to the real existence of things; but are Inventions and Creatures of the Understanding, made by it for its own use, and concern only signs, whether Words or Ideas" (Essay III.iii.11). (An Essay Concerning Human Understanding?)

[2] John Locke (1632-1704) - anglų filosofas.

Šiuolaikinė abstraktaus-konkretaus rūšiavimas brėžia liniją tarp objektų. Toks skyrimas pasirodo filosofijos kontekste tik pereinant į 20 amžių, o jo atsiradimo šaknys nėra aiškios. Tačiau neabejotinai svarbiu tokio požiūrio vystymuisi buvo Frege[3] nuostata apie tai, kad matematinės tiesos objektyvumas ir aprioriškumas reiškia, kad skaičiai nėra nei materialūs daiktai nei proto idėjos (ideas in the mind). Jei skaičiai būtų materialūs daiktai ar tokių daiktų savybės, tai aritmetikos teiginiai turėtų empirinių apibendrinimų pobūdį. Jei skaičiai būtų mąstymo idėjos, tai be šios (empiriškumo) problemos atsirastų dar ir kitos, pavyzdžiui, kiltų klausimas: kieno galvoje yra skaičius 17? Ar vienas 17 yra mano galvoje, o kitas 17 yra jūsų galvoje? Tokiu atveju matematikos objektyvumas tampa iliuzija. Knygoje [7]: *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) Frege prieina išvados, jog skaičiai nėra nei išoriniai konkretūs daiktai, nei bet kurios rūšies mintinės esybė (angl. mental entity).

Frege: "trečioji realybė" (angl. third realm) - tai sritis, kuriai nepriklauso nei išoriniai konkretūs daiktai nei bet kurios rūšies mininės esybės.

3.2.2 Abstraktumo kriterijai

Toks kriterijus turėtų paaiškinti ir apibudinti tai, kas yra bendro tarp visų abstrakčių objektų ir tai, kas skiria juos nuo konkrečių objektų.

Neigimo kriterijus. Pagal šį požymį abstrakčiais laikomi tie objektai, kurie neturi tam tikrų tipiškais laikomų konkrečių objektų savybių. Tipiškomis konkrečių objektų savybėmis yra laikomos buvimas erdvėje ir laike bei priežastiniame sąryšyje. Todėl pagal neigimo kriterijų abstrakčiais laikomi objektai, nepriklausantys nuo erdvės-laiko arba inertiški priežastingumo atžvilgiu arba neturinys abiejų savybių.

Ką reiškia, kad abstraktus objektas nepriklauso nuo erdvės-laiko? Pavyzdžiui, beprasmiška kalbėti apie sinuso funkcijos priklausomybę nuo erdvės ir laiko, nes ji nėra kurioje nors erdvės vietoje ar laiko trukmėje. Panašiai ir apie Pitagoro teoremą galima manyti, jog ji egzistavo ir prieš ją "atrandant", tai yra ji visada egzistavo arba ji niekados neegzistavo laike. Taip yra tik tipiškiems abstraktiems objektams. Kitaip yra pavyzdžiui su šachmatais, tapatinamais su žaidimo taisyklėmis. Kai kurie filosofai mano, jog šachmatai yra taip pat abstraktūs objektas, nes jis neužima vietos erdvėje ar tęsiasi laike. Tačiau šachmatai kažkada buvo "atrasti" ar sugalvoti, ir vadinasi iki tol jų nebuvo. Šia prasme šachmatų pavydys kelia abejonės dėl galimybes jiems taikyti nepriklausomumo nuo erdvės-laiko savybes.

Iš kitos pusės tipiški konkretūs fiziniai objektai egzistuoja užimdami tam tikrą vietą erdvėje ir gyvuoja tam tikrą laikotarpį. Toks jų priklausymas nuo erdvės-laiko aiškiai skiriasi nuo galimo šachmatų priklausomumo nuo laiko savybės. Ši aplinkybė lyg ir siūlo laikyti objektą abstrakčiu jei jis neužima tam tikros vietos erdvėje ar laike.

Deja ir pastarasis nepriklausomumo nuo erdvės-laiko savybės patikslinimas nėra be trūkumų. Pavyzdžiui, remiantis šiuolaikine fizikų samprata (neapibrėžtumo principas) elementarioji dalelė protonas nėra lokalizuojamas erdvėje, nes neįmanoma atsakyti į klausimą: kur šiuo metu randasi protonas? Tačiau visuotinai sutariama, kad protonas nėra abstraktus objektas. Tai

[3] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) - vokiečių matematikas, logikas ir filosofas dirbęs Jenos universitete.

viena problema. Kitą problemą sukuria tai, kad tam tikru aspektu aibė gali užimti vietą ervėje. Pavyzdžiui, aibė sudaryta iš Petro ir Povilo gali būti tapatinama su Petru ir Povilu, kurie be abejonės užima kažkokią vietą erdvėje ir laike. Šie pavyzdžiai rodo, jog nepriklausomumą nuo erdvės-laiko klaidinga laikyti neabejotinu abstraktumo kriterijumi.

Abstrahavimo kriterijus. Abstraktus objektas yra tai, kas gaunama atmetus iš konkretaus objekto atmetant jo specifines savybes.

Jungimo (angl. conflation) kriterijus. Abstraktūs objektai yra konkrečių objektų rinkiniai. Tokiu atveju skirtumas tarp konkretaus ir abstraktaus objekto yra toks pat kaip skirtumąs tarp aibių ir individų, arba skirtumas tarp atskiro ir univesalaus.

Nepakeičiamumo argumentas. Tai yra vienas iš matematikos objektų egzistavimo argumentų. Ankstyvosios šio argumento versijos autoriais yra W. V. Quine ir H. Putnam ir todėl anglų kalboje vadinamas 'Quine-Putnam indispensability argument'. Dabartinė šio argumento esmė yra tokia (žr. [5, pusl. 11]):

1. egzistuojančiais turėtume laikyti tuos ir tik tuos objektus, kurie yra nepakeičiami mūsų pagrindinėse mokslo teorijose;

2. matematiniai objektai nepakeičiami mūsų pagrindinėse mokslo teorijose;

3. ontologinį statusą turėtume suteikti matematiniams objektams.

Loginė šio argumento forma nekelia abejonių. Tėra vienas klausimas: ar teisingos visos šio argumento prielaidos?

Nepakeičiamumo argumentas teigia, jog matematikos objektai ir teiginiai yra neatskiriama mokslinės praktikos dalis ir, kad ši praktika verčia naudoti matematiką. Anti-realistai be abejonės nesutinka su šiuo argumentu. Hartry Field bandė parodyti, jog mokslas gali išsiversti be matematikos. Pavyzdžiui, teiginį "pintinėje yra du obuoliai" galima išreikši nesinaudojant skaičiais:

$$\exists x \exists y \forall z (Ax \,\&\, Ay \,\&\, x \neq y \,\&(Az \to z = x \vee z = y)),$$

čia 'A' reiškia 'yra obuolys pintinėje'. Hartry Field nuomone panašiai galima performuluoti visą mokslą. Atrodo, jog šį uždavinį jam pavyko įgyvendinti su Niutown'o dėsniu. Tuo tarpu Phillip Kitcher ir Charles Chichara bandė išsaugoti moksle tik matematinį formalizmą atsisakydami nuo ontologinio realizmo.

Maddy's set theoretic realism.

Popper'io ir Penrose'o trečiasis pasaulis.

Klausimai:

1. Kas yra aibė matematikoje?
2. Kas yra natūralieji skaičiai?
3. Kas yra funkcija?
4. Kokia yra Russell'o paradokso prasmė ir kaip jo išvengti?
5. Kuo skiriasi abstraktūs objektai nuo konkrečių?
6. Nepakeičiamumo argumentas ir kam jis naudojamas?

Bibliografinės pastabos. Zalta (1983) - abstrakčių objektų aksiomatinė teorija. Putnam (1975) makes the case for abstract objects on scientific grounds. Fields (1980) ir (1989) argumentai prieš abstrakčius objektus. Bealer (1993) ir Tennant (1997) pateikia a priori argumentus abstrakčių objektų egzistavimo būtinumui. Cheyne (2001), remiantis priežastine žinojimo teorija, įrodinėjamas negalimumas pažinti tuos abstrakčius objektus, kurie yra inertiški priežastingumui.

Papildoma literatūra.

1. Bealer, George (1993). Universals. *Journal of Philosophy*, **90**, 1.
2. Cheyne, Colin (2001). *Knowledge, Cause, and Abstract Objects. Causal Objections to Platonism.* Kluwer, Dordrecht.
3. Field, Hartry (1980). *Science without numbers*. Princeton
4. Field, Hartry (1989). *Realism, Mathematics and Modality*. Basil Blackwell.
5. Putnam, Hilary (1975). *Philosophy of Logic.* In his collection: *Mathematics, Matter and Method.* Cambridge.
6. Tennant, Neil (1997). On the necessary existence of numbers. *Nous*, **31**, 3, 307-336.
7. Zalta, Edward (1983). *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*. D. Reidel.

Skyrius 4

Tiesa matematikoje

Logicizmas yra matematikos filosofijos pozicija teigianti, jog matematinė(kos) tiesa yra loginės(kos) tiesos rūšis. Logicistų nuomone, atitinkamai analizuojama, matematikos tiesa yra išreiškiama išimtinai logikos terminais ir išvedama iš grynai logikos prielaidų.

Klausimai:

1. Ar kiekvienas matematiškai korektiškas teiginys yra arba teisingas arba klaidingas?

2. Ar kiekviena matematikos tiesa yra pažini?

Skyrius 5

Matematinės struktūros

Kaip jau minėta, matematiniame tekste daiktavardžiai žymi tokius matematinius objektus, kaip skaičiai, funkcijos, aibės. Sudėtingesni daiktavardžiai, tokie kaip realiųjų skaičių sistema, vektorinė erdvė, vadinami matematinėmis struktūromis. Jas sudaro tam tikrais sąryšiais tarpusavyje susiję matematiniai objektai. Pavyzdžiui, realiųjų skaičių sistemą sudaro realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$, sumos $+$ ir daugybos $\cdot$ operacijos, bei tvarkos sąryšiai $=$ ir $<$ tenkinantys tam tikras savybes.

Skirtumas tarp matematinių objektų ir matematinės struktūros ne visada yra ryškus. Jei matematinė struktūra yra naudojama dažnai ir ilgą laiką, taip pat jei pakankamai išsivysto patirtis ir intuicija vartojant tokią struktūra, tai ji gali būti laikoma tiesiog matematiniu objektu. Pavyzdžiui, realiųjų skaičių sistema $\mathbb{R}$ gali būti laikoma matematiniu objektu tuo atveju, kai ji naudojama apibrėžti plokštumos taškų aibę $\mathbb{R}^2$ naudojant tiesioginę sandaugą $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Skyrius 6

Matematikos įtaka

> Mathematics, rightly viewed, posses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, like that of sculpture.
>
> Bertrand Russell (1872 - 1970)

Šiame skyriuje kalbėsime apie matematikos įtaką gamtos, socialiniuose ir humanitariniuose moksluose bei filosofijoje.

Socialiniai mokslai (kartais dar vadinami visuomenės mokslais, angl. social sciences) - visi mokslai, kurie teoriškai ir empiriškai tiria žmonių tarpusavio santykius visuomenėje. Nagrinėjama socialinių sistemų struktūra ir funkcijos taip pat šių sistemų sąveika su atskirais individais. Esminis skirtumas tarp gamtos ir socialinių mokslų yra tame, kad gamtos mokslo objektai nėra veikiami gamtos mokslų išvadų ir prognozių. Tuo tarpu socialinių mokslų subjektai gali atsižvelgti į socialinių mokslų prognozes (pvz., rinkiminės prognozės).

Paminėsime keletą socialinių mokslų pavyzdžių. Psichologija tiria žmogaus sąmonę ir elgesį; sociologija - žmonių visuomenę ir žmonių santykius joje; politikos mokslas arba politologija tiria grupių ir valstybių valdymą; ekonomika domisi gamybos ir turto paskirstymo visuomenėje klausimais; komunikacija tiria diskurso srautą per skirtingas terpes.

Humanitariniai mokslai - tai mokslai apie labiausiai organizuotos sistemos - žmonių visuomenės informacinę veiklą, priemones (pvz., kalbas, religijas, filosofijas ir pan.), reikalingas visuomenės valdymui. Socialiniai mokslai glaudžiai susiję su humanitariniais mokslais. Nuo humanitarinių mokslų socialiniai skiriasi tuo, kad pabrėžia mokslinius metodus ir kitus griežtus žinių rinkimo standartus, be to daugelis jų plačiai naudoja kokybinius metodus. Be to, humanitariniai mokslai orientuojasi į praeitį, o socialiniai į dabartį.

Filosofijoje: analitinės ir kontinentinės filosofijų šaltinis Frege ir Husserl.

Matematika ir menas.

6.1 Matematinė ekonomika

Jei trumpai ir apytikriai, tai matematinė ekonomika yra neoklasikinės ekonomikos teorijos dalis. Jei tiksliau, tai reikia aptarti kas sudaro ekonomikos teoriją ir kas yra neoklasikinė ekonomika.

Neoklasikinė ekonomikos teorija. Ekonomikos teorija yra sudedamoji ir svarbiausioji ekonomikos mokslo dalis. Greta ekonomikos teorijos, ekonomikos mokslą sudaro makroekonomika, ekonometrija, taikomoji ekonomika, ekonomikos filosofija ir metodologija bei ekonominės minties istorija.

Tuo pačiu, ekonomikos mokslą galima skirstyti ir pagal jį sudarančias įvairias mokyklas bei kryptis. Dominuojančia tarp visų jų yra vadinamoji *neoklasikinė* mokykla arba ekonomika. Šios mokyklos požiūrio esmė yra ta, kad ekonominio visuomenės vystymosi pasekmė yra ekonominės rinkos *pusiausvyra*, realizuojama individualių jos narių racionaliu elgesiu esant ribotai pasirinkimo laisvei. Tarp kitų ekonomikos mokslo mokyklų neoklasikinė ekonomika išsiskiria savo prielaidomis apie gamybos proceso technologines galimybes ir apie individualių vartotojų pasirinkimo formas. Pavyzdžiui yra tariama, kad gamybinė bendrovė maksimizuoja savo pelną esant „duotai" rinkos kainai. Visuomenės narių elgesys yra racionalus ta prasme, kad kiekvieno iš jų pasirinkimas tarp alternatyvių vertybių yra pilnas ir tranzityvus. Kiekvienas individas renkasi maksimizuodamas racionalų pasirinkimą, ribojamą pradiniu įnašu ir egzistuojančių vertybių kiekiu. Šios ir kitos neoklasikinės mokyklos prielaidos apie ekonominį visuomenės narių elgesį leidžia pagrįsti (matematiškai įrodyti) minėtosios ekonominės rinkos pusiausvyros egzistavimo galimybę.

Neoklasikinės ekonomikos mokykloje galima išskirti keturias pagrindines kryptis ir daugelį specialių jos sričių. Pusiausvyrinis ekonominio vystymosi požiūris daugiau ar mažiau atsispindi visose šios mokyklos kryptyse. Pirmąją, teorinę neoklasikinės mokyklos kryptį, sudaro: *pasirinkimo teorija*, *bedrosios pusiausvyros teorija* ir *lošimų teorija*. Didesnė šių teorijų dalis sudaro tai, kas vadinama *mikroekonomika*. Būtent ši, teorinė neoklasikinės mokyklos kryptis, yra labiausiai dominuojama pusiausvyros požiūrio. Mažiausiai šio požiūrio poveikis yra įžvelgiamas *ekonometrijoje*, kurią sudaro tiek statistika tiek ir ekonomika. Ekonometrija naudoja realius ekonomikos duomenis ir statistinius sprendimus tam, kad įvertinti įvairius modelius ir jų parametrus. *Makroekonomika*, trečioji neoklasikinės mokyklos kryptis, nagrinėja tokius bendrus ekonomikos reiškinius kaip biznio ciklai ir ekonominis augimas. Šiuolaikinių ekonomistų vystoma makroekonomikos teorija smarkiai remiasi pusiausvyriniu ekonomikos reiškinių požiūriu, išplaukiančiu iš racionalaus individų elgesio. Racionalaus elgesio sureikšminimas, dar vadinamas *homo economicus*, yra neoklasikinio požiūrio vystymosi pasekmė ir skiriamasis bruožas. Dž. M. Keinso (John Maynard Keynes) *Bendrojoje teorijoje* – svarbiausiame XX-ojo amžiaus ekonominės minties kūrinyje – makroekonomikos ryšys su individualaus pasirinkimo ypatybėmis nebuvo taip sureikšminamas. Ketvirtąją kryptį sudarantys neoklasikinės mokyklos darbai yra susiję su *taikomąja ekonomika*, plačiausia ekonomistų veiklos sritimi, taip pat atspindi pusiausvyrinį ekonomikos teorijos paveikslą. Tačiau taikomieji darbai bendrą rinkos pusiausvyros požiūrį papildo naujais aspektais. Taikomosios ekonomikos sritimis yra laikomos tarptautinės prekybos teorija, darbo ekonomika ir finansų ekonomika, atitinkančios skirtingas ekonomines rinkas.

Dabar galima pasakyti tiksliau, kad *matematinė ekonomika* apima pasirinkimo teoriją, bendrąją pusiausvyros teoriją ir lošimų teoriją. Taigi matematinė ekonomika yra beveik tas pats kas mikroekonomika, didesnį dėmesį kreipiant į matematinį pagrindimą. Neoklasikinė ekonomikos teorija nuo savo atsiradimo pradžios – XIX amžiaus vidurio – matematiką laikė pagrindine priemone analizuojant ekonominę realybę. Matematika buvo ne antraeilis dalykas, o tuo metu pradėtos realizuoti programos esmė: ekonomikos discipliną paversti griežtu kiekybiniu mokslu, lygiaverčiu astronomijai ir fizikai. Šios programos įdėja ir realizavimo pradžia yra priskiriama Léon Walras (1834–1910), dėl ko neoklasikinė ekonomika kartais vadinama Walras'o ekonomika (angl. Walrasian Economics). Kadangi šios programos realizavimas tęsėsi apie šimtą penkiasdešimt metų, pagrindinė ekonominės teorijos dalis – bendroji ekonominė pusiausvyra – turėjo gana skirtingas matematinio griežtumo ir bendrumo formas. Paskutinis šio vystymosi etapas, kurio pradžią galima laikyti apie 1950-uosius metus, yra susijęs su Kenneth J. Arrow, Gerard Debreu, Lionel W. McKenzie ir kitų mokslininkų darbais.

Neoklasikinės mokyklos ištakos. *Klasikine* vadinama ekonominės minties mokykla, atstovaujama Adam Smith ir David Ricardo ir laikoma pirmąja šiuolaikinės ekonomikos mokykla. Klasikinė ekonomika akcentavo laisvosios prekybos naudą, rinkos polinkį į pusiausvyrą ir vertės teoriją pagrįsta darbo sąnaudomis (angl. labor theory of value). Klasikinę ekonomikos mokyklą keitė tokios ekonominės minties mokyklos (angl. marginalist schools), kurios vertės šaltinį matė santykiniame naudingume (angl. marginal utility), o ne gamybos kaštuose.

Kitos ekonomikos mokyklos. Šalia neoklasikinės mokyklos egzistuoja daug kitų ekonomikos mokyklų. Tarp jų viena žymiausių yra *austrų ekonominė mokykla*. Taip yra vadinama ekonominės minties sritis, kurios pradininkais buvo austrai Carl Menger (1840–1921), F. A. Hayek (1899–1992) ir Ludwig von Mises (1881–1973), o toliau vystoma daugiausia amerikiečių ekonomistų tarp kurių žymiausias yra Murray N. Rothbar (1926–1995). Išskyrus požiūrį į pusiausvyrą, ši kryptis turi labai daug bendro su neoklasikine mokykla. Pavyzdžiui, abi mokyklos kapitalizmą laiko valstybės geriausia socialine–ekonomine sistema. Neoklasikams ji yra geriausia todėl, kad pasižymi sąlygomis būtinomis rinkos pusiausvyrai egzistuoti. Priešingai, austrų ekonomistai remia kapitalizmo sistemą dėl jos gebėjimo prisitaikyti prie pusiausvyros nebuvimo. Jų manimu rinkos pusiausvyra realiame pasaulyje yra negalima, nes ji yra abstrakti mokslinė konstrukcija. Austrų tradicija vietoje pusiausvyros idėjos remiasi į verslininko (angl. entrepreneur) vaidmenį rinkoje. Verslininkas siekdamas pelno padaro kapitalizmą lanksčia ir prisitaikančia socialine sistema. Šiuo požiūriu lyginant su feodalizmu ar socializmu, kapitalizmas laikomas prisitaikančia sistema. Austrų mokykla taip pat ypatingą dėmesį skiria ekonominių sprendimų neapibrėžtumui nagrinėti, atmesdama neoklasikų tuo tikslu naudojamą tikimybių teorija grindžiamą modelį kaip trivialų. Jų tvirtinimu, prielaida apie tikimybinio mato egzistavimą yra nereali. Tačiau kapitalizmas būdamas silpnai susijusia sistema, yra geriausiai prisitaikęs neapibrėžtumui. Dar vienas skirtumas tarp neoklasikinės ir austrų mokyklos atsiranda požiūryje į matematikos vaidmenį ekonomikoje. Austrų mokyklos atstovai tiki, kad realūs duomenys ir jų tyrimas yra beverčiai nes yra generuoti nepusiausvyrinės ekonomikos. Be to, jų nuomone, visuomenė nėra ją sudarančių individų aritmentine suma ir todėl matematika nepajėgi tirti visuomenės elgesį.

Kitos ekonomikos teorijos ir jų skiriamieji bruožai:

- *institucionalizmas* – kritiškas abstrakčiam ir bendram teorizavimui, o svarbiausiu laikantis ekonominio elgesio apibudinima konkrečios institucijos kontekste. Taikomieji neoklasikų ir institucionalistų darbai kartais yra labai panašūs;

- *marksizmas* – toliau vysto K. Markso vertės teorija besiremianti panašiais į neoklasikų metodais;
- *Keynes'o (makro)ekonomika* – makroekonomikos analizė grindžiama priėjimu nuo „viršaus" (makro-) į „apačią" (mikro-) priešinga kryptimi nei neoklasikinė analizė;
- *post-Keynes'o ekonomika* - kritiška neoklasikinės ekonomikos atžvilgiu ir ypatingą svarbą priskirianti neapibrėžtumui ekonomikoje;
- *Sraffos ekonomika* - paremta Sraffos prekių gamybos remiantis prekėmis samprata;
- *dinaminė ekonomika* - taikanti netiesinės dinaminių sistemų ir chaoso teorijas ekonomikoje;
- *evoliucinė ekonomika* - laikanti ekonomiką besivystančia sistema panašiai kaip Darvino evoliucijos teorija.

Greičiausiai nei viena iš šių ekonomikos krypčių negalėtų pretenduoti į vienintelės XXI amžiaus ekonominės teorijos vardą. Tačiau kiekviena iš jų yra pakankamai stipri toje srityje, kurioje yra silpna neoklasikinė ekonomika. Tikėtina, kad šiame amžiuje dominuojančia turėtų tapti ta ekonominė teorija kuri akcentuoja šiuolaikinės kapitalistinės ekonomikos dinamiką.

Anksčiau išvardinom tokias keturias neoklasikinės ekonomikos kryptis: ekonomikos teorija, makroekonomika, ekonometrija ir taikomoji ekonomika. Be jų egzistuoja ir labai svarbų vaidmenį vaidina ekonomikos filosofija ir metodologija, bei ekonominės minties istorija.

Matematinis modelis ekonomikoje ir finansų teorijoje. Kalbant apie ekonomikos ar finansų rinkos matematinį modelį, visų pirma reiktų suvokti skirtumą tarp matematinio modelio ir matematinės teorijos. Pirmasis terminas vartojamas kalbant apie matematikos taikymą praktikoje, o antrasis terminas yra „grynosios" matematikos dalis. XX amžiaus antroje pusėje matematika tampa mokslu apie abstrakčias struktūras. Trumpai kalbant, matematinė struktūra yra aibė tarp kurios elementų galioja aksiomomis nusakomi sąryšiai. Tuo atveju matematinę teoriją sudaro teiginių sistema apie tokios struktūros savybes. Tuo tarpu matematinis modelis yra tokia matematinė teorija apie matematinę struktūrą, kurios elementai ir sąryšiai yra interpretuojami išorinio pasaulio objektais ir sąryšiais.

Vienas iš pagrindinių skirtumų tarp matematinės teorijos ir matematinio modelio yra rezultatų vertinimo kriterijai. Matematinės teorijos rezultatai privalo tenkinti formalaus teisingumo kriterijų, o pati teorija dažniausiai vertinama pagal vidinę darną ir logiką. Tuo tarpu matematiniam modeliui taikomas atitikimo išoriniam pasauliui ar prognozės teisingumo kriterijus. Šia prasme matematiniai modeliai priklauso *motyvuotosios matematikos* sričiai. Matematinė teorija arba „grynoji" matematika nėra motyvuota praktiniais argumentais. Pavyzdžiui, labai dažnai matematiniai samprotavimai prasideda visiškai nemotyvuota fraze: „tarkime, kad yra duota funkcija ...".

Kitas labai svarbus matematikos vaidmuo yra jos, kaip kalbos, funkcija. Matematinis samprotavimas skiriasi nuo nematematinio dar ir tuo, kad matematikos objektai suvokiami vienareikšmiškai, remiantis tik tomis jų savybėmis, kurios yra joms priskirtos pagal apibrėžimą.

Taigi ekonomikos ar finansų rinkos matematiniu modeliu vadiname matematinę teoriją, kurios elementai ir sąryšiai interpretuojami imituojant realias finansų rinkas. Pavyzdžiui, finansų teorijoje labai svarbūs tokie išorinio pasaulio aspektai kaip ateities neapibrėžtis, laikas, kaina ir panašiai. Finansų rinkos modelyje šioms sąvokoms suteikiama konkreti prasmė naudojant matematinę tikimybių teoriją. Kaip ir kiekviena matematinė teorija, tikimybių teorija yra teiginių sistema apie abstrakčius objektus pasižyminčius tam tikromis savybėmis. Todėl naudojantis tokia teorija reikia interpretuoti pagrindines jos konstrukcijas, tiesiogiai nesusijusias su realia finansų rinka.

Pagrindine tikimybių teorijos konstrukcija yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Čia Ω yra elementariųjų įvykių aibė, o funkcija P apibrėžta tam tikroje šios aibės poaibių klasėje $\mathcal{F}$ ir reikšmes įgyjanti intervale $[0, 1]$. Klasei $\mathcal{F}$ – vadinamai σ-algebra – priklauso Ω, bet kurio jos elemento A papildinys A^c ir bet kurių jos elementų skaitaus rinkinio $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ sąjunga $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Funkcija P – vadinama tikimybiniu matu – yra σ-adityvi ir $P(\Omega) = 1$. Tarsime, kad aibę Ω sudaro tiesiogiai su ekonominiu modeliu susiję pasaulio ateities scenarijai ω, kartais tiesiog vadinami būsenomis. Kiekvienas šeimos $\mathcal{F}$ elementas A suprantamas kaip tokia ateities scenarijų aibė, apie kurią galima pasakyti, kad ji įvyks su tikimybe $P(A)$. Tačiau tikimybės interpretacija finansų teorijos kontekste yra problema, nes nėra aišku, kas ją galėtų atitikti nematematinėje finansų rinkoje. Taigi vis dėlto tarus, kad mums yra žinoma tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, akcijos kainos reikšmė natūraliai priklauso nuo būsenos $\omega \in \Omega$ ir laiko.

Skyrius 7

Matematikos pagrindai

Svarbiausias matematikos pagrindų klausimas tai klausimas apie tokių pagrindų patikimumą. Bandant tiksliau apibudinti, kas yra matematikos pagrindai nuomonės išsiskiria.

Vienas iš matematikos pagrindimo aspektų yra formalizmo taikymas matematikai. Pavyzdžiui, Zermelo-Frenkelio aibių teorijos aksiomatika kartu su išrinkimo aksioma, suformuluotos naudojant pirmos eilės predikatų logik1, suteikia vieną iš galimų matematikos formalizmo variantų. Toks formalizmas dar negarantuoja neprieštaringumo (?) nes Hilberto programa šiuo klausimu dar nerealizuota.

Matematikos formalizavimo būdas nėra vienintelis. Tai gali būti atliekama remiantis ir kitomis aibių teorijos ir logikos versijomis (intuicionistinė ?). Pavyzdžiui, nesenai atsiradusi toposų teorija yra laikoma alternatyviu matematikos pagrindimu. Šis ir kiti variantai dar bėra pakankamai ištirti.

Matematikos pagrindimą remiantis jos formalizavimu Mac Lane [12] vadina "lokaliu" matematikos korektiškumo patikimumu. "Globalaus" pobūdžio klausimais jis vadina, pavyzdžiui, klausimą: "ar kuri nors nagrinėjamoji matematikos dalis iš tikro yra matematika, t. y. ar ji suderinama su matematikos prigimtimi?" Mac Lane šį klausimą priskiria matematikos pagrindams todėl, kad visumoje matematika yra korektiška. Ir tokia ji yra ne todėl, kad išvedama iš Zermelo-Frenkelio aksiomatikos, bet todėl, kad matematika remiasi skirtingū matematinių objektų analize ir jų interpretavimu taikymuose. Kitaip kalbant, matematikos patikimumas remiasi ne tuo, kad jai galioja "lokalus korektiškumas", patikrinamas formaliais logikos dėsniais, bet tuo, kad yra teisingas "globalus korektiškumas" - matematikos teiginiai yra tampriai susiję su visa matematika, su kitais mokslais ir visa žmogaus veikla apskritai.

Požiūriai į kategorijų teorijos statusą:

1. kategorijų teorija suteikia (provides) matematikos pagrindus Lawvere [1966];

2.

Priedas A

Priedas

A.1 Matematinė logika

A.1.1 Teiginių logika

Teiginių logika (angl. sentential logic arba propositional logic) yra formali kalba sudaryta iš dviejų rūšių simbolių: sakinių simbolių, žymimų A_1, A_2. $\ldots$ ir loginių simbolių, žymimų

loginis simbolis	*Paaiškinimas*
$($	kairysis skliaustas
$)$	dešinysis skliaustas
$\neg$	ne
$\wedge$	ir
$\vee$	arba (vienas ar kitas ar abu)
$\Rightarrow$	išplaukia (jei ... tai ...)
$\Leftrightarrow$	tada ir tik tada

Bet kuri baigtinė simbolių aibė vadinama *išraiška*. Išraiška vadinama *formule* jei ji sudaryta remiantis (a), (b) ir (c):

(a) kiekvienas sakinių simbolis yra formulė;

(b) jei α ir β yra formulės tai formulėmis yra išraiškos $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ ir $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$;

(c) išraiška nėra formulė jei ji nėra išreiškiama remiantis (a) ir (b).

Tegul $\mathcal{S}$ yra sakinių simbolių aibė, o $\mathcal{F}$ yra formulių aibė.

Tarkime, kad $B := \{t, k\}$ yra teisingumo reikšmių aibė, kurios elementas t vadinamas *tiesa*, o elementas k vadinamas *klaida*. Šioje aibėje apibrėžkime funkcijas $f_\neg\colon B \to B$ ir $f_\wedge, f_\vee, f_\Rightarrow, f_\Leftrightarrow\colon B \times B \to B$ tokia teisingumo reikšmių lenetele:

x	y	$f_\neg(x)$	$f_\wedge(x,y)$	$f_\vee(x,y)$	$f_\Rightarrow(x,y)$	$f_\Leftrightarrow(x,y)$
t	t	k	t	t	t	t
t	k	k	k	t	k	k
k	t	t	k	t	t	k
k	k	t	k	k	t	t

Toliau apibrėšime tai, kas vadinama teiginių logikos kalbos interpretacija.

A.1 Apibrėžimas. Funkcija ν: $\mathcal{S} \to B$ vadinama aibės $\mathcal{S}$ *teisingumo įvertinimu* (angl. truth assignment).

Turint sakinių simbolių aibės $\mathcal{S}$ teisingumo įvertinimą ν, galima apskaičiuoti bet kurios formulės teisingumo reikšmę tokiu būdu: su bet kuriais$\alpha, \beta \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}(\alpha) &:= \nu(\alpha), \\
\tilde{\nu}(\neg\alpha) &:= f_\neg(\tilde{\nu}(\alpha)), \\
\tilde{\nu}(\alpha \wedge \beta) &:= f_\wedge(\tilde{\nu}(\alpha), \tilde{\nu}(\beta)), \\
\tilde{\nu}(\alpha \vee \beta) &:= f_\vee(\tilde{\nu}(\alpha), \tilde{\nu}(\beta)), \\
\tilde{\nu}(\alpha \Rightarrow \beta) &:= f_\Rightarrow(\tilde{\nu}(\alpha), \tilde{\nu}(\beta)), \\
\tilde{\nu}(\alpha \Leftrightarrow \beta) &:= f_\Leftrightarrow(\tilde{\nu}(\alpha), \tilde{\nu}(\beta)).
\end{aligned}$$

Remiantis šiomis teisingumo reikšmės, $\tilde{\nu}(\alpha)$ apibrėžiama su kiekviena formule $\alpha \in \mathcal{F}$ naudojantis rekursija. Gauta funkcija $\tilde{\nu}$: $\mathcal{F} \to B$ vadinama *interpretacijos funkcija*.

A.2 Apibrėžimas. Jei ν yra $\mathcal{S}$ teisingumo įvertinimas, o α yra formulė, tai $\tilde{\nu}(\alpha)$ vadinama formulės α intepretacija ν atžvilgiu $\mathcal{S}$. Sakoma, kad ν atitinka (angl. satisfy) α, jei $\nu(\alpha) = t$. Sakoma, kad α galioja arba yra tautologija jei kiekvienas teisingumo įvertinimas atitinka α. Jei Σ yra formulių aibė, o α yra formulė, tai α *tautologiškai išplaukia iš* Σ, arba $\Sigma \models \tau$, jei su kiekvienu teisingumo įvertinimu ν,

$$(\forall\sigma \in \Sigma,\ \tilde{\nu}(\sigma) = t) \Rightarrow \tilde{\nu}(\alpha) = t.$$

Vietoje $\emptyset \models \alpha$ rašoma $\models \alpha$, kas reiškia, kad α yra tautologija.

Tautologijų pavyzdžiai

1. Asociatyvumo ir komutatyvumo dėsniai operacijoms $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$.

2. Distributyvumo dėsniai:

$$((A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$$

$$((A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$$

3. Neigimas:

$$((\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A)$$

$$((\neg(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B)))$$

$$((\neg(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)))$$

4. De Morgano dėsniai:

$$((\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$$

$$((\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)))$$

5. Negalimo trečiojo dėsnis (angl. excluded middle): $(A \vee (\neg A))$

6. Prieštaravimo dėsnis (angl. contradiction): $(\neg(A \wedge (\neg A)))$

7. Kontrapozicijos dėsnis (angl. contraposition): $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

8. (angl. exportation): $(((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$

A.1.2 Pirmos eilės predikatų logika

Teiginių logikoje sakinys yra nedaloma kalbos dalis ir tai riboja galimybes interpretuoti sudėtingesnius kasdieninės ir mokslo kalbos sakinius. Tokių sakinių pavyzdžiais yra samprotavimai apie prielaidas ir išvadas. Kaip ir kasdieninęje kalboje, galima bandyti išskirti skirtingas sakinio dalis ir nagrinėti jų sąryšius sakinyje ir kalboje. Predikatų logikoje tokios analizės tikslas būtų atspindėti tą faktą, jog tikrovėje egzistuoja objektai ir požymiai. Požymis yra tai, kuo objektai panašūs arba kuo jie skiriasi vienas nuo kito. Taigi, predikatų logika yra formali kalba, įgalinanti išreikšti požymio priskyrimą objektui. Teiginio objektas vadinamas *subjektu*, o požymiai vadinami *predikatais*.

Tarsime, kad turime be galo daug objektų, vadinamų simboliais ir surūšiuotų tokia tvarka.
A. Loginiai simboliai:

0. Skliaustai $(,)$
1. sakinio jungiamieji simboliai $\Rightarrow$, $\neg$ (angl. sentential connective symbols)
2. kintamieji simboliai $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$
3. lygybės simbolis (nebūtinas)$\approx$

B. Parametrai:

0. kvantoriaus simbolis $\forall$
1. predikato simbolis P
2. konstantos simbolis c

3. funkcijos simbolis f

Parametrš simboliai skiriasi nuo logionių simbolių tuo, kad jiems bus naudojamos skirtingos apibrėžimo ir kitimo aibės, kitaip tariant parametrų simboliai yra atviri interpretacijai. Tariama, kad visi simboliai yra skirtingi ir nei vienas simbolis nėra išreiškiamas baigtine seka kitų simbolių. Priklausomai nuo pasirenkamos formaliosios kalbos, kai kurie iš minėtų simbolių gali būti nenaudojami. Formaliųjų kalbų pavyzdžiai yra tokie.

1. Grynoji predikatų kalba.

2. Aibių teorijos kalba.

3. Skaičių teorijos kalba.

Formulės Bet kuri baigtinė simbolių seka vadinama išraiška. *Termu* vadinama išraiška, sudaryta remiantis taisyklėmis: (a) termais yra konstantos simboliai, (b) termais yra kintamieji simboliai, (c) jei f yra n-kintamųjų funkcijos simbolis ir $t_1, \ldots, t_n$ yra termai, tai $f\, t_1 \cdots t_n$ yra termas. (lenkiškas žymėjimas)

Termai yra išraiškos, kurias galima interpretuoti kaip objekto vardą; kasdieninėje kalboje tai daiktavardis ar įvardis. Tuo tarpu toliau apibrėžiamos formulės yra interpretuojamos kaip teiginiai apie objektus.

Atomine formule vadinama išraiška $P\, t_1 \cdots t_n$, kai P yra n-kintamųjų predikato simbolis, o $t_1, \ldots, t_n$ yra termai.

Pirmos eilės predikatų logikos formule arba tiesiog *formule* (angl. well-formed formula) vadinama tokia išraiška, kuri gaunama iš atominių formulių naudojant jungiamuosius simbolius ir kvantoriaus simbolį.

Laisvąjį kintamąjį formulėje apibrėšime rekurentiškai. Bet kuris (kintamasis, ne konstanta?) simbolis atominėje formulėje taip pat yra ir laisvas kintamasis. Simbolis x yra laisvas kintamasis formulėje $(\neg\alpha)$ jei x yra laisvas kintamasis formulėje α. Simbolis x yra laisvas kintamasis formulėje $(\alpha \Rightarrow \beta)$ jei x yra laisvas kintamasis arba formulėje α arba formulėje β. Simbolis x yra laisvas kintamasis formulėje $\forall\, v_i\, \alpha$ jei x yra laisvas kintamasis formulėje α ir $x \neq v_i$. Jei formulėje nėra laisvų kintamųjų tai ji vadinama sakiniu, o tai reiškia, jog galimas prasmingas formulės vertimas į konkrečią kalbą.

Tiesa ir modeliai Formulės teisingumas įvertinamas papildant parametrų simbolių apibrėžimo ir kitimo aibes t. y. pasirenkant parametrš simbolių interpretaciją. Toliau apibrėžiama predikatų logikos struktūra nurodo objektų aibę, kurioje apibrėžtas kvantorius, o parametrams suteikiama prasmė. Taigi, pirmos eilės predikatų logikos *struktūra* yra tokia parametrų aibėje apibrėžta funkcija $\mathfrak{A}$, kad

1. kvantoriui $\forall$ priskiriama netuščia aibė $|\mathfrak{A}|$, vadinama universe of $\mathfrak{A}$;

2. n-viečiui predikato simboliui P priskiriama n-vektorių aibė $P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$;

3. konstantos simboliui c priskiriamas elementas $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$;

4. n-kintamųjų funkcijos simboliui f priskiriamas transformacija $f^{\mathfrak{A}}\colon |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

Tegul $\mathfrak{A}$ yra strukt$\bar{}$ura, o $s\colon V \to |\mathfrak{A}|$ yra funkcija, apibrėžta kintamųjų aibėje V. Sakysime, kad strukt$\bar{}$ura $\mathfrak{A}$ tenkina formulę ϕ atžvilgiu s, arba trumpiau

$$\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[s],$$

jei formulės ϕ interpretacija, naudojant strukt$\bar{}$urą $\mathfrak{A}$, yra teisinga pakeitus kintamąjį x į $s(x)$. Tiksliau formulės tenkinimas apibrėžiamas taip:

I. Termai. Funkcija s pratęsiama į visų termų aibę $\bar{s}\colon T \to |\mathfrak{A}|$:

(a) $\bar{s}(x) := s(x)$ su kiekvienu kintamuoju $x \in V$,

(b) $\bar{s}(c) := c^{\mathfrak{A}}$ su kiekvienu konstantos c simboliu,

(c) $\bar{s}(f\,t_1 \cdots t_n) := f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$ jei $t_1, \ldots, t_n$ yra termai o f n-vietės funkcijos simbolis.

Egzistuoja vienintelis toks s tęsinys $\bar{s}$ (remiantis rekursijos teorema - papildyti).

II. Atominė formulė. Remiantis šios formulės apibrėžimu:

(a) $\models_{\mathfrak{A}} \approx t_1 t_2\,[s]$ t.t.t. $\bar{s}(t_1) = \bar{(}t_2)$,

(b) $\models_{\mathfrak{A}} P\,t_1, \cdots t_n\,[s]$ t.t.t. $(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$.

III. Formulė. Vėl rekursiniu b$\bar{}$udu:

(a) atominės formulės tenkinimas jau apibrėžtas,

(b) $\models_{\mathfrak{A}} \neg\phi\,[s]$ t.t.t. $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[s]$

(c) $\models_{\mathfrak{A}} (\phi \Rightarrow \psi)\,[s]$ t.t.t. arba $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi\,[s]$ arba $\models_{\mathfrak{A}} \psi\,[s]$ arba abu,

(d) $\models_{\mathfrak{A}} \forall\, x\, \phi\,[s]$ t.t.t. su kiekvienu $d \in |\mathfrak{A}|$, $\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[s(x|d)]$,

čia funkcija $s(x|d)(y) := d$ jei $y = x$ ir $s(x|d)(y) := s(y)$ jei $y \neq x$.

Dabar, kai yra apibrėžta formulės tenkinimo sąvoka, galima suformuluoti teiginių tautologinės implikacijos (A.2 Apibrėižmas) analogą predikatų logikoje

A.3 Apibrėžimas. Tegul Γ yra formulių aibė ir ϕ yra formulė. Sakoma, kad ϕ *logiškai išplaukia iš* Γ t.t.t. kai su kiekviena strukt$\bar{}$ura $\mathfrak{A}$ ir su kiekviena funkcija $s\colon V \to |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A}$ tenkina ϕ atžvilgiu s jei s atžvilgiu $\mathfrak{A}$ tenkina kienvieną aibės Γ formulę. Vietoje $\emptyset \models_{\mathfrak{A}} \phi$ rašoma $\models_{\mathfrak{A}} \phi$, kas reiškia, kad strukt$\bar{}$ura $\mathfrak{A}$ tenkina formulę ϕ atžvilgiu s.

Loginei implikacijai patikrinti neb$\bar{}$utina tirti visas funkcijos s argumento reikšmes. Remiantis toliau formuluojama teorema, pakanka ištirti implikacijos teisingumą kai s reikšmes įgyja ant laisvų kintamųjų.

A.4 Teorema. *Tegul funkcijos* $s_1, s_2\colon V \to |\mathfrak{A}|$ *sutampa ant tų kintamųjų, kurie yra laisvi formulėje* ϕ. *Tuo atveju* $\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[s_1]$ *t.t.t.* $\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[s_2]$.

Primename, jog sakiniu vadinama formulė be laisvųjų kintamųjų, kuriai tokiu atveju galioja alternatyva:

A.5 Išvada. *Sakiniui σ ir struktūrai $\mathfrak{A}$ yra teisinga arba (a) arba (b), čia*

(a) $\models_{\mathfrak{A}} \sigma\,[s]$ *su kiekviena funkcija* $s\colon V \to |\mathfrak{A}|$,

(b) $\not\models_{\mathfrak{A}} \sigma\,[s]$ *su kiekviena funkcija* $s\colon V \to |\mathfrak{A}|$.

Jei galioja alternatyva (a), tai sakoma, kad σ yra teisinga struktūroje $\mathfrak{A}$, arba $\mathfrak{A}$ yra σ *modelis*.

Dedukcinė sistema. Tarkime, kad formulė ϕ logiškai išplaukia iš formulių aibės Γ, t. y. $\Gamma \models \phi$. Kokiu būdu galima tai įrodyti, jei iš viso galima įrodyti?

Pradėsime nuo klausimo, ką reiškia "įrodyti"? Bendrai kalbant, įrodymas yra argumentas, pilnai įtikinantis teiginio teisingumu. Pirma, įrodymas turi būti baigtinis laiko atžvilgiu. Todėl jei aibė yra begalinė tai įrodymas negali remtis visomis formulėmis. Kompaktumo teorema garantuos jog egzistuoja tokia baigtinė formulių aibė $\Gamma_0 \subset \gamma$, kad $\Gamma \models \phi$. Antrąja įrodymo savybe turėtų būti galimybė bet kam ir "mechaniškai" patikrinti naudojamus argumentus. Tokia savybė vadinama efektyviu išvardinimu (angl. efective enumerability).

Vietoje žodžio "įrodymas" predikatų logikoje vartojamas žodis "dedukcija" tam, kad atskirti pirmojo vartojimą kasdieninėje kalboje.

Taigi, dedukciją sudaro loginės taisyklės, kurių pagalba formulė išvedama iš formulių aibės. Čia nagrinėjama dedukcija, kai formulė išvedama iš aibės $\Gamma \cup \Lambda$, o aibę Λ sudarančios formulės vadinamos loginėmis aksiomomis. Tokia dedukcinė sistema vadinama Hilberto tipo. Aksiomų aibės ir loginių taisyklės pasirinkimas nėra vienintelis. Toliau naudojama loginė taisyklė vadinama *modus ponens*: iš formulių α ir $\alpha \Rightarrow \beta$ išplaukia formulė β.

Sakoma, kad formulių aibė Δ yra uždara modus ponens taisyklės atžvilgiu jei iš to, kad formulės α ir $\alpha \Rightarrow \beta$ priklauso aibei Δ išplaukia, kad β priklauso aibei Δ. Taip pat sakoma, kad aibė Δ yra *indukcinė* atžvilgiu formulių aibės Γ jei $\Gamma \cup \Lambda \subset \Delta$, o Δ yra uždara modus ponens taisyklės atžvilgiu. Pagaliau sakoma, kad formulė ϕ yra formulių aibės Γ *teorema* ir rašoma $\Gamma \vdash \phi$ jei ϕ priklauso mažiausiai (kodėl egzistuoja ?) indukcinei aibei atžvilgiu Γ.

Toliau atsakoma į klausimą, ką reiškia "įrodyti"?

A.6 Apibrėžimas. *Formulės ϕ dedukcija iš formulių aibės Γ vadinama tokia formulių seka $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, kad $\alpha_n = \phi$ ir su kiekvienu $0 \leq i \leq n$ arba $\alpha_i \in \Gamma \cup \Lambda$ arba egzistuoja tokie $j < i$ ir $k < i$, kad α_i išvedamas modus ponens taisyklės pagalba iš α_j ir α_k, t. y. $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow \alpha_i$.*

A.7 Teorema. *Formulė ϕ yra formulių aibės Γ teorema t.t.t. egzistuoja ϕ dedukcija iš Γ.*

Teisingumo teorema (angl. soundness theorem):

A.8 Teorema. *Jei $\Gamma \vdash \phi$ tai $\Gamma \models \phi$.*

Atvirkštine teisingumo teoremai, yra Pilnumo teorema:

A.9 Teorema. (Gödel, 1930) *Jei $\Gamma \models \phi$ tai $\Gamma \vdash \phi$.*

Gödel'io nepilnumo teorema ZFC aksiomų sistema aibių teorijoje nėra pilna. Tai išplaukia iš Gödel'io (1931) *nepilnumo teoremos*: jei T yra suderinta (consistent) teorija apimanti aritmetiką (ZF poaibis) ir aksiomos joje "rekursinės" tada egzistuoja sakinys, nepriklausantis nuo T. Todėl suderinta teorija negali būti pilna.

A.1.3 Antros eilės predikatų logika

Rekomenduojama literatūra. Plečkaičio "Logikos pagrindai" (2004) skirti humanitarinių ir socialinių mokslų studentams. Norgėlos "Matematinė logika" (2004) skirta informatikos specialybės studentams.

1. Enderton, H. B., *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press, New York, 1972.
2. Norgėla, S. *Matematinė logika.* TEV, Vilnius, 2004.
3. Plečkaitis, R. *Logikos pagrindai.* Tyto alba, Vilnius, 2004.

A.2 Aibių teorija

A.2.1 Naivioji aibių teorija

Loginiai simboliai.

Žymėjimas	*Paaiškinimas*
$\forall\, x$	su kiekvienu x
$\exists\, x$	yra toks x, kad
$\neg$	ne
$\wedge$	ir
$\vee$	arba (vienas ar kitas ar abu)
$\Rightarrow$	išplaukia (jei ... tai ...)
$\Leftrightarrow$	tada ir tik tada

Paprasta formule vadiname bet kurią iš dviejų išraiškų:

$$x \in A \quad \text{ir} \quad x = y.$$

Formule vadinama seka simbolių gauta iš paprastų formulių naudojant loginius simbolius.

A.2.2 Zermelo-Fraenkel'io aksiomatika

Zermelo-Fraenkel'io arba sutrumpintai ZF aksiomų sistemos objektais yra tik aibės, žymimos raidėmis $a, b, \ldots, x, y, z$ ir $A, B, C, \ldots$. Tarp aibių yra tik vienas *narystės ar priklausymo* sąryšis, žymimas $\in$. Pavyzdžiui, $a \in A$ reiškia, kad aibė a priklauso aibei A ir aibė a vadinama aibės A *elementu*. Priklausymo sąryšio neigimas žymimas $a \notin A$ ir sakoma, kad a nepriklauso A. "Aibės" ir "priklausymo" sąvokos įeina į ZF aksiomų sistemą formaliai neapibrėžtos ir savo prasmę įgyja išvardintų aksiomų kontekste.

ZF1 Ekstensijos aksioma. *Jei dvi aibės turi tuos pačius elementus, tai jos yra lygios*:

$$\forall A\, \forall B\, [\forall x\, [x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B] \;\Rightarrow\; A = B].$$

ZF2 Tuščios aibės aksioma. *Egzistuoja aibė $B =: \varnothing$ be elementų*:

$$\exists B\, \forall x\, x \notin B.$$

Aibė $\varnothing$ vadinama *tuščia* ir, remiantis ekstensijos aksioma, ji yra vienintelė.

ZF3 Poravimo aksioma. *Su bet kuriomis dviem aibėmis a ir b, egzistuoja aibė $B =: \{a, b\}$, kurios elementais yra tik tos dvi aibės*:

$$\forall a\, \forall b\, \exists B\; \forall x\, [x \in B \;\Leftrightarrow\; x = a \,\vee\, x = b].$$

Poravimo aksioma teigia egzituojant dviejų elementų aibę, kurių tvarka yra nesvarbi. Jei $a = b$, tai aibėje $\{a, b\}$ yra tik vienas elementas. Todėl remiantis poravimo aksiomoma, su bet kuria aibe a egzistuoja vadinamoji *pavienė aibė* $\{a\} := \{a, a\}$.

ZF4 Jungimo aksioma. *Su bet kuria aibe A egzistuoja tokia aibė $B =: \cup A$, kurios vienin-teliais elementais yra aibės priklausančios kuriam nors aibės A elementui*:

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\, [x \in B \;\Leftrightarrow\; \exists y\, [y \in A \;\wedge\; x \in y]].$$

Jei $A = \{a, b\}$, tai rašysime $a \cup b := \cup A$.

ZF5 Laipsninės aibės aksioma. *Su bet kuria aibe A egzistuoja tokia aibė $B =: 2^A$, kurios vieninteliais elementais yra aibės A poaibiai*:

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\, [x \in B \;\Leftrightarrow\; x \subseteq A].$$

Kitai aksiomai apibrėšime aibės a *tęsinį* $a^+ := a \cup \{a\}$, kuris egzistuoja remiantis jungimo aksioma. Be to, sakysime, kad aibė A yra *indukcinė* tada ir tik tada, kai $\varnothing \in A$ ir ji yra uždara atžvilgiu tęsinių, t. y. $[\forall a \in A]\, a^+ \in A$.

ZF6 Begalybės aksioma. *Egzistuoja indukcinė aibė*:

$$(\exists A)\, [\varnothing \in A \,\wedge\, (\forall a \in A)\, a^+ \in A].$$

ZF7 Poaibio aksioma. Su bet kuria aibe C ir formule P egiztuoja aibė B, kurios elementais yra visi tie aibės C elementai, kuriems galioja P:

$$\exists B \forall x\, [x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in C \,\wedge\, P(x)].$$

C Pasirinkimo aksioma. *Jei A yra aibė, kurios visi elementai yra netuščios aibės ir poromis neturi bendrų elementų, tai egzistuoja tokia aibė kurios kiekvienas elementas priklauso vienam aibės A elementui*:

$$\forall A\, [\forall a\, [a \in A \,\Rightarrow \neg\, [a \neq \varnothing] \,\wedge\, \forall a \forall b\, [a \in A \,\wedge\, b \in A\, [a \neq b] \,\Rightarrow\, \neg\, [\exists x\, [x \in a \,\wedge\, x \in b]]]$$

$$\Rightarrow\; \exists B \forall a\, [a \in A \,\Rightarrow\, \exists x\, [x \in B \,\wedge\, x \in a \,\wedge\, \forall y\, [y \in B \,\wedge\, y \in a \,\Rightarrow\, y = x]]]]$$

A.2.3 Natūralieji skaičiai

A.10 Apibrėžimas. *Natūralusis skaičius yra aibė, kuri priklauso kiekvienai indukcinei aibei.*

A.11 Teorema. *Egzistuoja aibė, kurios elementais yra tik natūralūs skaičiai.*

Įrodymas. Tegul A yra indukcinė aibė, kuri egzistuoja remiantis begalybės aksioma ZF6. Remiantis poaibio aksioma ZF7, egzistuoja tokia aibė w, kad su kiekvienu x

$$\begin{aligned} x \in w \quad & \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \text{ priklauso kiekvienai kitai indukcinei aibei} \\ & \Leftrightarrow \quad x \text{ priklauso kiekvienai indukcinei aibei}. \end{aligned}$$

Q. E. D.

Apibrėšime klasę $\mathbb{N} := \cap\{A\colon\ A \text{ yra indukcinė}\}$. Parodysime, kad ši klasė yra aibė.

Rekomenduojama literatūra.

1. Enderton, H. B., *Elements of Set Theory.* Academic Press, New York, 1977.
2. Kubilius, J. *Realaus kintamojo funkcijų teorija.* Mintis, Vilnius, 1970.

A.3 Kategorijų teorija

Priedas B

Priedas

B.1 Terminai

Dedukcinis argumentas: tai yra toks argumentas, kurio išvada yra neabejotina ir remiasi prielaida; išvada slypi prielaidoje.

Diskursas: (pranc. discours - kalba, kalbos tipas, tekstas) yra tekstui artimas, bet platesnę sąvoką reiškiantis terminas. Diskursas apima visą komunikacijos aktą: be teksto, ir dalyvius, situaciją, kontekstą, nekalbinės raiškos priemones (gestus, mimiką).

Ekstensija ir intensija: Ekstensija - sąvokos apimtis, t. y. kokį objektų skaičių ji apibūdina. Intensija - sąvokos turinys, jos reikšmės savyje (pagal [FŽ])

Formali kalba: An alphabet and grammar. The alphabet is a set of uninterpreted symbols. The grammar is a set of rules that determine which strings of symbols from the alphabet will be acceptable (grammatically correct or well-formed) in that language. The grammar may also be conceived as a set of functions taking strings of symbols as input and returning either "yes" or "no" as output. The rules of the grammar are also called formation rules.

Indukcinis argumentas: tai toks argumentas, kurio išvada yra tikėtina ir remiasi prielaida; išvada išeina už prielaidos ribų.

Kvantorius: Kasdieninėje kalboje kvantoriais yra žodžiai "kiekvienas" ir "kuris nors" bei jų sinonimai. Šios kalbos savybės taikomos vienam arba daugiau individų ar daiktų, ir pačios savaime nėra teiginiais bet nurodo į galimybę analizuoti elementarių teiginių struktūrą. Kvantorių analogai formalioje kalboje yra vadinami, atitinkamai, bendrumo ir egzistavimo kvantoriais.

Objektas: Plačiausia prasme objektas yra tai, ką galima pavadinti.

Subjektas ir predikatas: Subjektas yra sakinio minties objektas, apie kurį kas nors yra teigiama, kuriam priskiriamas predikatas. Kasdieninėje kalboje predikatas yra kalbos savybė, įgalinanti kažką teigti *apie* ką nors, t. y. subjektui priskirti savybę. Kai sakoma, kad "Petras yra aukštas", tai Petras yra subjektas ir jam priskiriamas predikatas "yra aukštas". Taip pat galima sakyti, jog turime Petro aukštumo predikatą, arba jog Petrui priskiriamas aukstumo predikatas.

Semantika ir sintaksė: Plačiąja prasme semantika yra reikšmės (angl. meaning), kuria nors šio žodžio prasme, tyrimas. Priešinga semantikai yra sintaksė, pirmąją suprantant kaip ko nors reikšmę, o antrąją suvokiant kaip formalią struktūrą nudojamą kažkam išreikšti. Lingvistikoje (mokslas apie kalbą) semantika yra žodžių, frazių, sakinių ar tekstų reikšmės tyrimas. Tuo tarpu sintaksė yra tyrimas taisyklių, kurios nustato žodžių tvarką sakinyje.

Kategorinis silogizmas: tai yra dedukcinis argumentas, kuri dudaro trys kategoriniai teiginiai, du iš jų prielaidos ir išvada.

Literatūra.

[FŽ] Alois Halder. Filosofijos žodynas.

B.2 Anglų-lietuvių kalbų žodinėlis

Lietuviškai	*Angliškai*
kvantorius	quantifier
laipsninė aibė	power set
pavienė aibė	singleton
protas	mind
sąmonė	consciousness

Pagal [MTŽ] power set = cardinality of set = aibės galia.

Literatūra.

[MTŽ] J. Kubilius (Red.). Matematikos terminų žodynas. Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1994.

Literatūra

[1] Balaguer, Mark, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press, 1998.

[2] Benacerraf, P. and Putnam, H. (Eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. 2nd edn. Cambridge, 1983.

[3] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. Routledge, London, 1999.

[4] Burges, J. P. and Rosen, G., *A Subject with No Object. Strategies for Nominalistic Interpretations of Mathematics.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[5] Colyvan, M., *The Indispensability of Mathematics*. Oxford University, 2001.

[6] Dales, H. G. and Oliver, G. (Eds.), *Thruth in Mathematics.* Clarendon, Oxford, 1998.

[7] Frege, Gottlab, *Die Grundlagen der Arithmetik*. 1884. Angl. vertimas J. L. Austin: *The Foundations of Arithmetic*. Oxford, 1959. (yra VU bibliotekoje)

[8] Frege, Gottlab, *Der Gedanke: Eine Logische Untersuchung*. 1918. Angl. vertimas A. Quinton ir M. Quinton: *The Thought: A Logical Enquiry* rinkinyje Klemke (Red.) *Essays on Frege*, Chicago, 1968.

[9] Friedman, M., *Foundations of Spacetime Theories.* Princeton University press.

[10] Gödel, K., Russell's Mathematical Logic. Reprinted in [2, pp. 218-219].

[11] Khlentzos, D., *Naturalistic Realism and the Antirealistic Chalenge.* The MIT Press, 2004.

[12] Mac Lane, S., Mathematical logic is neither foundations nor philosophy. *Philosophia Mathematica*, Second Ser., **1**, No. 1-2 (1986), 3-14.

[13] Maddy, Penelope, *Realism in Mathematics.* Oxford University Press, 1990.

[14] Maddy, Penelope, *Naturalism in Mathematics.* Oxford University Press, 1997.

[15] Potter, Michael, *Set Theory and its Philosophy. A Critical Introduction.* Oxford University Press, 2004.

[16] Resnik, M. D., *Mathematics as a Science of Patterns.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[17] Shapiro, S., *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics.* Oxford University Press, 2000.

[18] Stigum, B. P., *Econometrics and the Philosophy of Economics*, Princeton University Press, 2003.

[19] Tiles, M., *The Philosophy of Set Theory. An Historical Introduction to Cantor's Paradise.* Dover, New York, 1989.

[20] Tymoczko, T. (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology*. Revised and expanded edition. Princeton University Press, 1998.