MODERNIOSIOS FINANSŲ RINKOS TEORIJOS PAGRINDAI

Paskaitų konspektas - 18 Variantas

Rimas Norvaiša

E-paštas: norvaisa @ktl.mii.lt

Vilnius, 2006 sausis

Turinys

0.1 Klausimai atsiskaitymui už 2005 metų rudens kurso pirmąją pusę

1. Apibūdinti finansų sistemą.
2. Kainų sistema, portfelis ir finansavimosi strategija diskretaus laiko modelyje.

1. Finansų rinkos nauda ir rizika.
2. Kas yra arbitražas? Parodyti, kad sąžiningojo lošimo rinka yra bearbitražė.

1. Nerizikingi vertybiniai popieriai: pavyzdžiai ir jų nauda.
2. Įrodyti: jei egzistuoja ekvivalentus rizikai neutralus matas, tai rinka bearbitražė.

1. Kuo skiriasi finansų matematikos modelis nuo matematinės teorijos?
2. Įrodyti: jei rinka bearbitražė, tai egzistuoja ekvivalentus rizikai neutralus matas.

1. Kokia prasme obligacijos yra nerizikingi VP?
2. Kas yra sąžiningojo lošimo rinka? Jos pavyzdžiai?

1. Rizikai neutralus matas Q: diskontuotas vertės procesas yra martingalas atžvilgiu Q.
2. Koks ryšys tarp efektyvios rinkos hipotezės ir sąžiningojo lošimo hipotezės?

1. Kodėl paprastai akcija yra rizikingesnis VP negu obligacija?
2. Strategija yra S-finansavimosi tada ir tik tada, kai ji yra S^*-finansavimosi.

1. Kokiais atvejais pilnas pelningumas ir palūkanų norma sutampa ir kokias atvejais jie skiriasi?
2. Fundamentalioji vertė ir jos ryšys su efektyviosios rinkos hipoteze.

1. Dabartinės vertės principas ir jo taikymo pavyzdžiai.
2. Binominis modelis ir atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė.

1. Kuo skiriasi ir kuo panašios racionaliųjų lūkesčių ir efektyviosios rinkos hipotezės?
2. Sąžiningojo lošimo rinka; parodyti, kad diskontuotas kainos procesas joje yra martingalas.

0.2 Klausimai atsiskaitymui už 2005 metų rudens kurso antrąją pusę

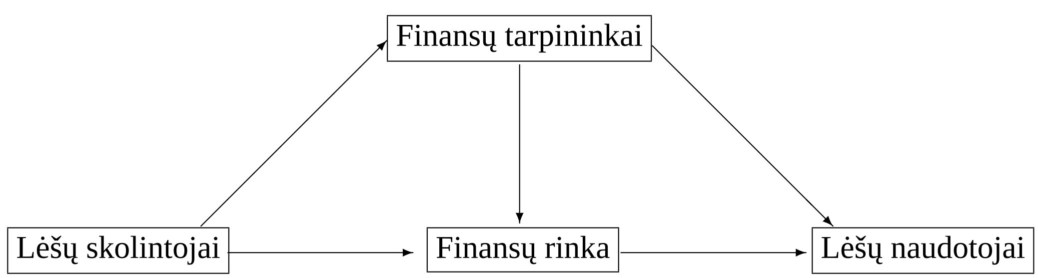
1. Kaip išvedama Black'o-Scholes'o formulė?
2. Kaip konstruojamas rizikai neutralus matas Black'o-Scholes rinkos modelyje?
3. Kuo skiriasi strategijos sampratos diskretaus ir tolydaus laiko rinkos modeliuose?
4. Parodyti, kad kad finansinę išmoką H atkartojančios strategijos portfelis išreiškiamas H sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu rizikai neutralaus mato.
5. Ar Black'o-Scholes'o rinkoje atkartojama finansinė išmoka turi bearbitražę kainą ir kaip ji skaičiuojama?
6. Apibudinti diskontuotos išmokos bearbitražių kainų aibę rinkoje, kurioje egzistuoja bent vienas ekvivalentus rizikai neutralus matas.
7. Koks yra tolydaus laiko rinkos modelis ir kuo jis skiriasi nuo diskretaus laiko modelio?
8. Parodyti, kad bearbitražėje ir pilnoje diskretaus laiko rinkoje egzistuoja vienintelis rizikai neutralus matas.
9. Kas yra Wiener'io procesas ir kaip jis naudojamas finansų rinkos modeliuose?
10. Koks yra ryšys tarp tolydžiųjų sudėtinių palūkanų ir geometrinio Wiener'io proceso?
11. Kokius žinote išvestinius finansinius popierius ir kam jie naudojami?
12. Kas yra išvestiniai vertybiniai popieriai ir kokia yra pagrindinė su jais susijusi problema?
13. Rasti finansinės išmokos bearbitražę kainą vieno periodo binominiame rinkos modelyje.
14. Kokia yra finansinės išmokos įkainavimo mechanizmo esmė?
15. Kuos skiriasi arbitražo sampratos diskretaus ir tolydaus laiko rinkos modeliuose?
16. Kas yra atkartojama finansinė išmoka?

Skyrius 1

Finansų sistema

1.1 Finansų rinkos ir rizika

Finansų sistema nukreipia lėšas iš tų, kas jų turi per daug, tiems, kam jų trūksta. Tai yra pagrindinė finansų sistemos funkcija.



1.1: Lėšų srautai finansų sistemoje

Šioje finansų sistemos schemoje:

(1) Lėšų skolintojais arba investuotojais yra privatūs asmenys, namų ūkiai arba organizacijos: vyriausybės, pensijų fondai, investicinės bendrovės, taupymo fondai ir kitos institucijos, valdančios didelius akcijų portfelius. Lėšų skolinimo būdai yra akcijų ir obligacijų pirkimas, pinigų laikymas bankų sąskaitas ir pan.

(2) Lėšų naudotojai yra akcinės bendrovės, kompanijos, firmos, vyriausybė, namų ūkiai, užsieniečiai ir t.t. Bendrovė yra ekonomine veikla (gamyba) užsiimantis ūkio vienetas. Bendrovė turi savo nuosavybę. Gamybos plėtrai bendrovė suinteresuota papildomomis lėšomis. Tokių lėšų gavimo šaltiniai yra akcijų ir obligacijų pardavimas arba bankų paskolos.

(3) Finansų tarpininkai yra bankai, investiciniai fondai (mutual funds), draudimo kompanijos, pensijų fondai, finansų maklerių įmonės ir t.t. Finansų tarpininko pagrindinis vaidmuo yra skolintis pinigus iš vienos dalies žmonių ir skolinti pinigus kitai žmonių daliai.

Finansų tarpininkų pelną sudaro įvairūs šaltiniai: mokesčiai už finansines paslaugas, informaciją ir pan. Bendrovėms paprasčiau skolintis iš finansų tarpininkų dėl skolinimosi paprastumo ir dėl rizikos mažinimo. Finansų makleriai tarpininkauja biržoje perkant ir parduodant akcijas savo klientų pavedimu. Finansų makleris paprastai suteikia konsultacijas dėl investavimo alternatyvų, bet gali prekiauti ir už savo lėšas. Pats investitorius tiesiogiai negali biržoje pirkti ar parduoti VP. Lietuvoje 2002 metų pabaigoje Nacionalinėje vertybinių popierių biržoje buvo užregistruoti 23 finansų tarpininkai. Iš jų 9 buvo bankų padaliniai ir 14 finansų maklerio įmonių.

(4) Finansų rinka vadinama tokia ekonominė rinka, kurioje operuojama (prekiaujama, mainoma ir pan.) vertybiniais popieriais. Pavyzdžiui: (a) bendrovių ir valstybės nuosavybės vertybiniai popieriai sudaro *akcijų rinką*; (b) ilgalaikiai ir vidutinės trukmės skolos vertybiniai popieriai sudaro *obligacijų rinką*; (c) trumpalaikių lėšų skolinimosi rinka vadinama *pinigų rinka*; (d) užsienio valiutos sudaro *valiutų rinką* (joje nustatomas skirtingų valiutų keitimo kursas, t.y. vienos valiutos kaina atžvilgiu kitos); bei kitos rinkos prekiaujančios įvairiais finansiniais instrumentais. Akcijų arba obligacijų rinka vadinama *kapitalo rinka*. Prie finansų rinkų taip pat priskiriamos ir investicinių prekių rinkos (brangiųjų metalų ir pan.). Paviršutiniškai lyginant, finansų rinkos skiriasi nuo vartojimo prekių rinkų savo dinamiškumu ir dideliu neapibrėžtumo laipsniu.

Pagal 1.1 schemą, lėšos jų naudotojams patenka iš skolintojų dviem keliais. Pirmuoju būdu lėšos jų naudotojams patenka iš skolintojų tiesiogiai per finansų rinkas. Tuo atveju lėšos turi vertybinių popierių formą: akcijos, obligacijos ir panašiai. Antras lėšų perskirstymo kelias eina per finansų tarpininkus. Finansų tarpininkai palengvina ir supaprastina bendravimą tarp lėšų skolintojų ir jų naudotojų. Tuo tarpu finansų rinka, per vertybinių popierių kainos mechanizmą sprendžia pagrindinį rinkos ekonomikos uždavinį: optimaliai paskirsto turimus išteklius. Šia prasme finansų rinkos užima centrinę vietą finansų struktūroje.

Finansų tarpininkų ir finansų rinkų santykines dalis finansų sistemoje lemia daugelis veiksnių ir jos yra skirtingos įvairiose šalyse. Remiantis [10, p. 171], verslo išorinio finansavimo struktūrą JAV, Vokieijoje ir Japonijoje sudaro:

....	JAV	*Vokietija*	*Japonija*	*Lietuva*
Bankų paskolos	40,2%	$\approx$ 80%	$\approx$ 83%	??
Nebankų paskolos	15,1%	$\approx$ 10%	??	??
Obligacijos	35,5%	$\approx$ 8%	$\approx$ 10%	??
Akcijos	9,2%	$\approx$ 4%	$\approx$ 2%	??

Viena iš pagrindinių priežasčių nulemianti finansų sistemos struktūrą yra finansinių operacijų kaina (angl. transaction costs). Nedideli vertybinių popierių kiekiai, kuriuos gali įpirkti vidutinių pajamų žmogus, nėra verta investicija dėl sąlyginai didelio mokesčio mokamo finansų makleriui ir tai riboja tiesioginį lėšų skolinimą. Kuo didesnis įsigyjamų vertybinių popierių kiekis tuo mažesnė yra jų įsigijimo ir valdymo kaina[1]. Todėl smulkiam investuotojui tenka kreiptis į finansų tarpininkus, kurie apjungia gautas lėšas gali įsigyti didelį vertybinių popierių kiekį

[1] angliškai ši savybė vadinama economy of scale

už sąlyginai nedidelę finansinių operacijų kainą. Kita svarbi finansinių tarpininkų naudingumo ypatybė yra jų aukšta finansinė kvalifikacija.

Skirtingose šalyse investavimo būdai turi skirtingą populiarumo laipsnį. Pavyzdžiui, į akcijas daugiausia investuojanti tauta yra švedai. Apie 45% švedų tiesiogiai (neskaičiuojant tų, kurie investuoja per institucinius investuotojus) turi bendrovių akcijų. JAV ir Kanada dalijasi antrąja vieta, čia investuotojai sudaro 26% gyventojų. Lietuvoje į akcijas investuoja mažiau nei 1% gyventojų.

Investuotojų finansinę veiklą lemia dilema: vartojimas – investavimas. Vartojimo veikla nukreipta į dabartį ir sprendžia problemą kiek skirti vartojimui ir kiek santaupoms. Ekonomikos teorijos kontekste vartojimą tiria individualaus gėrybių pasirinkimo teorija grindžiama preferencijų ir naudingumo funkcijos kriterijais bei racionalių sprendimų prielaida.

Tuo tarpu investavimo veikla nukreipta į ateitį, siekiant didesnės grąžos tam, kad daugiau vartoti ateityje. Šią veiklos sritį nagrinėja matematinė portfelio teorija. Portfelio teorija sprendžia optimalaus lėšų investavimo į vertybinius popierius problemą, atsižvelgiant į rizikingumo laipsnį. Pagrindinę šios teorijos idėją – diversifikaciją – nusako patarlės: „nedėk visų kiaušinių į vieną krepšį", arba „nerizikuosi – nelaimėsi".

Rizika. Rizika, siejama su finansinėmis vertybėmis, yra pagrindinė finansų ekonomikos sąvoka. Jos apibudinimui paprasčiau iš pradžių išsiaiškinti kas yra vadinama nerizikinga vertybė. Vertybinis popierius kurio vertė kiekvienu ateities momentu yra tikrai žinoma vadinamas nerizikingu. Ar toks vertybinis popierius iš tikro egzistuoja? Pavyzdžiui, vienas litas po metų vertas mažiau ir tiksli jo vertė priklauso nuo infliacijos ir gal būt kitų sunkiai apibrėžiamų faktorių. Apskritai, dėl psichologinių priežasčių, tas pats daiktas gali būti labiau vertinamas šiandien nei po kurio laiko. Tačiau tiek finansų praktikoje tiek ir finansų teorijoje dėl įvairių priežasčių yra būtina turėti nerizikingą vertybę ir tokia yra laikoma obligacija arba bet kuris kitas vertybinis popierius su fiksuotomis pajamomis ateityje. Nors, griežtai kalbant, obligacija nėra visiškai nerizikinga vertybė nes, pavyzdžiui, ją išleidusi vyriausybė gali bankrutuoti kaip ir privati bendrovė, ji *laikoma* esant nerizikinga.

Taigi, rizikinga atrodytų esti tokia vertybė, kuri nėra nerizikinga, t. y. vertybė su neapibrėžta verte ateityje. Rizikingos vertybės pavyzdžiu aišku yra paprastoji akcija. Tiksliau kalbant *rizikinga* vadinama tokia finansinė vertybė kurios ateities kaina gali būti mažesne už to paties kiekio nerizikingos vertybės kainą tuo pačiu ateities momentu. Tokiu būdu nerizikinga finansinė vertybė tampa rizikingumo atskaitos sistema. Bet kuriuo atveju, rizika finansiniame kontekste yra sinonimas ateities neapibrėžtumui.

Finansų rinkos nauda. Finansų rinkos vaidmuo ekonomikai yra labai svarbus nes paprastai lėšų skolintojai ir lėšų naudotojai yra skirtingi. Pavyzdžiui, bendrovės, platindamos savo akcijas finansų rinkose, įgyja kapitalą gamybai plėsti, o investuotojai pirkdami akcijas skolina savo lėšas siekdami gauti dalį gamybos pelno. Finansų rinkos naudą galima suprasti ir iš toliau aprašyto pavyzdžio. *Kapitalo vertybe* (angl. capital asset) yra laikomas kontraktas tarp investuotojo ir „išorinio pasaulio". Tuo tarpu *finansinė vertybė* (angl. financial security) yra kontraktas tarp investuotojų. Tai yra dar vienas VP skirstymo būdas. Abiejų rūšių vertybės gali būti įvairiai susiję arba nesusiję. Jei ponas A pasodino medį, tai jis yra šios vertybės savininkas, o kapitalo vertybė yra tai kas įrodo savininko teisę į pasodintą medį. Medžio savininko ateities pajamos priklausys nuo medžio produktyvumo ir nuo vaisių paklausos. Ponas A už tam tikrą mokestį gali pasižadėti ateityje perleisti ponui B dalį gauto derliaus. Tokio pasižadėjimo liudijimas yra finansinė vertybė priklausanti ponui B. Ponas A gali pasižadėti perduoti visą gautą derlių. Tokiu atveju ponas B praktiškai būtų medžio savininkas, o ponas A būtų tik tarpininkas.

Tačiau tikrasis finansinės vertybės prasmingumas atsiskleidžia tuo atveju, kai ponas A pasodina tarkim tūkstantį medžių. Tokiu atveju derliaus dydis ir vaisių paklausos svyravimas gali būti labai didelis. Vienam ponui A auginti tūkstantį medžių gali būti papraščiau ir efektyviau, tačiau ši kapitalo vertybė tampa ir labiau rizikinga. Todėl ponas A galėtų tapti verslininku ir auginti medžius parduodamas savo kapitalo vertybę dalimis daugeliui kitų žmonių. Tokie kontraktai – finansinės vertybės – reikštų pasižadėjimą perduoti tam tikrą gauto derliaus dalį. Tuo pačiu ponas A pasidalina rizika su kitais investuotojais. Toks rizikos pasidalinimas yra pagrindinė vertybinių popierių rinkos idėja.

Vertybiniai popieriai. Bet kurią finansinę priemonę, naudojamą lėšų perskirstymui finansų rinkoje, vadinsime *vertybiniu popieriumi* (angl. security) arba trumpiau VP. Vertybiniai popieriai yra vertybė (aktyvas) tiems, kas juos perka, t.y. lėšų skolintojams, ir yra įsiskolinimo liudijimas (pasyvas) tiems, kas vertybinius popierius parduoda, t.y. lėšų naudotojams. Dažniausiai VP yra skirstomi į pirminius ir išvestinius. *Pirminis VP* (angl. primitive security) yra nuosavybės dokumentas, suteikiantis teisę į tam tikrą finansinę išmoką. Pirminių VP pavyzdžiai yra akcijos, obligacijos, iždo vekseliai ir t.t. Obligacijos ir iždo vekseliai yra fiksuoto dydžio finansines išmokas garantuojantys skolos dokumentai. Akcija yra bendrovės dalies nuosavybės liudijimas suteikiantis teisę į kintamo dydžio finansinę išmoką, priklausančią nuo pelno. Daugiau apie pirminius VP kalbama kitame skyriuje.

Tuo tarpu *išvestinis VP* (angl. derivative security) yra finansinis susitarimas tarp rinkos dalyvių, dažnai priklausantis nuo kitų pirminių VP. Išvestinių VP pavyzdžiai yra pasirenkamasis sandoris (angl. option). Daugiau apie išvestinius VP kalbėsime 3.3 skyriuje.

Rinkoje naudojamų finansinių priemonių klasifikacija nėra visuotinai priimta ir gali skirtis netgi skirtinguose vadovėliuose. Be to, VP skirstymas yra galimas įvairiais požiūriais. Pavyzdžiui, galima kalbėti apie rizikingus VP ir nerizikingus VP, skirstant pagal ateities išmokų garantijas.

1.2 Nerizikingi vertybiniai popieriai

Kaip buvo minėta, ypatingą vaidmenį finansų rinkose atlieka nerizikingais vadinami VP su fiksuotomis ateities pajamomis (angl. fixed income securities), kurios išmokamos palūkanų, o kartais ir dividendų pavidalu. Tokiais VP visų pirma yra obligacijos, įvairių rūšių sertifikatai, vekseliai ir kitos įsipareigojimų rūšys. Čia galima priskirti ir privilegiuotas akcijas, pagal kurias išmokamos iš anksto sutartos pajamos.

Palūkanos (interest) yra lėšų skolinimosi kaina. Tai – kaina mokama kreditoriui už galimybę tam tikrą laikotarpį naudotis jo pinigais. Išreikšta procentais ši kaina vadinama *palūkanų norma* (interest rate). Priklausomai nuo VP popierių rūšies palūkanų norma skaičiuojama skirtingai. Palūkanų normos dydis apsprendžia kokia laisvų lėšų dalis laikoma pinigais ir kokia jų dalis investuojama į nerizikingus VP. Šia savybe grindžiama ne tik monetarine politika bet ja naudojasi ir privatus investuotojai.

Pagrindinės VP su fiksuotomis pajamomis rūšys. 1. Paprasta paskola (angl. a simple loan). Skolintojas perduoda lėšas skolininkui su sąlyga, kad paskolinta suma bus gražinta skolintojui sutartu ateities momentu kartu su palūkanomis.

2. Paskola su fiksuotomis išmokomis (angl. a fixed-payment loan). Skolintojas perduoda lėšas skolininkui su sąlyga, kad paskolinta suma ir palūkanos bus grąžinamos vienodomis dalimis periodiškais laiko momentais. Pavyzdžiui, paskolinus 1000Lt, paskola su fiksuotpomis išmokomis gali reikalauti mokėti 126Lt kas metai 25 metus.

3. Obligacija su atkarpomis (angl. a coupon bond). Obligacija išmoka jos turėtojui vienodo dydžio C palūkanas (atkarpas) vienodais laiko periodais iki grąžinimo termino, kurio metu papildomai išmokama sutarta galutinė suma F. Pavyzdžiui, už 1000Lt įsigyta obligacija su atkarpomis gali 10 metų kas metai mokėti $C = 100$Lt dydžio atkarpas ir, suėjus skolos grąžinimo terminui, išmokėti $F = 1000$Lt. *Atkarpos procentu* (angl. coupon rate) vadinamas santykis C/F.

4. Nulinės atkarpos obligacija (angl. zero-coupon bond). Tai yra obligacija, kurios įsigijimo kaina yra mažesnė už galutinę sumą išmokamą suėjus grąžinimo terminui. Pavyzdžiui, už 900Lt įsigyta nulinės atkarpos obligacija, po metų jos savininkui išmoka 1000Lt.

Obligacijos. Labiausiai paplitusi VP su fiksuotomis pajamomis rūšis yra obligacija. Pagal Lietuvos Respublikos civilinį kodeksą, obligacija - tai VP, patvirtinantis jos turėtojo (kreditoriaus) teisę gauti iš obligaciją išleidusio asmens (emitento) joje nustatytais terminais nominalią obligacijos vertę, metines palūkanas ar kitokį ekvivalentą arba kitas turtines teises.

Obligacija yra nusakoma keliomis ją charakterizuojančiomis savybėmis:

• visų pirma, obligacija yra nusakoma ją išleidusios institucijos pavadinimu. Paprastai obligacijas išleidžia: šalies vyriausybė, bendrovės, vietiniai valdžios organai ir užsienio šalių vyriausybės;

• *obligacijos įsigijimo kaina* (angl. bond price): kaina už kurią emitentas parduoda obligaciją pirkėjui;

• *grąžinimo terminu* (angl. maturity): data, kai baigiasi VP gyvavimo laikas, t. y. kai obligacija yra pilnai išperkama;

• *nominalia verte* (angl. nominal value) arba nominalu: Emitento išmokamas pinigų kiekis suėjus VP grąžinimo terminui;

• *palūkanų norma* i, kuri paprastos paskolos atveju yra

$$i := \frac{P(1) - P(0)}{P(0)} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1 \qquad \text{arba} \qquad 10\%;$$

čia $P(0) = 100$ yra paskolinta suma ir $P(1) = 110$ yra grąžinta suma (pastaba: finansinėje literatūroje vietoje "arba" paprastai rašoma "="). Kitoms VP su fiksuotomis pajamomis rūšims palūkanų normos skaičiavimas aptariamas kitame skyriuje.

Pinigai gali būti priskirti obligacijoms, kurių palūkanų norma yra nulis, o grąžinimo terminas taip pat nulis (atsiskaitoma iš karto). Šiuo atveju emitentas yra vyriausybė, garantuojanti galimybę bet kada atsiskaityti pinigais. Banko sąskaita taip pat gali būti laikoma obligacija, kurios emitentas yra bankas.

Priklausomai nuo grąžinimo termino, obligacijos skirstomos į ilgalaikes, vidutinės trukmės ir trumpalaikes. Ilgalaikėmis vadinamos obligacijos, kurių grąžinimo terminas yra didesnis negu 10 metų. Trumpalaikėmis vadinamos obligacijos, kurių grąžinimo terminas yra nedidesnis negu vieneri metai. Trumpalaikės obligacijos vadinamos *iždo vekseliais* ir jų grąžinimo terminas dažniausiai yra 1, 3, 6, 12 mėnesių trukmės.

Obligacijų rinka. Obligacijos, kaip ir visos kitos prekės turi savo prekybos rinką – obligacijų rinka. Obligacijas galima pirkti/parduoti ir po to kai jos išleidžiamos. Obligacijų rinkoje kasdien nustatoma kaina, kurią besiskolintieji privalo mokėti už įvairios trukmės paskolas. Palūkanų normos įvairiems skolos ar kredito instrumentams gali būti skirtingos. Vienokia palūkanų norma gali būti taikoma vyriausybės VP ar iždo vekseliams, ir visai kitokia – komerciniams vekseliams ar bendrovių obligacijoms. Būtent obligacijų rinkos palūkanų normos lemia, kiek kainuos terminuotasis indėlis ar einamoji sąskaita banke.

1.3 Palūkanų skaičiavimas

Palūkanų norma yra vienas iš svarbiausių ekonominių rodiklių, nuo kurio priklauso daugelis sprendimų. Priminsime, jog palūkanos yra lėšų skolinimosi kaina, o palūkanų normos skaičiavimas priklauso nuo VP rūšies. Viena iš dažniausiai naudojamų palūkanų normų yra pelningumas iki gražinimo termino (angl. yield to maturity) arba trumpiau *pilnas pelningumas*. Ekonomistai dažnai sutapatina palūkanų normą su pilnu pelningumu. Matysime, jog obligacijos palūkanų norma nebūtinai tiksliai įvertina jos kaip investicijos naudingumą, nes nebūtinai sutampa su vadinamąja grąžos norma.

Skirtingi skolos VP pasižymi skirtingais išmokų srautais ir skirtingais mokėjimų laiko momentais. Todėl yra sunku palyginti tokius VP. Tuo tikslu yra naudojama VP vertė dabarties momentu.

Dabartinė vertė. Ši sąvoka atspindi tokį pastebėjimą: 1Lt ateityje yra mažiau vertingas negu 1Lt šiandien. Pavyzdžiui, šiandien padėjus 1Lt į banko sąskaitą, ateityje, priskaičiavus palūkanas, jis bus vertas daugiau.

Toliau formuluojamas principas neretai vadinamas pagrindiniu finansų ekonomikos principu.

1.1 Apibrėžimas. Ateities išmokos *dabartine verte (angl. present value)* vadinama tokia vertė, kurią investavus gaunama duotoji ateities išmoka.

Tuo atveju kai ateities išmoka yra VP su fiksuotomis išmokomis, jos dabartinė vertė priklauso nuo palūkanų normos ir ateities laikotarpio. Nagrinėkime paprastos paskolos pavyzdį. Ponas A paskolina ponui B 100Lt su sąlyga, kad skola bus grąžinta po metų ir už skolinimą sumokėta

10Lt palūkanų. Šiuo atveju palūkanų norma vadinamas santykis

$$i = \frac{10Lt}{100Lt} = 0.1 \qquad \text{arba} \qquad 10\%.$$

Taigi, po vienerių metų, skolintojas gauna

$$AV_1 = 110Lt = 100Lt + 10Lt = (1+i) \times 100Lt$$

ir todėl paskolintos sumos vertė po metų yra $AV_1 = 110$Lt. Šios ateities išmokos dabartinė vertė yra

$$DV = \frac{AV_1}{1+i} = 100Lt.$$

Šiuo atveju taip pat sakoma, kad DV yra *diskontuota* AV_1 verte, o $1/(1+i)$ yra vadinamas *diskonto daugikliu*.

Jei po metų gauta suma AV_1 vėl paskolinama metams su tokia pačia palūkanų norma $i = 0.1$, tai po dviejų metų skolintojas gauna

$$AV_2 = 121Lt = (1+i) \times 110Lt = (1+i)^2 \times 100Lt.$$

Tęsiant skolinimą tokiomis pačiomis sąlygomis n metų, paskolintos sumos vertė yra

$$AV_n = (1+i)^n \times 100Lt.$$

Atvirkščiai, žinodami paskolintos sumos vertę AV po n metų ir metinę palūkanų normą i, galime suskaičiuoti *dabartinę vertę*:

$$DV = \frac{AV_n}{(1+i)^n}.$$

Jei VP išmokos nustatytos skirtingais ateities momentais, tai jo dabartinė vertė yra visų išmokų dabarties verčių suma. Pavyzdžiui, jei VP po k metų išmoka lygi AV_k, $k = 1, \ldots, n$, tai dabartinė šio VP vertė yra

$$DV = \frac{AV_1}{1+i} + \frac{AV_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{AV_n}{(1+i)^n}.$$

Kaip jau buvo minėta, dabartinė vertė priklauso nuo palūkanų normos i.

Pilnas pelningumas. Trumpai sakant, pilnas pelningumas (angl. yield) yra tokia palūkanų norma i, kuriai apskaičiuota dabartinė vertė yra lygi šios dienos kainai obligacijų rinkoje. Suskaičiuosime pilną pelningumą keturioms pagrindinėms VP su fiksuotomis pajamomis rūšims.

Nagrinėkime paprastą paskolą, kurios šios dienos pardavimo kaina yra $P(0) = 100$Lt, paskola grąžinama po metų $P(1) = 110$Lt. Pilnam pelningumui suskaičiuoti turime lygtį

$$100Lt = \frac{110Lt}{1+i},$$

kurią išsprendę gauname

$$i = \frac{110Lt - 100Lt}{100Lt} = \frac{10Lt}{100Lt} = 0.1 \quad \text{arba} \quad 10\%.$$

Matome, kad paprastos paskolos atveju pilnas pelningumas sutampa su palūkanų norma.

Nagrinėkime paskolą su fiksuotomis išmokomis. Tegul FI yra fiksuota kasmetinė išmoka, $P(0)$ yra paskolos įsigijimo kaina ir n yra grąžinimo terminas. Pilnam pelningumui suskaičiuoti turime lygtį

$$P(0) = \frac{FI}{1+i} + \frac{FI}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{FI}{(1+i)^n}.$$

Pavyzdžiui, jei $FI = 126$Lt, $P(0) = 1000$Lt ir $n = 25$ metai, tai pastaroji lygtis turi sprendinį $i = 12\%$. Kai kurie skaičiuotuvai (kalkuliaturius yra svetimybė) turi tokių lygčių sprendimo funkciją.

Nagrinėkime obligaciją su atkarpomis. Tegul P yra obligacijos įsigijimo kaina, C yra atkarpos dydis, n yra yra grąžinimo terminas ir F yra nominali vertė. Šiuo atveju pilnam pelningumui suskaičiuoti turime lygtį

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{F}{(1+i)^n}.$$

Pavyzdžiui, tegul $C = 100$Lt, $F = 1000$Lt ir $n = 10$. Priklausomai nuo įsigijimo kainos P, pilnas pelningumas yra:

$1200LT$	$7,13\%$
$1100LT$	$8,48\%$
$1000LT$	$10,00\%$
$900LT$	$11,75\%$
$800LT$	$13,81\%$

Pratimas: rasti pilną pelningumą i, kai $P = F$.

Pagaliau nustatysime pilną pelningumą paskutinei ketvirtajai nagrinėjamų obligacijų rūšiai - nulinės atkarpos obligacijąi. Lyginant su ankstesne obligacija, dabar $C = 0$ ir $n = 1$. Tada

$$P = \frac{F}{1+i} \qquad \text{arba} \qquad i = \frac{F-P}{P}.$$

Palūkanų norma ir grąžos norma. Nagrinėkime obligaciją su atkarpa C. Tarkime, kad obligacijos rinkos kaina momentu $t-1$ yra $P(t-1)$, o momentu t jos rinkos kaina yra $P(t)$. Tada jos *grąžos norma* tarp laiko momentų $t-1$ ir t yra

$$r(t) := \frac{C + P(t) - P(t-1)}{P(t-1)}.$$

Pavyzdžiui, kai $P(0) = 1000$ Lt $F = 1000$ Lt ir $C = 100$ Lt. Tarkime, kad po metų ši obligacija parduota už $P(1) = 1200$ Lt. Tada grąžos norma tarp laiko momentų 0 ir 1 yra

$$r(1) = \frac{100Lt + 200Lt}{1000Lt} = 0.3 \quad \text{arba} \quad 30\%.$$

Tuo tarpu pilnas pelningumas šiuo atveju yra 10%.

Paprastos ir sudėtinės palūkanos. Priklausomai nuo to, ar būsimos palūkanos mokamos nuo anksčiau gautų palūkanų, ar ne, sakoma, kad palūkanos yra arba sudėtinės (angl. compound) arba paprastos (angl. simple). Paprastai, palūkanos mokamos nuo sukauptos sumos (balanso) jei iki tol gautos palūkanos nėra panaudojamos kam nors kitam, t.y. paprastai naudojamos sudėtinės palūkanos.

Kalbant apie sudėtines palūkanas yra svarbu tai, kaip dažnai išmokamos palūkanos: kas metai, kas mėnesį, kas savaite ar kurį nors kitą laikotarpį. Galutinė išmoka priklauso ne tik nuo palūkanų normos, bet ir nuo išmokų periodiškumo. Tarkime, kad i_k yra paprastos palūkanos išmokamos kas tris mėnesius (ketvirtinės palūkanos). Tada 1 Lt šiandien, po metų yra vertas $1 + 4i_k$ Lt. Jei i_k yra sudėtinės ketvirtinės palūkanos, tai 1 Lt šiandien, po trijų mėnesių vertas $1+i_k$ Lt, kuris savo ruožtu po šešių mėnesių vertas $(1+i_k)(1+i_k)$ Lt ir pagaliau vertas $(1+i_k)^4$ Lt po metų.

Norint palyginti dvi palūkanų normas, atitinkančias skirtingus mokėjimo periodiškumus (pavyzdžiui, ketvirtines ir pusmetines), paprastai lyginamos palūkanų normos perskaičiavus jas vienerių metų periodui. Tuo tikslu paprastai daroma prielaida, kad kitais metų periodais palūkanų norma išlieka ta pati. Be to, perskaičiavimas į vienerių metų periodą priklauso nuo to ar palūkanos yra paprastos ar sudėtinės. Yra sakoma, kad (metinė) palūkanų norma yra *nominalioji*, jei ji gaunama naudojant paprastas palūkanų normas. Pavyzdžiui, nominaliąją palūkanų normą j atitinkanti ketvirtinė palūkanų norma yra $j/4$. Sakoma, kad metinė palūkanų norma yra *efektyvioji*, jei ji gaunama naudojant sudėtines palūkanų normas. Efektyviąją palūkanų normą i atitiks tokia ketvirtinė palūkanų norma i_k, kad $1 + i = (1 + i_k)^4$. Pavyzdžiui, jei ketvirtinė palūkanų norma $i_k = 1,5\%$, tai efektyvioji palūkanų norma yra $i = 6,1364\%$, o nominalioji - $j = 6\%$, t.y. $j = 4i_k$. Kitas pavyzdys: jei pusmetinė palūkanų norma yra $i_p = 3\%$, tai efektyvioji palūkanų norma, gaunama iš lygybės $1 + i = (1 + i_p)^2$, yra $i = 6,09\%$, o nominalioji - vėlgi yra $j = 6\%$, t.y. $j = 2i_p$.

Taigi efektyvioji palūkanų norma priklauso nuo išmokų periodiškumo. Be to, smulkinant palūkanų išmokėjimo periodiškumą, efektyvioji palūkanų norma kinta didėdama. Pavyzdžiui, jei nominalioji palūkanų norma yra j ir palūkanos išmokamos kas dieną, tai efektyviajai palūkanų normai i galioja lygybė

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{365}\right)^{365}.$$

Palūkanų norma i vadinama *tolydžiomis sudėtinėmis palūkanomis* (angl. continuously compounded interest rate) jei išmokų periodiškumas yra begalinis, tai yra

$$1 + i = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{j}{n}\right)^{n} = e^{j}.$$

Pavyzdžiui, jei $j = 6\%$, tai tolydžiųjų sudėtinių palūkanų norma yra $i = e^{0,06} - 1 = 0,061837$ arba $i = 6,1837\%$.

1.4 Rizikingi vertybiniai popieriai

Priminsime, kad rizikingais vadinami tie VP, kurių ateities kaina gali būti mažesnė už tą patį kiekį nerizikingų VP tuo pačiu ateities momentu. Rizikingų VP paklausą apsprendžia galimybė gauti didesnę už vidutinę grąžą.

Akcijos. Akcija (angl. share) yra toks VP, kuris suteikia jos turėtojui teisę į tą akciją išleidusios bendrovės pelno dalį; pelno, kuris yra skiriamas vartojimui, o ne tolesniam investavimui. Ši pelno dalis išmokama akcijų savininkams vadinama *dividendais*. Paprastai dividendų dydis yra atsitiktinis ir iš anksto nežinomas, nes priklauso nuo bendrovės pelno ir jos vykdomos politikos. Šis ateities išmokų atsitiktinumas ir yra pagrindinis skirtumas tarp akcijos ir obligacijos. Kitas skirtumas yra tas, kad akcija iš principo neturi galiojimo termino; akcija galioja tol, kol egzistuoja bendrovė.

Formaliai akcija yra dalies bendrovės nuosavybės liudijimas, t. y. akcija yra kapitalo vertybės forma. Akcijas gali įsigyti privatūs asmenys arba kitos bendrovės. Paprastai akcijos turėtojas įgyja balsavimo teisę akcininkų susirinkime sprendžiant įvairius įmonės reikalus ir įgyja teisę į dalį įmonės pelno dividendų forma. Priklausomai nuo tokių teisių buvimo ar nebuvimo, akcijos yra skirstomos į keletą tipų. Pagrindinis akciją charakterizuojantis dydis yra jos kaina. Vertybinių popierių rinkoje su kiekviena akcija paprastai yra susiejama dvi kainų rūšis: paklausos kaina ir pasiūlos kaina. Skirtumas tarp šių dviejų kainų yra mažas ir toliau bus ignoruojamas susiejant akciją su jos kaina. Kadangi kaina nėra fiksuotas dydis ir kinta laikui bėgant, akcijos kaina toliau bus žymima $S(t)$, kaip laiko t funkcija. Modeliuojant kintamasis t gali įgyti arba diskrečias reikšmes $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ arba tolydžias reikšmes $t \in [0, T]$. Pirmuoju atveju modelis yra vadinamas *diskretaus laiko modeliu*, o antruoju atveju - *tolydaus laiko modeliu*. Kainos kitimą lemia ateities neapibrėžtumas, kuris ir sukuria tai kas yra vadinama *rizika*. Na, o kiekybiškai kainos kitimą charakterizuoja *grąža*. Akcijos grąžą sudaro dvi dalys: gauti dividentai ir kainos pokytis gautas perkant-parduodant akciją. Diskretaus laiko modelio atveju paprastai naudojama *grąžos norma* $r(t)$, $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, apibrėžta taip: $r(0) := 0$ ir

$$r(t) := \frac{D(t) + S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}, \qquad \text{kai } t \in \{1, \ldots, T\}; \tag{1.1}$$

čia $D(t)$ žymi dividendų dydį (toliau D bus laikomas lygiu nuliui). Dėl minėto ateities neapibrėžtumo, perkant akciją ir vėliau ją parduodant, gaunamas arba pelnas arba nuostolis, kurie, atitinkamai, vadinami arba teigiama grąža arba neigiama grąža. Nelinkęs į riziką investuotojas(angl. risk-averse investor) perka labiau rizikingą akciją tuo atveju jei tikisi didesnės grąžos.

Vertybinių popierių birža. Birža yra ta vieta, kurioje vyksta akcijų pirkėjų ir pardavėjų susitikimas. Žodis „birža" yra kildinamas nuo van der Bursė vardo: XII amžiaus pradžioje Briugės miestelio pirkliai rinkdavosi van der Bursės šeimos prekybos namuose ir organizuodavo ten prekių aukcionus. Šiais laikais biržoje prekyba vyksta elektroniniu būdu. Paprastai akcijų pardavėjai prašo didesnės kainos už akciją, negu ją siūlo pirkėjai. Šiuo atveju abi pusės siekia tam tikros naudos: pigiau nupirkti ir brangiau parduoti. Sandoris įvyksta, kai pirkėjas ir pardavėjas pagaliau sudera abiem priimtiną kainą.

Finansų rinka, kurioje naujos akcijos ar obligacijos yra pirmą kartą parduodamos tų, kurie jas išleido, vadinama *pirmine*. *Antrine* finansine rinka vadinama VP rinka, kurioje perkami ir parduodami anksčiau išleisti VP. Pirminė finansų rinka nėra laisvai prieinama, kadangi pirminis VP pardavimas paprastai vyksta už uždarų durų. Dažniausiai pirminį akcijų pardavimą padeda vykdyti investicijų bankas.

Antrinėje finansų rinkoje VP pirkimas-pardavimas nesuteikia papildomų lėšų bendrovei, kuri išleido tuos VP. Tačiau tokia rinka atlieka dvi svarbias funkcijas. Ji įgalina lengviau ir greičiau pirkti-parduoti betkuriuos VP ir šis prieinamumas vadinamas VP *likvidumu*. Didesnis likvidumas didina VP poperių poreikį ir tai įgalina VP leidėją brangiau parduoti jas pirminėje rinkoje. Antra, tokia antrinė rinka nustato kainą, pagal kurią VP yra parduodami pirminėje rinkoje. Natūralu, kad pirminėje rinkoje kaina nebus didesnė negu ta, už kurią VP galima parduoti antrinėje rinkoje. Kuo aukštesnė kaina antrinėje rinkoje, tuo brangiau VP parduodama pirminėje rinkoje ir tuo pačiu suteikia daugiau lėšų VP leidėjams. Tokiu būdu antrinė rinka yra labai svarbi VP leidėjams ir toliau nagrinėjamas kainos susidarymo mechanizmas būtent antrinėje finansų rinkoje.

Lietuvoje birža yra vadinama Nacionaline vertybinių popierių birža (NVPB). Savo veiklą NVPB pradėjo 1993 metais ir nuo pat pradžių veikė kaip elektroninė prekyvietė.

Indeksai. Akcijų kainų indeksas yra rodiklis, atspindintis visų arba tam tikrų bendrovių grupės akcijų vidutinės kainos svyravimą per tam tikrą laikotarpį. Šis indeksas skaičiuojamas, einamosios dienos akcijų kainą lyginant su pasirinktos praėjusios dienos akcijų kainomis. Akcijų kaina rodo ilgalaikius akcijos kainos kilimus, kritimus bei tendencijas.

1882 metais Charles H. Dow su partneriu Edward Jones įsteigė bendrovę „Dow Jones Company". Trečiasis partneris, Charles Begstresser, pradedant verslą parėmė pinigais. Savo biure greta New York'o vertybinių popierių biržos jie ėmė leisti „Vakarines pirkėjų žinias", kurios vėliau tapo žinomu dienraščiu „The Wall Street Journal". 1884 metais Dow sudarė savo pirmąjį akcijų biržos kursų vidurkį, apskaičiuotą pagal 9 geležinkelio bendrovių ir dviejų pramonės bendrovių akcijų kainas. Po dvylikos metų savo leidinyje partneriai pradėjo nuolat skelbti Dow ir Jones pramonės vidurkį (angl. Dow Jones Industrial Average – DJIA). Šis naujasis vidurkis apėmė apie 12 apdirbamosios pramonės bendrovių akcijas. Jis būdavo apskaičiuojamas visai paprastai – sudedant visų tų bendrovių akcijų dienos kainas ir dalijant iš 12. Pirmasis apskaičiuotas vidurkis buvo lygus 40,94 dol. už akciją.

1928 metais indeksas jau buvo apskaičiuojamas pagal 30 bendrovių akcijų kainas; tiek bendrovių ir liko indekse iki šiandien. Tačiau pačios bendrovės pasikeitė iš esmės; iš pirmojo sąrašo, sudaryto 1896 metais, beliko tik „General Electric". 2000 m. sausio 19 d. Dow ir Jones indeksas buvo 11 510,14. Tačiau šis skaičius nėra paprastas vidurkis, gaunamas sudėjus kainas ir dalinant iš 30. Dalyti reikia iš ypatingo skaičiaus, vadinamojo daliklio, kuris 1999 m. gruodžio 31 d. buvo 0,201452680. Šis daliklis apskaičiuojamas siekiant išsaugoti Dow ir Jones indekso tęstinumą. Jis keičiasi, kai bendrovės keičia akcijų nominalą (pavyzdžiui, kiekvieną 100 dol. vertės akciją padalija į dvi 50 dol. vertės akcijas), kai keičiasi bendrovių struktūra ir sudedamosios dalys. Per visą indekso gyvavimo istoriją tas daliklis daugsyk keitėsi, dažniausiai mažėdamas. Pavyzdžiui, šiandien vienos kurios nors sąrašo bendrovės akcijos kainų kilimas vienu doleriu Dow ir Jones indeksą padidintų maždaug penkiais punktais, jei visų kitų 29 bendrovių akcijų kainos nepasikeistų.

Akcijų kainos svyravimai. Vertybinių popierių analitikai atidžiai stebi centrinio banko skelbiamus palūkanų normų pasikeitimus, kadangi jie lemia VP kainų pasikeitimus. Pavyzdžiui, sumažinus palūkanų normą, investuotojus labiau tenkina ir mažesnės rizikingų VP grąžos normos dydžiai. Dėl to didėja rizikingų VP kainos, ir tai sutampa su (1.1) išraiška kai $t = 1$, nes šios dienos VP kaina yra

$$S(0) = \frac{D + S(1)}{1 + r(1)}.$$

Be to, mažėjanti palūkanų norma yra palanki ekonominiam augimui. Tai didina dividendų dydžius ir todėl dar padidėja kaina $S(0)$. Šie samprotavimai iliustruoja monetarinės politikos principus.

Apskritai, senai pastebėta, kad rinkos pokyčius sukelia tokie ekonominiai veiksniai, kaip ūkinės veiklos ciklas, įmonės pelnas, infliacija ar valiutų kursai. Netgi mokesčių sistemos pasikeitimai daro didelę įtaką prekybai biržoje. Akcijų kainos dažnai atspindi rinkos dalyvių lūkesčius. Kokia bus ateities ekonominė politika? Kas ateis į valdžią po rinkimų? Nuotaikas akcijų rinkoje smarkiai veikia ir tarptautiniai konfliktai. Pavyzdžiui, karas Irake keičia su nafta susijusių bendrovių akcijų kursą.

Kai akcijų kainos pastebimai kyla, JAV šnekama apie „bulių" rinką (angl. bull market). Akcijų kainoms krintant, minima „lokių" rinka (angl. bear market). Tokie pavadinimai išlikę dar iš tų laikų, kai lokių kailių pirkliai pardavinėdavo savo prekes dar net lokių nenušovę. Vėliau makleris, parduodantis akcijas, kurių dar neturi, buvo lyginamas su lokiu. Tokie makleriai tikisi, kad akcijų kainos nukris ir jie galės akcijų nusipirkti už mažesnę kainą, o parduoti jas brangiau. Kadangi XVIII amžiuje buvo labai populiarios bulių ir lokių kovos, bulius tapo priešingybės lokiui simboliu – makleriu, tikinčiu, kad akcijų kainos kils.

Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį akcijos ir obligacijos kainos kitimo nevienodumą. Jei 1926 metų sausį būtumėte investavę 1 dolerį į vieno mėnesio JAV iždo vekselius (JAV valstybės obligacija), vieną iš saugiausių vertybinių popierių pasaulyje, ir kas mėnesį gautą pelną reinvestavę, tai 1996 metų gruodyje jūsų pelnas būtų14 dolerių. Jei tą patį dolerį būtumėte tokiu pat būdu investavę į S&P indeksą – žymiai rizikingesnių vertybinių popierių portfelį – tai po to paties 71 metų laikotarpio jūsų pelnas būtų1370 dolerių. Tarkime dabar, kad kiekvieną mėnesį sugebate atspėti iš anksto, kuri iš šių dviejų investicijų tą mėnesį duos didesnę grąžą. Koks būtų pelnas, jei, pasinaudoję šia informacija, kiekvieną mėnesį būtumėte investavę į didesniąją grąžą duodančią investiciją? Šio pavyzdžio autoriaus R. Merton'o atsakymas: virš dviejų milijardų dolerių, tiksliau 2296183456 doleriai! Nors tokia tobula prognozė neįmanoma, tačiau šis pavyzdys rodo, kad ir menkas gebėjimas prognozuoti gali atnešti nemenką pelną.

Kaip finansų rinka formuoja kainą? Čia aptarsime tiesiogines priežastis ir aplinkybes nuo kurių priklauso akcijų kaina. Remiantis 1.1 Apibrėžimu, bet kurios investicijos dabartinė vertė yra lygi viso ateityje jos sukuriamo pelno vertė šios dienos kainomis. Kaip šis principas veikia VP rinkoje, kai investicija yra akcija? Perkant konkrečią akciją, investuojama į tą nuosavybę, kurios nuosavybės liudijimu ir yra ši akcija. Bet kurios akcijos pelną sudaro dividendai ir akcijos pirkimo-pardavimo kaina. Šios dienos akcijos kainą pažymėkime $S(0)$ Lt. Tarkime, kad po metų ši akcija išmoka D Lt dividendų, o jos kaina tampa $S(1)$ Lt. Taip pat tarkime, kad šios akcijos grąžos norma praėjus metams yra r, t. y. po metų ši investicija turėtų padidinti pelną $r\,100\%$. Kadangi visas akcijos ateityje sukuriamas pelnas yra išreiškiamas suma $D + S(1)$, o grąžos norma nusako šios investicijos vertę, pagal minėtąjį finansų ekonomikos principą, šiandieninė akcijos kaina yra

$$S(0) = \frac{D + S(1)}{1 + r}. \tag{1.2}$$

Ši formulė sutampa su anksčiau pateiktu gražos normos apibrėžimu, kai $t = 1$ ir $r = r(1)$. Ji nors ir elementari, bet jos dešinė pusė priklauso nuo sunkiai įvertinamų dalykų.

Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį (1.2) formulę. Tarkime vienos telekomo akcijos kaina šiandien yra 50 Lt ir kiekvienais metais ši akcija moka 0.16 Lt dividendų. Taip pat tarkime, kad finansų analitikas šios akcijos kainą po metų įvertino būsiant 60 Lt. Ar verta pirkti šią akciją šiandien? Atsakymas priklauso nuo to, kokio dydžio grąžos galima tikėtis iš šios investicijos. Sakykime, kad pirkėją patenkina grąža $r = 0.12$, arba pelno padidėjimas 12%. Istatę į (1.2) formulės dešiniąją pusę kintamųjų reikšmes, gauname

$$S(0) = \frac{0.16 \text{ Lt}}{1 + 0.12} + \frac{60 \text{ Lt}}{1 + 0.12} = 53.71 \text{ Lt}.$$

Tai reiškia, kad pirkėjas dabartinę akcijos kainą įvertina 53.71 Lt, kas yra daugiau nei esama kaina 50 Lt. Todėl pirkėjas turėtų įsigyti šių telekomo akcijų. Tačiau, reikia nepamiršti, kad toks kainos vertinimas remiasi tikėjimu apie akcijos pelno dydį ateityje. Dabartinė mažesnė šios akcijos kaina gali atspindėti ir tai, kad kiti investuotojai šios akcijos ateities pelną vertina mažesniais skaičiais.

Nuo ko priklauso investicijos ateities pelno vertinimas? Patirinėkime paprastesnį pavyzdį. Tarkime, kad automobilių aukcione tą pačią Mazdą nusižiūrėjo du potencialūs pirkėjai A ir B. Pirkėjas A, išbandęs patikusią automašiną, įvertino ją 5000 Lt. A nuomone tai būtų sąžininga kaina atsižvelgiant į jo pastebėtą nedidelį mašinos trūkumą, kurio pašalinimui reiktų papildomų lėšų (neaišku kiek). Pirkėjas B, išbandęs tą pačią Mazdą, ne tik pastebėjo tą patį trūkumą, bet ir suvokė jo priežastį. Tai leido jam tiksliai įvertinti būsimo remonto kainą ir nuspręsti Mazdą pirkti už 6000 Lt. Kadangi daugiau norinčių pirkti šią Mazdą neatsirado, pirkėjas B ją nusipirko už 5100 Lt. Šis pavyzdys rodo, kad rinkos kainą nustato tas pirkėjas, kuris geriausiai galėtų pasinaudoti preke. Pirkėjas B galėjo pasiūlyti didesnę kainą kadangi jis sugebėjo tiksliau įvertinti galimas išlaidas, t. y. geriau pasinaudoti preke negu pirkėjas A. Šis pavyzdys taip pat rodo, kad vertinimų skirtumui įtaką darė turima *informacija*. Turėjimas daugiau informacijos įgalina mažiau mokėti už riziką, susijusią su ateities neapibrėžtumu. Kitoms aplinkybėms esant vienodoms, tai leidžia daugiau mokėti už investiciją. Nes didesnei rizikai kompensuoti siekiama didesnės grąžos, o tai mažina (1.2) kainą.

Panašų samprotavimą apie informacijos vertę galima pritaikyti ir vertinant kurios nors bendrovės akcijos kainą. Papildomos informacijos turėjimas taip pat leidžia didinti VP šios dienos kainą. Ta papildoma informacija galėtų būti žinios apie bendrovės realią padėtį. Jei ši informacija teigiama, tai jos turėtojas gali pasitenkinti ir mažesne grąža ir todėl daugiau mokėti už bendrovės VP. Nauja informacija apie bendrovę keičia investuotojų lūkesčius apie galimus dividendų dydžius arba jų rizikingumą. Tokiu būdu tolesnis kainos formavimosi mechanizmo aiškinimas remiasi rinkos veikėjų lūkesčių formavimosi supratimu.

Nesunku suvokti, kad praktiškai bet kuris ekonomikos sektorius daugiau ar mažiau priklauso nuo rinkos veikėjų lūkesčių. Visą tai rodo lūkesčių formavimosi mechanizmo supratimo svarbą. Toliau aptarsime *racionaliųjų lūkesčių teoriją*(angl. the theory of rational expectations), paplitusią ekonomikoje per paskutinius kelis dešimtmečius.

Racionaliųjų lūkesčių hipotezė. Praeito amžiaus šešto dešimtmečio ekonomistai buvo įpratę manyti, kad rinkos veikėjų lūkesčius formuoja tik praeities patirtis. Pavyzdžiui, infliacijos prognozei buvo naudojama praeities infliacijos vidutinė reikšmė. Toks lūkesčių formavimas, vadinamas *prisitaikančiais lūkesčiais* (angl. adaptive expectations), teigia, kad lūkesčiai lėtai keičiasi atsiliepdami į praeities duomenų kaitą. Tiksliau kalbant, jei šios dienos infliacijos lygis viršija ankstesnę šios dienos prognozę, tai ateities infliacijos lygis prognozuojamas didesnis proporcingai ankstesniam pokyčiui.

Prisitaikančių lūkesčių mechanizmas buvo kritikuojamas tuo, kad realiai žmonės naudojasi gerokai didesne informacijos apimtimi nei prognozuojamo ekonominio kintamojo praeities realizacija. Pavyzdžiui, beveik tikrai infliacijos prognozei įtaką daro tiek numatomi monetarinės politikos pasikeitimai, tiek ir esama šios srities politika. Apskritai žmonės dažnai linkę keisti savo lūkesčius pasirodžius naujai informacijai. Tokios kritikos įtakoje John Muth (1961) [11] išvystė alternatyvią lūkesčių teoriją, vadinamą racionaliųjų lūkesčių teorija. Šios teorijos esmę sudaro hipotezė:

1.2 Hipotezė. (Racionaliųjų lūkesčių) *Lūkesčiai sutampa su optimalia prognoze, gauta naudojant visą prieinamą informaciją.*

Tam, kad išsiaiškinti racionaliųjų lūkesčių hipotezės prasmę panagrinėsime jos taikymo pavyzdį. Tarkime, kad reikia įvertinti laiko tarpą, reikalingą studento kelionei iš namų į paskaitas. Ne piko valandomis šiai kelionei reikia 30 minučių. Kartais kelionė užtrunka 35 arba 25 minutes. Tačiau piko valandomis kelionė trunka 10 minučių ilgiau. Remiantis šia informacija, kelionės trukmės piko valandomis *optimalia prognoze* yra 40 minučių. Jei remtis racionaliųjų lūkesčių hipoteze, tai išvykstant į paskaitas piko valandomis reikia tikėtis, kad kelionė užtruks 40 minučių. Racionalūs lūkesčiai neprivalo būti tikslūs. Racionaliais jie tampa todėl, kad grindžiami visa prieinama informacija.

Kokia kita informacija gali keisti optimalią prognozę kelionės į paskaitas trukmei įvertinti? Tarkime, kad pakeliui įvyksta avarija, kurios pašalinimui reikia vienos valandos. Jei apie šią avariją ir jos pašalinimo trukmę yra pranešta per radiją, o keliautojas į paskaitas į šią žinią neatkreipė dėmesio, tai jo lūkesčiai – 40 minučių – jau nėra racionalūs. Avarijos atveju kelionės į paskaitas trukmės optimalia prognoze turėtų būti 1 valanda 40 minučių. Jei apie avariją nėra viešai pranešta, tai optimali prognozė nesikeičia, o lūkesčiai lieka racionaliais. Šis pavyzdys rodo, kad lūkesčiai gali nebūti racionalūs tais atvejais, kai reikalingą informaciją surasti reikalauja per daug pastangų (pavyzdžiui, klausytis naujienų per radiją ar televiziją).

Norint formaliai išreikšti racionaliųjų lūkesčių hipotezę tarkime, kad mus domina nežinomas kintamasis X. Ankstesniame pavyzdyje šis kintamasis yra studento kelionės į paskaitas trukmė. Tegul X^{op} yra šio kintamojo optimali prognozė, o X^l yra šio kintamojo laukiamoji reikšmė. Tada racionaliųjų lūkesčių hipotezė teigia, kad lūkesčiai yra racionalūs, jei

$$X^l = X^{op}. \tag{1.3}$$

Lyginant su prisitaikančių lūkesčių mechanizmu, racionalūs lūkesčiai formuojami atsižvelgiant ne tik į praeities įvykius bet ir į dabartį bei į ateitį. Be to, racionalius lūkesčius formuoja visa prieinama informacija, o ne tik kintamojo X istorija.

Racionaliųjų lūkesčių hipotezė grindžiama tokiomis fundamentaliomis neoklasikinės ekonomikos prielaidomis, kaip rinkos veikėjų racionalus elgesys dinaminėje aplinkoje, atsižvelgiant į ateities neapibrėžtumą. Be kita ko tai reiškia, kad rinkos veikėjai naudojasi visa prieinama informacija teisingai ir naujos informacijos ieško tais atvejais, kai tikėtina jos nauda viršija paieškos išlaidas. Šias prielaidas ir hipotezes nesunku suprasti ir suvokti jų naudą. Problemos atsiranda tada, kai bandoma jas įgyvendinti konkrečiai.

Finansų rinkos kontekste racionaliųjų lūkesčių hipotezė įgijo šiek tiek skirtingą formą ir yra vadinama efektyviosios rinkos hipoteze.

Efektyviosios rinkos hipotezė. Nors racionaliųjų lūkesčių ir efektyviosios rinkos hipotezės buvo vystomos nepriklausomai tačiau pastaroji yra pirmosios išvada finansų rinkos kontekste. Finansų rinkos vertybinių popierių įkainojimo mechanizmas grindžiamas tokia hipoteze:

1.3 Hipotezė. (ERH) *Finansų rinkos vertybinių popierių kainos pilnai ir teisingai atspindi visą prieinamą informaciją.*

Finansų rinka yra vadinama efektyvia, jei VP kainos pilnai ir teisingai atspindi visą prieinamą informaciją. Šiuo atveju žodis efektyvumas susijęs su informacijos panaudojimu rinkos kainai įvertinti. Pagrindinė problema su šia hipoteze yra jos abstraktumas, kuris sunkiai leidžia patikrinti jos atitikimą realiai rinkai. Empiriškai ši hipotezė paprastai tikrinima kartu su papildomomis prielaidomis.

Tam, kad ERH išreikšti formaliai, kaip ir anksčiau tarkime, kad $S(0)$ yra VP kaina šiandien, o $S(1)$ ir $D(1)$ yra atitinkamai VP kaina ir išmokami dividendai nagrinėjamo periodo pabaigoje, pavyzdžiui po metų. Nežinomas aišku yra šio VP pelnas po metų, t. y. $S(1) + D(1)$. Tegul $[S(1) + D(1)]^{op}$ yra VP pelnas, įvertintas pilnai ir teisingai atspindint visą šiandien prieinamą informaciją, o $[S(1) + D(1)]^l$ yra rinkos įvertinta VP pelno laukiamoji reikšmė. „Rinkos įvertinimas" šiuo atveju reiškia visų rinkos veikėjų įkainavimo bendras rezultatas. Naudojantis šiais žymėjimais, rinkos efektyvumas reiškia, kad

$$\big[S(1) + D(1)\big]^l = \big[S(1) + D(1)\big]^{op}. \tag{1.4}$$

Palyginę su (1.3), matome, kad ERH yra atskiras racionalių lūkesčių hipotezės atvejis, optimalia prognoze laikant tokią VP kainą, kuri pilnai ir teisingai atspindi visą šiandien prieinamą informaciją.

Norint trumpai apibūdinti ERH pagrįstą kainos $S(0)$ formavimosi mechanizmą, būtina dar viena prielaida apie tai, kaip yra susiję kintamieji $S(0)$, $S(1)$ ir $D(1)$. Pasinaudosime mums jau žinomu dabartinės vertės principu, t. y. jau aptarta $S(0)$ kainos vertinimo (1.2) formule. Pagal ją, investicijos grąžos norma $r(1)$ yra lygi

$$r(1) = \frac{D(1) + S(1) - S(0)}{S(0)}. \tag{1.5}$$

Pagal analogiją su šia formule, apibrėšime *laukiamąją grąžą*

$$r^l(1) := \frac{\big[D(1) + S(1)\big]^l - S(0)}{S(0)}. \tag{1.6}$$

Kaip vėliau matysime toks laukiamosios grąžos apibrėžimas yra pateisinamas tuo, kad matematinio modelio kontekste laukiamoji grąža $r^l(1)$ ir laukiamasis pelnas $[S(1) + D(1)]^l$ bus atitinkamai grąžos normos $r(1)$ sąlyginis vidurkis $E[r(1)|\mathcal{F}_0]$ ir pelno $S(1) + D(1)$ sąlyginis vidurkis $E[S(1) + D(1)|\mathcal{F}_0]$. Kadangi sąlyginis vidurkis yra tiesinė operacija (1.6) formulė tokioje interpretacijoje išplauks iš (1.5). Tokiu būdu (1.6) formulė pateikia nagrinėjamo VP šios dienos kainos įvertinimą:

$$S(0) = \frac{\left[D(1) + S(1)\right]^l}{1 + r^l(1)}. \tag{1.7}$$

Remiantis ERH (1.4) forma, tokia $S(0)$ kaina pilnai ir teisingai atspindi visą šiandien prieinamą informaciją. Efektyvioje rinkoje visi VP įkainojami iš principo tuo pačiu čia apibūdintu įkainojimo mechanizmu. Gali skirtis tik laukiamosios grąžos (1.6) apibrėžimas. Kiekvieno tokios rinkos VP (1.7) kaina vadinama *pusiausvyrine kaina* ekonominės pusiausvyros prasme, nes esant šiai kainai visų efektyvioje rinkoje esančių VP paklausa lygi jų esamai fiksuotai pasiūlai (angl. outstanding supply).

Efektyvioji finansų rinka yra svarbi kapitalistinės sistemos dalis. Šioje sistemoje rinka yra ideali jei VP kainos padeda optimaliai paskirstyti išteklius. Norėdamos plėsti savo ekonominę veiklą, bendrovės išleidžia akcijas, o efektyvioje rinkoje jos gali tikėtis „sąžiningos" kainos. Investuotojai savo ruožtu, pirkdami akcijas efektyvioje rinkoje, gali tikėtis tai daryti esant taip pat „sąžiningoms" kainoms. Tokiu būdu finansų rinkos išteklius paskirsto optimaliai, jei VP kainos pakankamai tiksliai atspindi savo vertę.

Gautoji VP pusiausvyrinės kainos (1.7) išraiška, pati savaime, nėra pakankamai informatyvi. Toliau nagrinėjamos finansų rinkos teorijos tikslas yra įvairių rinkos aspektų tyrimas remiantis viena arba kita pusiausvyrinės kainos išraiška. Pati ERH naudojama ne tiesiogiai, o remiantis vienu iš jos išplaukiančių principų: arbitražo efektyvioje rinkoje negalimumu.

Klausimai ir uždaviniai.

1. Kodėl egzistuoja ir kuo naudingos obligacijos finansų rinkoje?
2. Kokia prasme obligacijos yra nerizikingi VP?
3. Ką reiškia terminas "likvidumas"?
4. Kodėl paprastai akcija yra rizikingesnis VP negu obligacija?
5. Kokiais atvejais pilnas pelningumas ir palūkanų norma sutampa ir kokias atvejais jie skiriasi?
6. Įrodyti, kad obligacijos su atkarpomis įsigijimo kainai sutampant su principine verte, pilnas pelningumas yra lygus atkarpos procentui (coupon rate).
7. Kokius žinote dabartinės vertės principo taikymo pavyzdžius?
8. Kuo skiriasi ir kuo panašios racionaliųjų lūkesčių ir efektyviosios rinkos hipotezės?

Pastabos. Daugiau apie akcijas, palūkanas, išvestinius finansinius instrumentus, investicinius fondus ir pinigus Lietuvos kontekste galima susipažinti leidinyje „Investuotojo ABC".

Robert E. Lucas, Jr. nuosekliai išvystė racionaliųjų lūkesčių hipotezę pritaikydamas ją makroekonomikos teorijoje bei ekonominės politikos klausimuose. Už tai 1995 metais jam buvo suteikta Nobelio ekonomikos premija.

Papildoma literatūra.

1. Investuotojo ABC. Verslo žinios, 2003. Versta ir adaptuota Lietuvai iš: M. Sundling ir S. Kamai, Dagens Industri ABC, 1998

2. Mishkin, F. S. The Economics of Money, Banking, and Financial Markets. 7-th Edition. Addison Wesley, Boston, 2004.

Skyrius 2

Finansų rinkos modelis: samprata ir pavyzdžiai

2.1 Rinkos matematinis modeliavimas

Kalbant apie finansų rinkos matematinį modelį, visų pirma reiktų suvokti skirtumą tarp matematinio modelio ir matematinės teorijos. Pirmasis terminas vartojamas kalbant apie matematikos taikymą praktikoje, o antrasis terminas yra „grynosios" matematikos dalis. XX amžiaus antroje pusėje matematika tampa mokslu apie abstrakčias struktūras. Trumpai kalbant, matematinė struktūra yra aibė tarp kurios elementū galioja aksiomomis nusakomi sąryšiai. Tuo atveju matematinę teoriją sudaro teiginų sistema apie tokios struktūros savybes. Tuo tarpu matematinis modelis yra tokia matematinė teorija apie matematinę struktūrą, kurios elementai ir sąryšiai yra interpretuojami išorinio pasaulio objektais ir sąryšiais.

Vienas iš pagrindinių skirtumų tarp matematinės teorijos ir matematinio modelio yra rezultatų vertinimo kriterijai. Matematinės teorijos rezultatai privalo tenkinti formalaus teisingumo kriterijų, o pati teorija dažniausiai vertinama pagal vidinę darną ir logiką. Tuo tarpu matematiniam modeliui taikomas atitikimo išoriniam pasauliui ar prognozės teisingumo kriterijus. Šia prasme matematiniai modeliai priklauso *motyvuotosios matematikos* sričiai. Matematinė teorija arba „grynoji" matematika nėra motyvuota praktiniais argumentais. Pavyzdžiui, labai dažnai matematiniai samprotavimai prasideda visiškai nemotyvuota fraze: „tarkime, kad yra duota funkcija ...".

Kitas labai svarbus matematikos vaidmuo yra jos, kaip kalbos, funkcija. Matematinis samprotavimas skiriasi nuo nematematinio dar ir tuo, kad matematikos objektai suvokiami vienareikšmiškai, remiantis tik tomis jų savybėmis, kurios yra joms priskirtos pagal apibrėžimą.

Taigi finansų rinkos matematiniu modeliu vadiname matematinę teoriją, kurios elementai ir sąryšiai interpretuojami imituojant realias finansų rinkas. Pavyzdžiui, finansų teorijoje labai svarbūs tokie išorinio pasaulio aspektai kaip ateities neapibrėžtis, laikas, kaina ir panašiai. Finansų rinkos modelyje šioms sąvokoms suteikiama konkreti prasmė naudojant matematinę tikimybių teoriją.

Kaina, laikas ir ateities neapibrėžtumas. Pagrindinėmis ir paprasčiausiomis finansų teorijos sąvokomis yra laikas ir kaina. Matematinis šių sąvokų modelis yra realių skaičių pora (t, x). Priminsime, kad kainos priklausomybė nuo laiko yra pagrindinė finansų rinkos teorijos problema. Visų pirma reikia pasakyti, jog ekonominių-finansinių kintamųjų prikausomybė nuo laiko gali būti dvejopa: tiesioginė priklausomybė nuo laiko momento t, arba priklausomybė nuo laiko intervalo.

Taigi, pirmąją priklausomybės klasę sudaro kintamieji priklausantys nuo laiko momento, t. y. laiko funkcijos. Tokų kintamųjų pavyzdžiai yra akcijos kaina, valiutos kursas, visi balansiniai rodikliai. Finansų teorijoje šie kintamieji vadinami *būsenos kintamaisiais* (angl. stock variables). Matematiniame modelyje tokie kintamieji išreiškiami realaus kintamojo funkcijomis.

Antrąją priklausomybės klasę sudaro ekonominiai-finansiniai kintamieji priklausantys nuo laiko intervalo. Tokių kintamųjų pavyzdžiais yra metinis pelnas, palūkanų norma, kainos pokytis ir panašiai. Finansų teorijoje šie kintamieji vadinami *srauto kintamaisiais* (angl. flow variables). Matematiniame modelyje šie kintamieji išreiškiami intervalo funkcijomis. Dažniausiai abiejų klasių kintamuosius galima vieną su kitu susieti.

Laikas finansų rinkos teorijoje paprastai suvokiamas arba kaip diskreti aibė, pavyzdžiui aibė $D = \{0, 1, \ldots, T\}$, arba kaip „tolydi" aibė, pavyzdžiui intervalas $D = [0, T]$. Tokia laiko interpretacija atspindi tai, kad ekonominiai kintamieji gali būti stebimi arba diskrečiais laiko momentais arba nuolat. Šias skirtingas laiko sampratas atitinkančios teorijos vadinamos *diskretaus* arba *tolydaus laiko* finansų rinkos modeliu. Dažniausiai aibės D elementas $t = 0$ žymi dabarties laiko momentą, o bet kuris elementas $t > 0$ priskiriamas ateičiai. Diskretaus laiko atveju intervalas tarp gretimų stebėjimo momentų vadinamas *periodu*, o jo ilgis yra pastovus ir lygus vienetui. Periodus galima interpretuoti įvairiai, pavyzdžiui, tai gali būti metai, mėnesiai ar valandos.

Kita svarbi finansų teorijos sąvoka yra ateities neapibrėžtumas. Matematiniam sios sąvokos modeliui naudosime matematinę tikimybių teoriją. Kaip ir kiekviena matematinė teorija, tikimybių teorija yra teiginių sistema apie abstrakčius objektus pasižyminčius tam tikromis savybėmis. Todėl naudojantis tokia teorija reikia interpretuoti pagrindines jos konstrukcijas, tiesiogiai nesusijusias su realia finansų rinka.

Pagrindine tikimybių teorijos konstrukcija yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Čia Ω yra elementariųjų įvykių aibė, o funkcija P apibrėžta tam tikroje šios aibės poaibių klasėje $\mathcal{F}$ ir reikšmes įgyjanti intervale $[0, 1]$. Klasei $\mathcal{F}$ – vadinamai σ-algebra – priklauso Ω, bet kurio jos elemento A papildinys A^c ir bet kurių jos elementų skaitaus rinkinio $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ sąjunga $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Funkcija P – vadinama tikimybiniu matu – yra σ-adityvi ir $P(\Omega) = 1$. Tarsime, kad aibę Ω sudaro tiesiogiai su ekonominiu modeliu susiję pasaulio ateities scenarijai ω, kartais tiesiog vadinami būsenomis. Kiekvienas šeimos $\mathcal{F}$ elementas A suprantamas kaip tokia ateities scenarijų aibė, apie kurią galima pasakyti, kad ji įvyks su tikimybe $P(A)$. Tačiau tikimybės interpretacija finansų teorijos kontekste yra problema, nes nėra aišku, kas ją galėtų atitikti nematematinėje finansų rinkoje. Taigi vis dėlto tarus, kad mums yra žinoma tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, akcijos kainos reikšmė natūraliai priklauso nuo būsenos $\omega \in \Omega$ ir laiko.

Sakykime, kad D yra arba $\{0, 1, \ldots, T\}$ arba $[0, T]$, o $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – tikimybinė erdvė. Toliau tariama, kad akcijos kaina yra dviejų kintamųjų funkcija

$$S = \{S(t, \omega) \colon (t, \omega) \in D \times \Omega\}, \tag{2.1}$$

kurios reikšmės yra neneigiami realūs skaičiai. Labai dažnai antrasis argumentas ω praleidžiamas todėl, kad teiginiai apie $S(t) \equiv S(t,\omega)$ paprastai nepriklauso nuo konkrečios ω reikšmės. Tikimybių teorijoje tokia funkcija vadinama *atsitiktiniu procesu* apibrėžtu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei įvykis $\{\omega \in \Omega\colon\ S(t,\omega) \in B\}$ priklauso šeimai $\mathcal{F}$ su kiekvienu $t \in D$ ir su kiekvienu aibės $[0,\infty)$ poaibių Borelio σ-algebros $\mathcal{B}$ elementu B. Ši savybė reiškia, kad yra žinomos tokios klasės įvykių tikimybės $P(\{\omega \in \Omega\colon\ S(t,\omega) \in B\})$. Toliau funkciją S vadinsime *akcijos kainos procesu*, nepriklausomai nuo to, kuris modelis – diskretaus ar tolydaus laiko – turimas galvoje. Tačiau grąžos samprata yra skirtinga priklausomai nuo modelio tipo.

2.2 Diskretaus laiko modelis

Akcijos kaina ir grąža. Daugelyje finansų teorijos klausimų ekonomiškai labiau pagrįstais laikomi ne absoliutūs kainos dydžiai bet santykiniai pokyčiai, vadinami grąža. Priklausomai nuo modelio, grąža apibrėžiama skirtingai. Tarkime, kad S yra diskretaus laiko kainos procesas, t. y. atsitiktinis procesas (2.1), kuriame $D = \{0, 1, \ldots, T\}$. Akcijos *grąža* arba tiksliau *akcijos kainą S atitinkančiu grąžos procesu* vadinsime funkciją $R = \{R(t)\colon\ t \in D\}$, apibrėžtą taip

$$R(0) := 0 \quad \text{ir} \quad \Delta R(t) := R(t) - R(t-1) := \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}, \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{2.2}$$

Čia tariama, kad $S(t-1) > 0$ visiems t. Šiame grąžos apibrėžime tariama, kad dividendai nemokami (plg. su (1.2) ir (1.5)), t. y. $D(t) = 0$ su visais t. Tačiau vėliau kartais atsisakysime šios prielaidos. Kadangi diskretaus laiko modeliuose periodas yra fiksuotas ir lygus vienetui, skirtumas $R(t) - R(t-1)$ vadinamas *grąžos norma* (angl. rate of return) ir žymimas $r(t)$ (žr. (1.1)). Tolydaus laiko modeliuose periodo ilgiai yra kintami ir todėl žymėjimas $r(t)$, kuriame neatsispindi intervalo pradžia ir galas, nėra geras. Dar viena grąžos samprata naudojama ekonometrinėje analizėje, gaunama dešinę (2.2) lygybės pusę pakeitus funkcija $\ln\{S(t)/S(t-1)\}$.

Taigi, žinant akcijos kainą S, grąža R nusakoma (2.2) formule. Ir atvirkščiai, žinant grąžą R, iš tos pačios formulės nesunku gauti kainos proceso išraišką:

$$S(t) = S(0) \prod_{s=1}^{t} \big[1 + R(s) - R(s-1)\big], \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{2.3}$$

kurioje $S(0)$ gali būti laisvai pasirinktas teigiamas skaičius, pavyzdžiui $S(0) = 1$, o pokytis $R(t) - R(t-1) > -1$ su visais t. (2.2) ir (2.3) sąryšiais nusakoma abipus vienareikšmė atitiktis tarp S ir R. Dar viena priklausomybė tarp kainos ir grąžos išreiškiama skirtumine lygtimi:

$$S(t) = S(0) + \sum_{s=1}^{t} S(s-1)\big[R(s) - R(s-1)\big], \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{2.4}$$

Turėdami akcijos kainos ir grąžos matematinę sampratą, toliau galime konkrečiau apibūdinti vieną kainos formavimosi mechanizmo variantą.

Sąžiningojo lošimo rinka. Akcijos kainos kitimas dažnai aiškinamas pasitelkiant analogiją su nuosekliai kartojamų lošimų seka. Be to, tariama, kad lošimai yra sąžiningi ta prasme, kad kiekvienu laiko momentu, žinant ankstesniųjų n lošimų rezultatus, $(n+1)$-ojo lošimo *tikėtinas* laimėjimas yra lygus n-ojo lošimo laimėjimui. Tikimybių teorijoje tikėtinas laimėjimas išreiškiamas sąlyginiu vidurkiu, o sąžiningas lošimas apibrėžiamas martingalu. Priminsime jo apibrėžimą.

Kaip ir anksčiau, sakysime, kad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė, apibrėžianti finansų rinkai svarbius ateities scenarijus ir jų tikimybes. Papildomai tarsime, kad visa laiko momentu t prieinama rinkos informacija yra nusakoma įvykių aibe $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, kuri sudaro σ-algebrą, o šeima $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t \colon\ t = 0, 1, \ldots, T\}$ yra nemažėjanti tokių σ-algebrų seka, toliau vadinama *informacijos srautu*. Tarkime, kad $M = \{M(t) \colon\ t = 0, \ldots, T\}$ yra atsitiktinis procesas apibrėžtas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sakoma, kad M yra *martingalas* $\mathbb{F}$ *atžvilgiu*, jei su kiekvienu t, $M(t)$ yra $\mathcal{F}_t$-matus, vidurkis $E|M(t)| = E_P\{|M(t)|\} < \infty$ ir sąlyginis vidurkis

$$E\big[M(t)\big|\mathcal{F}_s\big] = M(s) \quad \text{su visais} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Jei $M(t)$ su $t = n+1$ yra $(n+1)$-ojo lošimo laimėjimas, tai kairioji šios lygybės pusė su $s = n$ reikštų tikėtiną laimėjimą po n-tojo lošimo. Jei M yra martingalas $\mathbb{F}$ atžvilgiu, tai atsitiktinių dydžių seka $\xi_t := M(t) - M(t-1)$, $t = 1, \ldots, T$, vadinama *martingalinių skirtumų seka* $\mathbb{F}$ atžvilgiu. Remiantis martingalo apibrėžimu, su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$

$$E[\xi_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0. \tag{2.5}$$

Tegul μ yra realus skaičius, o ξ_t yra martingalinių skirtumų seka informacijos srauto $\mathbb{F}$ atžvilgiu. Sakysime, kad akcijos grąžos procesui R galioja *sąžiningojo lošimo hipotezė* (angl. fair game), jei su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$ teisinga lygybė

$$R(t) = R(t-1) + \mu + \xi_t. \tag{2.6}$$

Jei šioje išraiškoje ξ_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių vidurkis ir dispersija egzistuoja, ir yra lyg$\overline{\text{u}}$s atitinkamai 0 ir σ^2, tai sakoma, kad grąžos procesui R galioja *atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė*. Jei $\mathcal{F}_t$ yra minimalios σ-algebros, atžvilgiu kurių yra mat$\overline{\text{u}}$s atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \ldots, \xi_t$, tai tokiam grąžos procesui R taip pat galioja sąžiningojo lošimo hipotezė, nes, dėl nepriklausomumo ir nulinių vidurkių, yra teisinga (2.5) su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$.

Kitas sąžiningojo lošimo hipotezę išpildantis grąžos procesas yra ekonometrinėje analizėje naudojamas ARCH modelis (pirmos eilės Autoregressive Conditionally Heteroskedastic) apibrėžiamas taip:

$$R(0) = 0 \quad \text{ir} \quad \Delta R(t) = \mu + \xi_t\sqrt{\alpha\xi_{t-1}^2}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Čia ξ_t yra martingalinių skirtumų seka informacijos srauto $\mathbb{F}$ atžvilgiu.

Ką galima pasakyti apie akcijos kainos procesą S jei jos grąžos procesui R galioja sąžiningojo lošimo hipotezė (2.6)? Remdamiesi (2.2) ir (2.5) gauname, kad su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$,

$$\frac{E[S(t)|\mathcal{F}_{t-1}]}{S(t-1)} - 1 = E[R(t)|\mathcal{F}_{t-1}] - R(t-1) = \mu. \tag{2.7}$$

Iš čia išplaukia, kad su kiekvienu $t = 1, \dots, T$

$$S(t-1) = \frac{E[S(t)|\mathcal{F}_{t-1}]}{1+\mu}. \tag{2.8}$$

Visų pirma pastebėsime, kad toks akcijos kainos procesas S nėra martingalas jei $\mu \neq 0$. Pastaroji išraiška taip pat rodo, kad $S(t-1)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$ matus ir šia prasme „pilnai atspindi" visą rinkos informaciją aprašomą ivykiu aibe $\mathcal{F}_{t-1}$. Sąžiningojo lošimo hipotezė papildo 1.4 skyrelyje aptartą efektyviosios rinkos hipotezę (ERH). Abi kartu jos sudaro vieną iš galimų kainos formavimosi mechanizmų. Todėl (2.8) sąryšis kartais vadinamas *analitine ERH forma*, o akcijos kainos procesas S vadinamas pusiausvyriniu.

Atsitiktiniai dydžiai ξ_t ir skaičius μ sąžiningojo lošimo hipotezės (2.6) apibrėžime skirtingoms akcijoms gali būti skirtingi. Toliau sakysime, kad rinka yra *sąžiningojo lošimo rinka*, jei visoms šios rinkos akcijoms galioja sąžiningojo lošimo hipotezė (2.6) su tuo pačiu μ.

Tarkime, kad rinką sudaro du VP S ir S_0, kurių grąžos procesai yra, atitinkamai, R ir R_0. Taip pat tarkime, kad grąžos procesui R galioja sąžiningojo lošimo hipotezė (2.6), o grąžos procesui R_0 galioja lygybė $\Delta R_0(t) = \mu$ su kiekvienu $t = 1, \dots, T$, t. y. (2.6) sąlyga galioja kai $\xi_t \equiv 0$ su kiekvienu t. Todėl rinka sudaryta iš VP S ir S_0 yra sąžiningojo lošimo rinka. Remiantis (2.3), VP kainos procesas S_0 yra lygus

$$S_0(t) := S_0(0)(1+\mu)^t \qquad \text{visiems } t = 1, \dots, T. \tag{2.9}$$

Šį nerizikingą VP S_0 vadinsime *banko sąskaita su palūkanų norma* μ. Tuo tarpu kaina S, apibrėžta analitine ERH forma, nusako rizikingą VP, nes jo grąža R yra atsitiktinis procesas. Tačiau remiantis (2.8) lygybe, šio vertybinio popieriaus *laukiamoji grąžos norma* (angl. expected rate of return)

$$E[\Delta R(t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{E[S(t)|\mathcal{F}_{t-1}]}{S(t-1)} - 1 = \mu \tag{2.10}$$

su kiekvienu t. Rinkos veikėjas vadinamas neutraliu rizikai, jei investuodamas jis rūpinasi tik laukiamosios grąžos normos dydžiu, bet ne akcijos rizikingumu. Kadangi akcijų S_0 ir S laukiamosios grąžos normos sutampa, tai tokiam rinkos veikėjui jos yra lygiavertės. Apskritai, sąžiningojo lošimo rinkoje rizikai neutraliems investuotojams nėra prasmės investuoti į rizikingas akcijas.

Kaip rodo (2.8) pavyzdys, sąžiningojo lošimo rinkoje akcijos kaina neprivalo išpildyti martingalo sąlygas, tačiau bet kuri diskontuota kaina

$$\{S(t)/S_0(t)\colon\ t = 0, 1, \dots, T\} \qquad \text{yra martingalas } \mathbb{F} \text{ atžvilgiu.} \tag{2.11}$$

Čia, kaip ir anksčiau, S_0 yra banko sąskaita su palūkanų norma μ, o jos kainos kitimas nusakomas (2.9) sąryšiu. Iš tikrųjų, remiantis (2.8), su kiekvienu $t = 1, \dots, T$, teisinga

$$E\Big(\frac{S(t)}{S_0(t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = \frac{E\big(S(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big)}{S_0(0)(1+\mu)^t} = \frac{S(t-1)}{S_0(0)(1+\mu)^{t-1}} = \frac{S(t-1)}{S_0(t-1)}.$$

Vėliau nagrinėsime konkrečius kainų procesus pasižyminčius (2.11) savybe. Tačiau kol kas nustatysime akcijos šios dienos kainos formulę sąžiningojo lošimo rinkoje.

Fundamentalioji vertė. Remiantis analitine ERH forma (2.8) ir papildomomis sąlygomis galima išvesti vertybinio popieriaus fundamentaliosios vertės formulę. Taip vadinama akcijos kainos formulė, kuri išreiškia bendrovės visų ateities išmokų dabartinę vertę. Tuo tikslu tarsime, kad diskretaus laiko modelyje paskutinis laiko momentas T yra neaprėžtai didelis, t. y. $t = 0, 1, \ldots$. Taip pat tarkime, kad kainos S evoliucija nusakoma visiems $t = 0, 1, \ldots$, o momentu t išmokamų dividendų norma yra $D(t)$. Tokiu atveju akcijos grąža $R = \{R(t)\colon\ t = 0, 1, \ldots\}$ yra apibrėžiama taip: $R(0) := 0$ ir

$$R(t) - R(t-1) := \frac{S(t) - S(t-1) + D(t)}{S(t-1)}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.12}$$

čia tariama, kad $S(t-1) > 0$ su visais t; o analitinė ERH forma yra

$$S(t-1) = E[S(t) + D(t)|\mathcal{F}_{t-1}]/(1+\mu)$$

su kiekvienu $t = 1, 2, \ldots$. Naudodami šį sąryšį n kartų ir matematinę indukciją gauname, kad

$$S(t-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{E[D(t+k-1)|\mathcal{F}_{t-1}]}{(1+\mu)^k} + \frac{E[S(t+n-1)|\mathcal{F}_{t-1}]}{(1+\mu)^n} \tag{2.13}$$

su bet kuriuo $n = 1, 2, \ldots$ ir $t = 1, 2, \ldots$. Dabar tarkime, kad galioja vadinamoji *transversalumo sąlyga*: (2.13) lygybės dešinėje esantis narys artėja į nulį kai n neaprėžtai auga, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[S(t+n-1)|\mathcal{F}_{t-1}]}{(1+\mu)^n} = 0.$$

Tada, (2.13) lygybėje su $n \to \infty$ gauname, kad bet kuriam $t = 1, 2, \ldots$,

$$S(t-1) = E\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(t+k-1)}{(1+\mu)^k}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\Big]. \tag{2.14}$$

Ši akcijos kainos dinamika, toliau žymima $\bar{S}$, vadinama *fundamentaliąja verte* (angl. fundamental value). Jei akcijos kaina skiriasi nuo savo fundamentaliosios vertės, tai sakoma, kad tokia akcija sukuria *finansinį burbulą* (angl. financial bubble). Pagal tokią finansinio burbulo sampratą, jis gali egzistuoti ir efektyviojoje rinkoje, nusakomoje analitine ERH forma (pavyzdžiui, jei neišpildyta transversalumo sąlyga).

Parodysime, kad fundamentaliąją vertę turinčios akcijos atitinkančiam grąžos procesui (2.12) galioja sąžiningojo lošimo hipotezė. Fiksuokime $t = 1, 2, \ldots$ ir pažymėkime

$$A(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(t+k)}{(1+\mu)^k}.$$

Kadangi $S = \bar{S}$, remiantis (2.14), gauname

$$\bar{S}(t) - (1+\mu)\bar{S}(t-1) = E[A(t)|\mathcal{F}_t] - E\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(t+k-1)}{(1+\mu)^{k-1}}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\Big]$$

$$= E[A(t)|\mathcal{F}_t] - D(t) - E[A(t)|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Iš čia išplaukia akcijos kainą $\bar{S}$ atitinkančio grąžos proceso $\bar{R}$ išraiška

$$\Delta\bar{R}(t) = \frac{\bar{S}(t) - \bar{S}(t-1) + D(t)}{\bar{S}(t-1)} = \mu + \frac{E[A(t)|\mathcal{F}_t] - E[A(t)|\mathcal{F}_{t-1}]}{\bar{S}(t-1)}.$$

Nesunku matyti, kad dešinėje esantys atsitiktiniai dydžiai

$$\xi_t := \frac{E[A(t)|\mathcal{F}_t] - E[A(t)|\mathcal{F}_{t-1}]}{\bar{S}(t-1)}, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

informacinio srauto $\mathbb{F}$ atžvilgiu sudaro martingalinių skirtumų seką. Tokiu būdu su bet kuriuo $T < \infty$, grąžos procesui $\bar{R} = \{\bar{R}(t), t = 0, 1, \ldots, T\}$ galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė. Na o fundamentalioji vertė ir yra pusiausvyrinė kaina, pagal ERH, „pilnai ir teisingai atspindinti" turimą informaciją.

2.3 Binominis modelis.

Tarkime, kad realūs skaičiai μ, a ir b tenkina sąlygas:

$$\mu > -1 \quad \text{ir} \quad -1 < \mu + a < \mu + b. \tag{2.15}$$

Sukonstruosime tokį grąžos procesą R, kuriam galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė, o grąžos norma $\Delta R(t)$ įgyja tik dvi reikšmes $\mu + a$ ir $\mu + b$ su kiekvienu t. Tada atitinkamas akcijos kainos procesas S kinta šuoliais įgyjančiais tik dvi reikšmes, t. y. arba $S(t) = (1+\mu+a)S(t-1)$ arba $S(t) = (1 + \mu + b)S(t-1)$.

Pradėsime nuo tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžimo. Tarkime, kad elementariųjų įvykių aibė

$$\Omega := \{-1, +1\}^T = \big\{\omega = (r_1, \ldots, r_T) \colon\; r_t \in \{-1, +1\}\big\},$$

o σ-algebra $\mathcal{F}$ yra visų Ω poaibių klasė. Kol kas tarkime, kad P yra bet kuris tikimybinis matas, kuriam

$$P(\{\omega\}) > 0 \qquad \text{su kiekvienu} \qquad \omega \in \Omega. \tag{2.16}$$

Su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$, aibėje Ω apibrėžkime funkciją

$$\epsilon_t(\omega) := \frac{1 + r_t}{2} = \begin{cases} 0, & \text{jei } r_t = -1, \\ 1, & \text{jei } r_t = 1, \end{cases}$$

kai $\omega = (r_1, \ldots, r_T)$. Kadangi $\mathcal{F}$ yra visų Ω poaibių klasė, visos Ω aibėje apibrėžtos funkcijos yra atsitiktiniai dydžiai. Dabar galime apibrėžti atsitiktinius dydžius:

$$\xi_t(\omega) := a(1 - \epsilon_t(\omega)) + b\epsilon_t(\omega) = \begin{cases} a, & \text{jei } \epsilon_t(\omega) = 0, \\ b, & \text{jei } \epsilon_t(\omega) = 1, \end{cases}$$

su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$ ir $\omega \in \Omega$.

Sakykime, kad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir ξ_t, $t = 1, \ldots, T$ yra aukščiau apibrėžti tikimybinė erdvė ir atsitiktiniai dydžiai, o skaičiams $a, b \in \mathbb{R}$ galioja (2.15) sąlyga. Tada teisingas

2.1 Teiginys. (2.6) *lygybe apibrėžtam grąžos procesui R galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė tada ir tik tada, kai $a < 0 < b$, $\xi_1, \ldots, \xi_T$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai tikimybinio mato P atžvilgiu ir su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$*

$$P(\{\omega \in \Omega\colon\ \xi_t(\omega) = a\}) = P(\{\epsilon_t = 0\}) = \frac{b}{b-a}. \tag{2.17}$$

Įrodymas. Tarkime, kad grąžos procesui R galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė. Tada tikimybinio mato P atžvilgiu $\xi_1, \ldots, \xi_T$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Pažymėkime $p := P(\{\omega \in \Omega\colon\ \xi_t(\omega) = a\})$. Kadangi $E\xi_t = 0$, $ap + b(1-p) = 0$. Be to, remiantis (2.16), $p \in (0,1)$. Iš čia išplaukia, kad $a < 0 < b$ ir galioja (2.17).

Atvirkščiai taip pat akivaizdu, jei $a < 0 < b$, o tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \ldots, \xi_T$ išpildo nurodytas sąlygas, tai grąžos procesui R galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė.

Remdamiesi šiuo teiginiu, toliau sukonstruosime tikimybę. Tarkime, kad $0 < q < 1$. Be to, su kiekvienu $\omega \in \Omega$ ir $t = 1, \ldots, T$, tegul

$$N_t(\omega) := \sum_{s=1}^{t} \epsilon_s(\omega) \qquad \text{ir} \qquad P_q(\{\omega\}) := q^{T-N_T(\omega)}\big(1-q\big)^{N_T(\omega)}. \tag{2.18}$$

Aibėje Ω funkcija N_T įgyja reikšmes $0, 1, \ldots, T$. Pavyzdžiui, tarp visų elementariųjų įvykių $\omega \in \Omega$, reikšmė $N_T(\omega) = k \in \{0, 1, \ldots, T\}$ įgyjama $\binom{k}{T}$ kartų. Tada

$$\sum_{\omega\in\Omega} P_q(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{T} \sum_{\omega\colon\ N_T(\omega)=k} q^{T-k}(1-q)^k = \sum_{k=0}^{T} \binom{k}{T} q^{T-k}(1-q)^k = (q+1-q)^T = 1.$$

Tegul $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, t.y. visų Ω poaibių aibė. Tada P_q yra tikimybė, o N_T yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P_q)$. Be to, tikimybė

$$P_q(\{\omega\colon\ N_T(\omega) = k\}) = \binom{k}{T} q^{T-k}(1-q)^k$$

vadinama *binominiu skirstiniu*. Tuo tarp atsitiktinis procesas $\{N_t\colon\ t = 1, \ldots, T\}$ vadinamas *Bernoulli'o procesu*. Pagal savo apibrėžimą atsitiktiniai dydžiai $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T$ tikimybinio mato P_q atžvilgiu yra nepriklausomi (patikrinti). Nesunku patikrinti, kad

$$P_q(\{\omega \in \Omega\colon\ \xi_t(\omega) = a\}) = q \tag{2.19}$$

su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$.

Atskiru atveju matas $Q := P_q$ su $q = b/(b-a)$ yra 2.1 Teiginiu charakterizuotas tikimybinis matas, t. y.

$$Q(\{\omega\}) := \Big(\frac{b}{b-a}\Big)^{T-N_T(\omega)} \Big(\frac{-a}{b-a}\Big)^{N_T(\omega)}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ apibrėžtam grąžos procesui R galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė:

$$\Delta R(t) = \mu + \xi_t = (\mu+a)^{1-\epsilon_t}(\mu+b)^{\epsilon_t} \qquad \text{su kiekvienu} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Remiantis (2.3) sąryšiu, šią grąžą atitinkantis kainos procesas yra

$$S(t) = S(0)\prod_{s=1}^{t}(1+\mu+a)^{1-\epsilon_s}(1+\mu+b)^{\epsilon_s} = S(0)(1+\mu+a)^{t-N_t}(1+\mu+b)^{N_t}. \quad (2.20)$$

Čia $S(0)$ gali būti betkuris teigiamas skaičius. Paprastai tariama, kad $S(0) = 1$.

Binominiu modeliu[1] vadinamas rinkos modelis, sudarytas iš banko sąskaitos S_0 su palūkanų norma μ ir (2.20) lygybe apibrėžto rizikingo VP S. Taigi, binominį modelį sudaro VP pora (S_0, S), priklausant nuo parametrų μ, a ir b. Kaip matėme, tai yra sąžiningojo lošimo rinkos pavyzdys.

2.4 Tolydaus laiko modelis

Tolydaus laiko finansų rinkos teoriją sudaro tokie rinkos modeliai, kuriuose rinkos veikėjams leidžiama pirkti-parduoti akcijas bet kuriuo laiko momentu, o kainos kitimas fiksuojamas taip pat bet kuriuo laiko momentu. Todėl akcijos kainos ir grąžos procesai šiuose modeliuose yra tolydaus laiko atsitiktiniai procesai $S = \{S(t)\colon\ t \in [0, T]\}$ ir $R = \{R(t)\colon\ t \in [0, T]\}$. Paskutiniais metais daugelio VP kainos kitimas fiksuojams kas kelias sekundes ir todėl gauti duomenys gali gerai aproksimuoti tolydaus laiko funkcijas.

Kodėl verta pereiti nuo diskretaus laiko modelių prie tolydaus? Diskretaus laiko finansų rinkos modelių nepakanka, kai reikia tiksliau modeliuoti greitai kintančias kainas. Mat, smulkėjant intervalams, diskrečiam modeliui pritaikytas matematinis aparatas tampa per daug gremėzdiškas. Be to, tolydaus laiko modeliai priklauso nuo mažesnio skaičiaus parametrų ir tie parametrai turi intuityviai suvokiamą interpretaciją. Dar vienas diskretaus laiko finansų rinkos modelių trūkumas pastebimas finansų ekonometrijoje. Būtent, tiriant finansinius duomenis pastebėta, kad kai kurios savybės priklauso nuo diskretaus modelio periodo. Tokias finansinių duomenų savybes tektų aprašyti skirtingais diskretaus laiko modeliais.

Tačiau tolydaus laiko modeliai reikalauja didesnės matematinės erudicijos nes naudoja šiuolaikines matematikos teorijas. Tolydaus laiko atveju akcijos kainos ir grąžos procesai pasižymi atsitiktinio klaidžiojimo ar sąžiningojo lošimo savybėmis bet kuriame intervalo $[0, T]$ skaidinyje $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. Be to, pereinant nuo vieno skaidinio prie kito šios savybės yra tam tikru būdu suderintos. Tokie savybių suderinamumo reikalavimai atsispindi tolydaus laiko atsitiktinių procesų apibrėžimuose.

Wiener'io procesas. Wiener'io procesas naudojamas apibrėžiant tolydaus laiko grąžos ir kainos procesus. Priminsime jo apibrėžimą.

2.2 Apibrėžimas. *Sakoma, kad tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *apibrėžtas atsitiktinis procesas* $W = \{W(t)\colon\ t \geq 0\}$ *yra* Wiener'io *procesas*[2]*, jei*

[1] Šis modelis pirmą kartą pasirodė straipsnyje J. Cox, S. Ross and M. Rubinstein. Option pricing: a simplified approach. J. Financial Econom. 7(1979), 229-263 ir todėl dar vadinamas Cox-Ross-Rubisntein-o modeliu.

[2] Dažniau sutinkamas kitas, ekvivalentus, šio proceso apibrėžimas. Būtent, Wiener'io procesas yra toks Gauss'o procesas W, kurio vidurkių funkcija $EW(t) = 0$, su visais $t \geq 0$, kovariacija $EW(t)W(s) = t \wedge s$, su visais $t, s \geq 0$, ir beveik visos trajektorijos yra tolydžios

(i) $W(0) = 0$ *ir visiems* $0 \leq s < t < \infty$, $W(t) - W(s)$ *yra standartinis normalusis atsitiktinis dydis su vidurkiu 0 ir dispersija* $t - s$*;*

(ii) *pokyčiai* $W(t_1) - W(s_1), \ldots, W(t_n) - W(s_n)$ *yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai bet kuriems* $0 \leq s_1 < t_1 \leq \cdots \leq s_n < t_n < \infty$*;*

(iii) *proceso trajektorijos* $W(\cdot, \omega)$ *yra tolydžios funkcijos beveik visiems* $\omega \in \Omega$*.*

Wiener'io proceso egzistavimo įrodymas pateiktas A priedo A.1 skyrelyje. Aukščiau išvardintos Wiener'io proceso savybės yra esminės – jos yra būtinos tam, kad atsitiktinį procesą apibrėžti vieninteliu būdu. Iš šio apibrėžimo išplaukia ir kitos savybės. Pavyzdžiui, Wiener'io proceso trajektorijos yra ne tik tolydžios, bet ir su kiekvienu $\alpha < 1/2$ joms galioja vadinamoji α-Hölder'io savybė, t. y. su kiekvienu $0 < T < \infty$ ir beveik su visais $\omega \in \Omega$ egzistuoja tokia baigtinė konstanta $K = K(T, \alpha, \omega)$, kad

$$\big|W(t, \omega) - W(s, \omega)\big| \leq K|t - s|^{\alpha} \tag{2.21}$$

su visais $t, s \in [0, T]$. Tačiau α-Hölder'io savybė nėra teisinga su $\alpha = 1/2$. Abu pastarieji teiginiai išplaukia iš A.1 teoremos įrodytos A priede. Be to, beveik visos Wiener'io proceso trajektorijos turi begalinę variaciją: beveik su visais $\omega \in \Omega$,

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |W(t_i, \omega) - W(t_{i-1}, \omega)| \colon\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\right\} = +\infty.$$

Wiener'io proceso trajektorijos turi ne tik begalinę variaciją, bet begalinė yra ir 2-variacija, t. y. su kiekvienu $0 < T < \infty$ ir su beveik visais $\omega \in \Omega$

$$v_2(W(\cdot, \omega); [0, T]) = +\infty.$$

Tačiau, remiantis α-Hölder'io savybe (2.21), su bet kuriuo $p > 2$ ir su beveik visais $\omega \in \Omega$, p-variacija $v_p(W(\cdot, \omega); [0, T]) < +\infty$. Matome, kad p-variacijos požiūriu, reikšmė $p = 2$ yra kritinė Wiener'io proceso trajektorijoms, taip pat kaip α-Hölder'io savybės požiūriu, reikšmė $\alpha = 1/2$ yra kritinė. Įdomu yra ir tai, kad Wiener'io proceso trajektorijoms egzistuoja netriviali kvadratinė λ-variacija, kuri yra tik šiek tiek silpnesnė savybė už 2-variaciją.

Nenulinę kvadratinę λ-variaciją intervale $[0, T]$ turi beveik visos Wiener'io proceso trajektorijos. Tiksliau, egzistuoja tokia nulinio mato aibė $N(\lambda) \in \mathcal{F}$, kad $[W]_\lambda(t) := [W(\cdot, \omega)]_\lambda(t) = t$ su visais $t \in [0, T]$ ir $\omega \in \Omega \setminus N(\lambda)$, t. y.

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left[W(t_i^m \wedge t, \omega) - W(t_{i-1}^m \wedge t, \omega)\right]^2 = t. \tag{2.22}$$

Kadangi Wiener'io proceso trajektorijos yra tolydžios, jos kvadratinės λ-variacijos $[W]_\lambda$ trūkioji dalis lygi nuliui. Kvadratinės variacijos savybė Wiener'io procesui yra tiksli ta prasme, kad $\cup_\lambda N(\lambda) = \Omega$. Šias ir daugelį kitų Wiener'io proceso savybių įrodė P. Lévy[3] (1940) [7].

[3]Paul Lévy (1886 – 1971) – prancūzų matematikas

Tegul W yra Wiener'io procesas, μ – realusis skaičius ir $\sigma > 0$. Apibrėžkime atsitiktinį procesą $R = \{R(t)\colon\ 0 \leq t \leq T\}$ lygybe

$$R(t) := \mu t + \sigma W(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.23}$$

Čia konstanta μ vadinama dreifu, o konstanta σ vadinama kintamumu (angl. volatility). Susiaurinus proceso R apibrėžimo sritį, $\{R(t)\colon\ t = 0, 1, \ldots, T\}$ yra diskretaus laiko grąžos procesas. Tokiam grąžos procesui teisinga atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė, nes (2.6) lygybėje dydžiai $\xi_t = \sigma[W(t) - W(t-1)]$, $t = 1, \ldots, T$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2.

Akcijos kaina ir grąža. Diskretaus laiko atveju kaina ir grąža yra susietos (2.3) sąryšiu. Ar toks sąryšis gali būti apibendrintas tolydaus laiko procesams yra toli gražu netrivialus klausimas. Atskiru atveju, jei $\sigma = 0$, t. y. jei tolydaus laiko grąžos procesas yra $R(t) = R_0(t) = \mu t$, tai atitinkamas kainos procesas finansų teorijoje apibrėžiamas gerai žinomu būdu skaičiuojant tolydžiąsias sudėtines palūkanas (angl. continuously compounded interest rate). Būtent, kiekvienam intervalo $[0, T]$ skaidiniui $\{iT/m\}_{i=0}^m$ suskaičiuojamos atitinkamos sudėtinės palūkanos ir po to, perėjus prie ribos kai $m \to \infty$, gaunama

$$\begin{aligned} S_0(T) &:= S_0(0) \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^m \left[1 + R_0\left(\frac{iT}{m}\right) - R_0\left(\frac{(i-1)T}{m}\right)\right] \\ &= S_0(0) \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{\mu T}{m}\right)^m = S_0(0)e^{\mu T} = S_0(0)e^{R_0(T)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Tokiu būdu tolydaus laiko grąžos procesas R_0 yrs susijęs su atitinkamu kainos procesu S_0 sąryšiu

$$R_0(T) = \ln\big[S_0(T)/S_0(0)\big]. \tag{2.25}$$

Būtų natūralu tą patį skaičiavimo metodą taikyti ir kitoms grąžoms. Deja, (2.24) riba gali neegzistuoti arba gali būti begalinė, jei vietoje R_0 yra laisvai pasirenkama funkcija. Parodysime, kad tolydžiąsias sudėtines palūkanas galima „skaičiuoti" toms funkcijoms, kurios yra tam tikra prasme nešiurkštesnės už Wiener'io proceso trajektorijas.

Tolydaus laiko finansų rinkos modelyje kaina paprastai apibrėžiama vienu ar kitu būdu pagal grąžą. Parodysime, kad toks apibrėžimas yra galimas imituajant tolydžiųjų sudėtinių palūkanų skaičiavimą diskretaus laiko modelyje. Tarkime, kad funkcija $R \in D[0, T]$ turi kvadratinę λ-variaciją $[R]_\lambda$ intervale $[0, T]$. Čia ir toliau $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\geq 1}$ yra tokia intervalo $[0, T]$ skaidinių seka, kad $\lambda_m \subset \lambda_{m+1}$ su visais m, o sąjunga $\cup\{\lambda_m\colon\ m \geq 1\}$ yra tiršta intervale $[0, T]$. Tada ribos

$$\begin{aligned} S(t) &:= \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{n(m)} \big[1 + R(t_i^m \wedge t) - R(t_{i-1}^m \wedge t)\big] \\ &= \exp\{R(t) - (1/2)[R]_\lambda^c(t)\} \prod_{(0,t]} (1 + \Delta R)e^{-\Delta R} \end{aligned} \tag{2.26}$$

egzistuoja kiekviename taške $t \in (0,T]$ ir apibrėžia funkciją S intervale $(0,T]$. Pratęsime šios funkcijos apibrėžimą iki intervalo $[0,T]$ tarę, kad $S(0) := 1$.

(2.26) riba, lyginant ją su (2.24) riba, gali atrodyti keistokai. Patikrinsime, kad (2.26) teisinga, kai R papildomai yra tolydžioji funkcija, t. y. $\Delta R \equiv 0$. Tuo tikslu pasinaudosime Taylor'o teorema su liekamuoju nariu logaritminei funkcijai: su visais $|u| \le 1/2$,

$$\log(1+u) = u - u^2/2 + 3\theta u^3;$$

čia $|\theta| = |\theta(u)| \le 1$. Pažymėkime $\Delta_i^m R := R(t_i^m \wedge t) - R(t_{i-1}^m \wedge t)$ su visais $i = 1,\ldots,n(m)$ ir $m = 1,2,\ldots$. Kadangi R yra tolydi, $\max_i |\Delta_i^m R| \le 1/2$ su visais pakankamai dideliais m. Su visais tokiais m yra teisingos lygybės

$$\begin{aligned} U(R;\lambda_m) &:= \prod_{i=1}^{n(m)} \big[1+\Delta_i^m R\big] = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n(m)} \log\big[1+\Delta_i^m R\big]\Big\} \\ &= \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n(m)} \Delta_i^m R - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n(m)} \big[\Delta_i^m R\big]^2 + 3\sum_{i=1}^{n(m)} \theta_i^m \big[\Delta_i^m R\big]^3\Big\}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

kai $\theta_i^m := \theta(\Delta_i^m R)$. Dešinėje (2.27) lygybės pusėje pirmoji suma lygi $R(t) - R(0) = R(t)$, antroji suma konverguoja į $[R]_\lambda(t)$ su $m \to \infty$, kadangi R turi kvadratinę λ-variaciją, o trečiaji suma artėja į 0 su $m \to \infty$, kadangi egzistuoja tokia baigtinė konstanta C, kad

$$\Big|\sum_{i=1}^{n(m)} \theta_i^m \big[\Delta_i^m R\big]^3\Big| \le \max_i |\Delta_i^m R| \sum_{i=1}^{n(m)} \big[\Delta_i^m R\big]^2 \le C \max_i |\Delta_i^m R|$$

su visais pakankamai dideliais m. Iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{m\to\infty} U(R;\lambda_m) = \exp\big\{R(t) - (1/2)[R]_\lambda(t)\big\},$$

o tai ir yra (2.26), kadangi $[R]_\lambda \equiv [R]_\lambda^c$ tolydžiosioms funkcijoms R.

(2.26) lygybe apibrėžta S funkcija priklauso klasei $D[0,T]$, turi kvadratinę λ-variaciją $[S]_\lambda$, apibrėžtą lygybe

$$[S]_\lambda(t) = \int_0^t S^2\,d[R]_\lambda, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.28}$$

kurioje integralas egzistuoja sutankinto Riemann'o–Stieltjes'o integralo prasme. Be to, funkcija S yra integralinės lygties

$$S(t) = 1 + \int_0^t S\,d_\lambda R, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.29}$$

sprendinys. Pastarojoje lygtyje integralu vadinama intervalo $[0,T]$ skaidinius λ_m, $m \ge 1$, atitinkančių Riemann'o–Stieltjes'o sumų riba kai $m \to \infty$, t. y.

$$\int_0^t S\,d_\lambda R := \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} S(t_{i-1}^m \wedge t)[R(t_i^m \wedge t) - R(t_{i-1}^m \wedge t)].$$

Šis integralo apibrėžimas rodo, jog (2.29) lygtis turi panašumą su akcijos kainos ir grąžos sąryšiu (2.4) diskretaus laiko finansų rinkos modelyje.

Tai, kad S funkcija tenkina (2.29) lygtį galima patikrinti naudojantis vadinamąja Itô formule[4], kuri apibendrina kompozicijos diferencijavimo taisyklę glodžiųjų funkcijų analizėje. Vienas iš daugelio Itô formulės variantų yra toks: jei ϕ yra glodi C^2 klasės funkcija, o f funkcija priklauso klasei $D[0,T]$ ir turi kvadratinę λ-variaciją, tai egzistuoja integralas $\int(\phi'\circ f)\,d_\lambda f$ ir su kiekvienu $t\in[0,T]$ galioja lygybė

$$(\phi\circ f)(t)-(\phi\circ f)(0)=\int_0^t(\phi'\circ f)\,d_\lambda f+\frac{1}{2}\int_0^t(\phi''\circ f)\,d[f]_\lambda^c+\sum_{(0,t]}\Big\{\Delta(\phi\circ f)-(\phi'\circ f)_-\Delta f\Big\}.$$

Parodysime, kad (2.29) teisinga kai R yra tolydžioji funkcija. Tarkime, kad $\phi(u):=e^u$, $u\in\mathbb{R}$, ir $f(t):=R(t)-(1/2)[R]_\lambda(t)$, $0\le t\le T$. Tada $\Delta(\phi\circ f)=\Delta f\equiv 0$, $[f]_\lambda^c=[R]_\lambda$ ir, naudojantis Itô formule, gauname

$$\begin{aligned}S(t)-1=(\phi\circ f)(t)-(\phi\circ f)(0)&=\int_0^t(\phi'\circ f)\,d_\lambda f+\frac{1}{2}\int_0^t(\phi''\circ f)\,d[f]_\lambda^c\\&=\int_0^t S\,d_\lambda(R-(1/2)[R]_\lambda)+\frac{1}{2}\int_0^t S\,d[R]_\lambda=\int_0^t S\,d_\lambda R\end{aligned}$$

su kiekvienu $0\le t\le T$, t. y. galioja (2.29) integralinė lygtis.

Galiausiai, (2.26) lygybe apibrėžtai funkcijai S, riba

$$R(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n(m)}\frac{S(t_i^m\wedge t)-S(t_{i-1}^m\wedge t)}{S(t_{i-1}^m\wedge t)}=\int_0^t S^{-1}\,d_\lambda S \tag{2.30}$$

egzistuoja ir lygybės galioja su kiekvienu $t\in[0,T]$. Palyginimui priminsime, kad diskretaus laiko modelyje grąža R išreiškiama akcijos kaina S formule

$$R(t)=\sum_{s=1}^t\big[R(s)-R(s-1)\big]=\sum_{s=1}^t\frac{S(s)-S(s-1)}{S(s-1)},\qquad t=1,\dots,T.$$

Nesunku pastebėti, kad tolydžiai baigtinės variacijos funkcijai R, dešinioji (2.26) lygybės pusė yra tiesiog eksponentė $\exp\{R(t)\}$, o dešinioji (2.30) lygybės pusė yra logaritmas $\ln\{S(t)\}$ (plg. su (2.24) ir (2.25)). Tokiu būdu, (2.26) ir (2.30) lygybės apibendrina eksponentinės ir logaritminės transformacijų dualumą.

2.3 Apibrėžimas. (2.26) lygybe apibrėžta funkcija S vadinama *akcijos kaina*, o (2.30) lygybe apibrėžta funkcija R – šios *akcijos grąža*.

Akcijos kainos ir grąžos funkcijos yra apibrėžtos tik tuo atveju, kai jos turi kvadratinę λ-variaciją kuriam nors λ. Funkcijos R kvadratinės λ-variacijos egzistavimas būtinas tam, kad egzistuotų (2.26) riba jei, papildomai, R yra tolydi ir $v_p(R;[0,T])<\infty$ su kuriuo nors $p<3$. Jei $v_p(R;[0,T])<\infty$ su kuriuo nors $p<2$, tai (2.26) riba ir integralas (2.29) lygtyje egzistuoja klasikinės analizės prasme, t. y. ribos egzistuoja (visų) intervalo skirstinių smulkinimo prasme.

[4] Kiyosi Itô (gimė 1915) - japonų matematikas

Geometrinis Wiener'io procesas. Tarkime, kad grąža R yra (2.23) lygybe apibrėžtas atsitiktinis procesas. Remiantis tuo, kad Wiener'io proceso kvadratinė λ-variacija yra apibrėžta (2.22) sąryšiu it tuo, kad beveik visos jo trajektorijos yra tolydžios funkcijos, gauname

$$[R]_\lambda(T) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left\{ \mu^2(t_i^m - t_{i-1}^m)^2 + 2\mu\sigma(t_i^m - t_{i-1}^m)(W(t_i^m,\omega) - W(t_{i-1}^m,\omega)) \right\}$$

$$+\sigma^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left[W(t_i^m,\omega) - W(t_{i-1}^m,\omega) \right]^2 = \sigma^2 T$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Toks pat sąryšis ganaumas T pakeitus į bet kurį $t \in [0,T]$. Todėl grąžos R kvadratinė λ-variacija $[R]_\lambda$ ir jos tolydžioji dalis yra funkcija

$$[R]^c_\lambda(t) = [R]_\lambda(t) = \sigma^2 [W]_\lambda(t) = \sigma^2 t$$

o šuoliai $\Delta R(t) = 0$ su kiekvienu $t \in [0,T]$. Tada, (2.26) lygybe apibrėžta kaina S yra atsitiktinis procesas

$$S(t) = \exp\{\mu t + \sigma W(t) - (\sigma^2/2)t\}, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2.31}$$

Šis atsitiktinis procesas vadinamas *geometriniu Wiener'io procesu*, o aukščiau aptarta jo konstrukcija apibendrina tolydžiąsias sudėtines palūkanas (2.24).

Akcijų kainų kitimus modeliuoti Wiener'io procesu (tiksliau jo prototipu) pirmą kartą pradėjo Louis Bachelier 1900 metais. Tačiau toks kainos modelis nėra geras nes, be kitų trūkumų, Wiener'io procesas gali įgyti ir neigiamas reikšmes. Vėliau akcijų kainas imta modeliuoti atsitiktiniu procesu

$$S(t) = \exp\{W(t)\}, \qquad 0 \le t \le T.$$

Šis būdas siejamas su amerikiečių astrofiziko M. F. Maury Osborne vardu, kuris šį log-Gausinį modelį pasiūlė 1959 metais.

Geometrinis Wiener'io procesas (2.31) pradėtas naudoti kaip tiesinės Itô stochastinės lygties

$$S(t) = 1 + (I)\int_0^t S\,dR \quad \text{arba} \quad dS(t) = S(t)dR(t), \quad S(0) = 1,$$

sprendinys; čia R apibrėžtas (2.23) lygybe, o integralas yra Itô stochastinis integralas. Ši integralinė išraiška rodo, kad geometrinis Wiener'io procesas yra tolydaus laiko martingalas. Be to, geometrinio Wiener'io proceso svarba ypatingai išaugo po to, kai jis tapo viena iš pagrindinių teorinių prielaidų išvedant pasirenkamųjų sandorių (arba opcionų) sąžiningąją kainą. Ši prielaida buvo tiek svarbi, kad net pats kainos modelis įgyjo sąžiningosios kainos atradimo autorių vardą: Black'o–Scholes'o modelis. Tačiau ekonometrinėje finansų rinkos analizėje geometrinis Wiener'io procesas nėra laikomas pakankamai adekvačiu vertybinių popierių kainos modeliu. Todėl iki šiol intensyviai ieškomi alternatyvūs akcijų kainų modeliavimo būdai.

Alternatyvūs grąžos procesai. Daugelio finansų teoretikų nuomone, tarp kurių B. B. Mandelbrot'as yra vienas iš pirmųjų ir aktyviausių jos reiškėjų, pagrindinės problemos yra susijusios su Wiener'io proceso vienmačio marginalaus skirstinio uodegos lengvumu[5], pokyčių nepriklausomumu ir trajektorijų tolydumu (žr. [8]). Per pastaruosius kelis dešimtmečius kainų modeliavimui buvo išbandyti praktiškai visi žinomi atsitiktiniai procesai ir jų klasės. Čia paminėsime tik keletą alternatyvių atsitiktinių procesų dažnai naudojamų vietoje Wiener'io proceso.

Istoriškai pirmoji ir pakankamai natūrali Wiener'io proceso alternatyva buvo simetrinis α-stabilusis procesas $X_\alpha = \{X_\alpha(t)\colon\ t \geq 0\}$, $\alpha \in (0, 2)$. Šio proceso pokyčiai yra nepriklausomi α-stabilūs atsitiktiniai dydžiai, vienmačiai marginalieji skirstiniai turi sunkias uodegas, o trajektorijos yra trūkios. Tarkime, kad grąžos procesas yra

$$R(t) := \mu t + X_\alpha(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Kadangi su kiekvienu $p \in (\alpha, 2)$, $v_p(X_\alpha(\cdot, \omega); [0, T]) < \infty$ beveik visiems $\omega \in \Omega$, tolydinė šio proceso kvadratinės λ-variacijos dalis $[X_\alpha(\cdot, \omega)]^c_\lambda \equiv 0$ tiems patiems $\omega \in \Omega$. Todėl remiantis (2.26), atitinkamas kainos procesas yra

$$S(t) = \exp\left\{\mu t + X_\alpha(t)\right\} \prod_{(0,t]} (1 + \Delta X_\alpha) e^{-\Delta X_\alpha}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Buvę populiarūs praėjusio amžiaus septintajame ir aštuntajame dešimtmečiuose, simetriniai α-stabilieji atsitiktiniai procesai šiais laikais yra gerokai rečiau naudojami akcijų grąžoms modeliuoti. Paprastai argumentuojama tuo, kad jų uodegos per sunkios (neegzistuoja antras momentas). Be to, jie neturi analizinės tankio išraiškos. Gal būt yra ir kitos, mažiau racionalios, sumažėjusio šių procesų populiarumo priežastys.

Paskutinįjį dešimtmetį finansų matematikoje ir ekonometrijoje išpopuliarėjo kelios kitos homogeniškų Lévy procesų klasės. Priminsime, kad *Lévy procesu* vadinamas toks, nepriklausomus pokyčius turintis atsitiktinis procesas $X = \{X(t)\colon\ t \geq 0\}$, kurio trajektorijos yra tolydžios iš dešinės, gali turėti trūkius iš kairės ir $X(0) = 0$. Lévy procesas X vadinamas *homogenišku*, jei pokyčio $X(t + s) - X(t)$, $t, s \geq 0$, skirstinys nepriklauso nuo t. Wiener'io procesas yra vienintelis homogeniškas Lévy procesas, kurio trajektorijos yra tolydžios. Tarp minėtųjų populiarių procesų šiuo metu yra *normalusis atvirkštinis Gauss'o* Lévy procesas (žr. Barndorff-Nielsen [2]). Kita potencialiai populiarių procesų klase, tinkama kainų dinamikai modeliuoti, gali tapti *apibendrintųjų z-skirstinių* Lévy procesai, apibrėžti B. Grigelionio [5].

Kitokio tipo alternatyva Wiener'io procesui yra trupmeninis Brown'o judesys (angl. fractional Brownian motion) $B_H = \{B_H(t)\colon\ t \geq 0\}$, kurio Hurst'o rodiklis $1/2 < H < 1$. B_H taip pat yra Gauss'o atsitiktinis procesas su tolydžiomis trajektorijomis, tačiau, skirtingai nuo Wiener'io proceso, jo pokyčiai yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tarkime, kad grąžos procesas yra

$$R(t) := \mu t + B_H(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

[5]Atsitiktinio proceso $X = \{X(t)\colon\ t \geq 0\}$ vienmatis marginalusis skirstinys yra atsitiktinio dydžio $X(t)$ skirstinys bet kuriam $t \geq 0$. Atsitiktinio dydžio ξ skirstinio *uodega* vadinama funkcija $f(u) := P(\{|\xi| \geq u\})$, $u \geq 0$. Uodega yra lengva, pusiau sunki arba sunki, jei funkcija f didelėms argumento reikšmėms elgiasi atitinkamai kaip funkcija $\exp\{-u^2\}$, $u^{\pm b} \exp\{-u\}$ arba u^{-a}, kuriems nors $0 < a, b < \infty$.

Vėl gi, kadangi su kiekvienu $p \in (1/H, 2)$, $v_p(B_H(\cdot,\omega);[0,T]) < \infty$ beveik visiems $\omega \in \Omega$, tolydinė šio proceso kvadratinės λ-variacijos dalis yra nulis. Be to, kadangi šio proceso trajektorijos yra tolydžios funkcijos, remiantis (2.26), atitinkamas kainos procesas yra

$$S(t) = \exp\big\{\mu t + B_H(t)\big\}, \qquad 0 \le t \le T.$$

Beje, jei proceso B_H Hurst'o indeksas $H \in (0, 1/2)$, tai jo kvadratinė λ-variacija yra begalinė ir todėl tai yra pavyzdys proceso, kuriam tolydžių sudėtinių palūkanų skaičiavimo metodas yra nepritaikomas.

Klausimai ir uždaviniai.

1. Kuo skiriasi finansų matematikos modelis nuo matematinės teorijos?

2. Kas yra sąžiningojo lošimo rinka? Jos pavyzdžiai?

3. Koks ryšys tarp efektyvios rinkos hipotezės ir sąžiningojo lošimo hipotezės?

4. Kuo skiriasi sąžiningojo lošimo hipotezė nuo atsitiktinio klaidžiojimo hipotezės?

5. Patikrinti, kad Bernulio procesą N apibrėžiantys atsitiktiniai dydžiai $\epsilon_1, \dots, \epsilon_T$ yra nepriklausomi tikimybės P_q atžvilgiu (žr. (2.18)).

6. Patikrinti (2.19) lygybę.

7. Pateikti tokį binominio modelio pavyzdį, kuriame su kiekvienu $t = 1, \dots, T$,
$$E\Big[\frac{S(t)}{S(t-1)}\Big] = 1,1 \qquad \text{ir} \qquad Var\Big[\frac{S(t)}{S(t-1)}\Big] = 0,01.$$

8. Nagrinėkime tokį dviejų periodų binominį modelį (S_0, S), kuriame $P(\{\xi_t = a\}) = 0,5$, $S(0) = 100$, $\mu = 0$ ir $a = -0,01$. Rasti visas galimas akcijos kainos proceso S reikšmes po pirmo ir antro periodų. Kokia tikimybė, kad po antrojo periodo $S(2) \ge 102$?

9. Tegul $0 < \alpha \le 1$. Funkcijai $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ galioja α-Hölder'io savybė, jei egzistuoja tokia baigtinė konstanta K, kad $|f(t) - f(s)| \le K|t-s|^\alpha$ su visiais $s, t \in [a,b]$. Parodyti, kad tokiai funkcijai f yra baigtinė $(1/\alpha)$-variacija, t. y. $v_{1/\alpha}(f;[a,b]) < \infty$.

10. Tegul $0 < p < \infty$ ir $0 < \alpha \le 1$. Įrodyti: jei funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ turi baigtinę p-variaciją ir funkcijai $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ galioja α-Hölder'io savybė, tai kompozicija $\phi \circ f$ turi baigtinę (p/α)-variaciją.

11. Remiantis priedo A.1 teorema, parodyti, kad beveik visoms Wiener'io proceso trajektorijoms galioja α-Hölder'io savybė jei $\alpha < 1/2$ ir ši savybė negalioja jei $\alpha = 1/2$.

12. Kodėl tolydaus laiko finansų rinkos modelyje akcijos kaina S ir grąža R siejami sąryšiais (2.26) ir (2.30)?

Pastabos. *Tikimybės interpretacija*. Pirma, tikimybė gali būti interpretuojama kaip (rinkos veikėjo) individo asmeninio tikėjimo skaitinė išraiška. Tokiu atveju tikimybė yra daugiau siejama su psichologiniu pasauliu, o ne su fiziniu. Antra, fiziniuose moksluose dažnai naudojama tikimybės interpretacija yra dažnumas, apibrėžiamas herbo pasirodymo santykiu, gaunamu neaprėžtai ilgai mėtant tą pačią monetą. Šios interpretacijos naudojimas susiduria su sunkumais patikrinant tokio santykio egzistavimo sąlygas. Trečią interpretaciją pasiūlė K. Popper'is teikdamas, kad tikimybė išreiškia savybę, kurią jis pavadino polinkiu (angl. propensity). Įsigilinus į šios interperetacijos esmę iškyla abejonės dėl jos egzistavimą realiame pasaulyje. Ketvirta, vadinamasis Borel'io kriterijus siūlo atsisakyti tikimybės interpretacijos paieškos, priskirdamas tikimybei tarpinį vaidmenį tarp įdėjų pasaulio ir realybės. Pagal šį kriterijų, patvirtinti ar paneigti tikimybinę teoriją galima tikrinant tokių įvykių realumą, kurių tikimybės yra arba nulis arba vienetas. Plačiau apie tai galima sužinoti Dawid (2004) straipsnyje.

Wiener'io procesas. Įdomu tai, kad Wiener'io proceso prototipas pirmą kartą pasirodė siekiant matematiškai aprašyti akcijos kainos kurso kitimą. Iš esmės panašia matematine konstrukcija naudojosi Louis Bachelier (1900) savo disertacijoje. Po penkių metų fizikai Albert'as Einstein'as ir Marian'as von Smoluchowski's pasiūlė naudotis ta pačia matematine konstrukcija modeliuojant dalelės judėjimą skystyje. Kadangi eksperimentinis tokios dalelės judėjimo tyrimas buvo pradėtas anglų botaniko Robert'o Brown'o 1826 metais, ir kadangi Einstein'o bei Smoluchowski'o matematinis aprašymas pasitvirtino ekperimentuose, Bachelier, Einstein'o ir Smoluchowski'o matematinis procesas buvo pradėtas vadinti *Brown'o judesiu*. Tačiau matematiškai korektišką šio proceso egzistavimo įrodymą pirmą kartą pateikė Norbert'as Wiener'is[6] (1923). Dėl to Brown'o judesys taip pat vadinamas Wiener'io procesu.

Papildoma literatūra.

1. Bachelier, L. Théorie de la Spéculation. *Annales de l'Ecole normale superioure*, 1900. Transl. by A. J. Boness: Theory of speculation. In: *Random Character of Stock Market Prices*, Cootner, P. H. ed., MIT Press, Cambridge, 1964.

2. Dawid, A. P. Probability, causality and the empirical world: A Bayes-de Finetti-Popper-Borel synthesis. *Statsitical Science*, 2004, vol. 19, No 1, 44-57.

3. Shafer, G. and Vovk, V. *Probability and Finance*. John Wiley & Sons, New York, 2001.

4. Wiener, N. Differential spaces. *Journal of Mathematical Physics. MIT*, **2** (1923), 131-174.

[6] Norbert Wiener (1894 – 1964) – amerikiečių matematikas

Skyrius 3

Arbitražo teorija: diskretaus laiko modelis

Svarbiausią šiuolaikinės finansų matematikos dalį sudaro teorija apie arbitražą, rizikai neutralų įkainojimą ir finansinių išmokų atkartojimą. Jos svarbą lemia tai, kad šios trys sąvokos sieja efektyviosios rinkos sampratą, vertybinių popierių įkainojimo mechanizmą ir hedžingu grindžiamą finansinių instrumentų įkainojimo metodą. (Apie tokius finansinius instrumentus, kaip pasirenkamasis sandoris, ir jų įkainojimą kalbama kitame skyrelyje.) Paprastai ši teorija vadinama *arbitražo teorija*, o jos suk$\overline{\text{u}}$rimas yra siejamas su Harrison'o ir Kreps'o [**?**] bei Harrison'o ir Pliska [**?**] darbais.

Minėti trys arbitražo teorijos dalykai yra nusakomi matematinėmis konstrukcijomis: bearbitražė rinka, rizikai neutralus matas ir rinkos pilnumas. Jų konkretus apibrėžimas priklauso nuo finansų rinkos modelio. Arbitražo teorija yra daugiau ar mažiau užbaigta tik diskretaus laiko atveju. Šio modelio kontekste, *rinka yra bearbitražė tada ir tik tada, kai egzistuoja rizikai neutralus matas* (ekvivalentus matui P). Be to, *bearbitražė rinka yra pilna tada ir tik tada, kai egzistuoja vienintelis rizikai neutralus matas*. Šie du teiginiai sudaro tai, kas yra vadinama pirmąja ir antrąja fundamentaliomis vertybių įkainojimo teoremomis. Tolydaus laiko finansų rinkos modeliuose kol kas žinoma, kad šie teiginiai yra teisingi nepilnai ir šiek tiek modifikavus visas tris minėtas matematines konstrukcijas.

3.1 Diskretaus laiko finansų rinka

Finansų rinkos matematinis modelis vadinamas diskretaus laiko modeliu jei vertybinių popierių kainos kinta tik diskrečiais laiko momentais $t \in D = \{0, 1, \ldots, T\}$. Pagrindiniai šio modelio elementai jau buvo aptarti 2.2 skyrelyje. Priminsime, kad laiko momentas $t = 0$ vadinamas pradiniu arba dabarties laiko momentu. Laiko momentai $t \geq 1$ priskiriami ateičiai.

Ateities neapibrėžtis yra aprašoma tikimybine erdve $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Visa laiko momentu t prieinama informacija yra nusakoma σ-algebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Todėl nat$\overline{\text{u}}$ralu tarti, kad $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon t \in D\}$ yra nemažėjančių σ-algebrų $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T$ šeima, kaip ir anksčiau, vadinama informaciniu srautu. Kadangi laiko momentas $t = 0$ siejamas su dabartimi, taip pat nat$\overline{\text{u}}$ralu tarti, kad tikimybinis matas P aibėje $\mathcal{F}_0$ yra trivialus, t. y.

$$P(A) \in \{0, 1\} \qquad \text{su kiekviena aibe} \quad A \in \mathcal{F}_0. \tag{3.1}$$

Dėl šios prielaidos, visi $\mathcal{F}_0$-matūs atsitiktiniai dydžiai mato P atžvilgiu yra konstantos.

Kainų sistema. Tarsime, kad finansų rinką sudaro $d+1$ vertybiniai popieriai, toliau sutrumpintai vadinami VP. Kiekvienas VP tapatinamas su indeksu $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$. i-tojo VP kaina laiko momentu t yra tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ apibrėžtas neneigiamas atsitiktinis dydis $S_i(t)$. Iš šių atsitiktinių dydžių sudarytas atsitiktinis procesas $S_i = \{S_i(t)\colon\ t \in D\}$ vadinamas *suderintu* su informaciniu srautu $\mathbb{F}$ arba $\mathbb{F}$-suderintu. Tokiu būdu mūsų nagrinėjamos finansų rinkos VP-ių kainų dinamika aprašoma $\mathbb{F}$-suderintu vektoriniu atsitiktiniu procesu

$$S(t) := (S_0(t), S_1(t), \ldots, S_d(t)) \in \mathbb{R}_+^{d+1}, \qquad t \in D,$$

toliau vadinamu D *laikotarpio kainų sistema*. Be to, diskretaus laiko (arba D laikotarpio) *finansų rinka* vadinsime porą (S, P), kurioje S yra D laikotarpio kainų sistema ir P yra tikimybinis matas.

Tarp visų (S, P) finansų rinkos VP, 0-inis VP yra išskirtinis nes laikomas nerizikingu tokia prasme:

3.1 Apibrėžimas. Sakykime, kad r_t, $t = 1, \ldots, T$, yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matūs, teigiami atsitiktiniai dydžiai. 0-inis VP vadinamas *banko sąskaita*, jei jo kainos dinamika nusakoma taip: $S_0(0) = 1$ ir su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$

$$S_0(t) = \prod_{s=1}^{t} (1 + r_s).$$

Atsitiktinis dydis r_t vadinamas *palūkanų norma* ir yra banko sąskaitos S_0 grąžos norma $\Delta R_0(t)$. Banko sąskaitos grąža R_0 yra apibrėžta lygybėmis

$$R_0(t) = \sum_{s=1}^{t} r_s$$

su kiekvienu $t \in \{1, \ldots, T\}$ (plg. su grąžos apibrėžimu (2.2)).

Tas pats pinigų kiekis šiandien ir bet kuriuo ateities momentu turi skirtingą vertę. Naudojantis palūkanų norma, VP-iams šis skirtumas paprastai įvertinamas diskontuojant: i-tojo VP momento t kaina šiandien yra vadinamasis *diskontuotas kainos procesas*

$$S_i^*(t) := S_i(t)/S_0(t), \qquad t \in D, \quad i \in \{0, \ldots, d\}.$$

Aišku, kad $S_0^* \equiv 1$. $\mathbb{F}$-suderintas vektorinis atsitiktinis procesas

$$S^*(t) := (1, S_1^*(t), \ldots, S_d^*(t)) \in \mathbb{R}_+^{d+1}, \qquad t \in D,$$

vadinamas D *laikotarpio diskontuota kainų sistema*.

Strategija ir portfelis. Toliau apibrėžiamos rinkos veikėjo (investuotojo) strategijos ir portfelio sampratos. Laikotarpyje nuo $t-1$ iki t rinkos dalyvis turi tam tikrą kiekį i-tosios rūšies VP. Tarsime, kad tas kiekis yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus atsitiktinis dydis $\psi_i(t)$, įgyjantis bet kurias realiasias reikšmes. Iš šių atsitiktinių dydžių sudarytas atsitiktinis procesas $\psi_i = \{\psi_i(t)\colon\ t = 1, \ldots, T\}$ vadinamas *numatomu* atžvilgiu informacinio srauto $\mathbb{F}$ arba $\mathbb{F}$-numatomu. Dėl (3.1) prielaidos atsitiktinis dydis $\psi_i(1)$ yra pastovus mato P atžvilgiu. Atvejis, kai $\psi_i(t) < 0$ yra interpretuojamas kaip i-tojo VP skolos dydis tuo pačiu laikotarpiu.

3.2 Apibrėžimas. Sakykime, kad rinkinį $\psi := \{\psi_0, \ldots, \psi_d\}$ sudaro tokie $\mathbb{F}$-numatomi atsitiktiniai procesai $\psi_i = \{\psi_i(t)\colon\ t \in D\}$, $i = 0, \ldots, d$, kuriems $\psi_i(0) \equiv \psi_i(1)$ su visais i. Toks rinkinys ψ vadinamas investuotojo D laikotarpio *strategija*, o vektorius $\psi(t) := (\psi_0(t), \ldots, \psi_d(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ vadinamas investuotojo *portfeliu* laiko momentu $t \in D$.

Jei rinkos veikėjas laiko momentu $t \in D$ turi $\psi_i(t)$ vienetų i-tosios rūšies VP, tai jų vertė tuo momentu yra $\psi_i(t)S_i(t)$. Todėl rinkos veikėjo *portfelio verte* laiko momentu $t \in D$ vadinamas atsitiktinis dydis

$$V^{\psi,S}(t) := \psi(t)\cdot S(t) = \sum_{i=0}^{d} \psi_i(t)S_i(t) \tag{3.2}$$

Čia ir toliau taškas $\cdot$ žymi skaliarinę sandaugą Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^{d+1}$. Atsitiktinis procesas $V^{\psi,S} = \{V^{\psi,S}(t)\colon\ t \in D\}$ vadinamas *vertės procesu* (angl. value process). Portfelio vertė $V^{\psi,S}(t)$ laiko momentu $t = 0$ mato P atžvilgiu yra pastovus dydis.

Laikotarpyje nuo $t-1$ iki t i-tojo VP kainos pokytis yra $\Delta S_i(t) := S_i(t) - S_i(t-1)$. Kadangi šio VP tuo laikotarpiu portfelyje yra $\psi_i(t)$, tai atitinkamos portfelio pelno dalies pokytis yra $\psi_i(t)\Delta S_i(t)$. Apskritai, *portfelio pelnu* laiko momentu $t \in \{1, \ldots, T\}$ vadinamas atsitiktinis dydis

$$G^{\psi,S}(t) := \sum_{s=1}^{t} \psi(s)\cdot\Delta S(s) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{s=1}^{t} \psi_i(s)[S_i(s) - S_i(s-1)], \tag{3.3}$$

Laiko momentu $t = 0$ portfelio pelnas $G^{\psi,S}$ neapibrėžtas, tačiau toliau naudinga pažymėti $G^{\psi,S}(0) := 0$. Atsitiktinis procesas $G^{\psi,S} = \{G^{\psi,S}(t)\colon\ t \in D\}$ vadinamas *pelno procesu* (angl. gain process).

Jei portfelio vertės (3.2) apibrėžime kainos sistemą S pakeisime diskontuota kainos sistema S^*, tai gautą vertės procesą $V^{\psi,S^*} = \{V^{\psi,S^*}(t)\colon\ t \in D\}$ vadinsime *diskontuotu vertės procesu*. Analogiškai apibrėžtą atsitiktinį procesą $G^{\psi,S^*} = \{G^{\psi,S^*}(t)\colon\ t \in D\}$ vadinsime *diskontuotu pelno procesu*.

Finansavimosi strategija. Tai tokia strategija ψ, kurią atitinkančio portfelio vertė $V^{\psi,S}$ yra jo pradinės vertės $V^{\psi,S}(0)$ ir rinkoje gauto pelno $G^{\psi,S}$ suma, t. y. neskiriama lėšų vartojimui ir nėra portfelio papildymo iš šaltinių, esančių už rinkos ribų. Formaliai tokia strategija apibrėžiama taip:

3.3 Apibrėžimas. Sakykime, kad S yra kainų sistema D laikotarpiu. D laikotarpio strategija ψ vadinama S-*finansavimosi strategija* (angl. self-financing), jei

$$V^{\psi,S}(t) = V^{\psi,S}(0) + G^{\psi,S}(t) \qquad \text{su kiekvienu} \quad t \in \{1, \ldots, T\}. \tag{3.4}$$

Atveju $t = 1$ (3.4) sąryšis nėra strategijos suvaržymas nes galioja visada. Iš tikrųjų, kadangi $\psi(1) \equiv \psi(0)$, tai $G^{\psi,S}(1) = V^{\psi,S}(1) - V^{\psi,S}(0)$. Kitiems laiko momentams analogiška savybė yra portfelio pasirinkimo suvaržymas. Bet kuriuo atveju, finansavimosi strategijai ψ galioja lygybės

$$\begin{aligned} \psi(t)\cdot S(t) - \psi(t-1)\cdot S(t-1) &= V^{\psi,S}(t) - V^{\psi,S}(t-1) = G^{\psi,S}(t) - G^{\psi,S}(t-1) \\ &= \psi(t)\cdot[S(t) - S(t-1)] \end{aligned}$$

su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$. Suprastinę abiejose lygybės pusėse $\psi(t)\cdot S(t)$ gauname, kad strategija ψ yra S-finansavimosi strategija tada ir tik tada, kai

$$\psi(t)\cdot S(t-1) = \psi(t-1)\cdot S(t-1) \qquad \text{su visais } t \in \{1, \ldots, T\}. \tag{3.5}$$

3.4 Lema. *Sakykime, kad S yra kainų sistema D laikotarpiu, o S^* yra to paties laikotarpio diskontuota kainų sistema. D laikotarpio strategija ψ yra S-finansavimosi strategija tada ir tik tada, kai ψ yra S^*-finansavimosi strategija*

Įrodymas. Pirmiausia tarkime, kad ψ yra S-finansavimosi strategija. Su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$, padalinę abi (3.5) lygybės puses iš $S_0(t-1)$ gauname, kad

$$\psi(t)\cdot S^*(t-1) = \psi(t-1)\cdot S^*(t-1) \qquad \text{su visais } t \in \{1, \ldots, T\}.$$

Iš čia išplaukia, kad lygybė

$$\psi(t)\cdot S^*(t) - \psi(t-1)\cdot S^*(t-1) = \psi(t)\cdot\Delta S^*(t) \tag{3.6}$$

yra teisinga taip pat su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$. Pasinaudoję šiomis lygybėmis gauname, kad diskontuotam vertės procesui $V^* := V^{\psi,S^*}$ lygybės

$$\begin{aligned} V^*(t) - V^*(0) &= \sum_{s=1}^{t} \{V^*(s) - V^*(s-1)\} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \{\psi(s)\cdot S^*(s) - \psi(s-1)\cdot S^*(s-1)\} \\ \text{pagal (3.6)} \qquad &= \sum_{s=1}^{t} \psi(s)\cdot\Delta S^*(s) = G^{\psi,S^*}(t), \end{aligned}$$

galioja su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$. Tai reiškia, kad ψ yra S^*-finansavimosi strategija. Šios implikacijos įrodymas į priešingą pusę yra simetriškas ir todėl praleistas. Lemos įrodymas baigtas.

3.5 Lema. *Sakykime, kad S yra kainų sistema, $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ yra numatomųjų procesų rinkinys ir $v \in \mathbb{R}$. Egzistuoja toks numatomasis procesas ψ_0, kad rinkinys $\psi := \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ yra S-finansavimosi strategija ir šią strategiją atitinkanti pradinė diskontuoto portfelio vertė $V^{\psi,S^*}(0) = v$.*

Įrodymas. Kadangi $S = \{S_i\}_{i=0}^d$, diskontuota kainų sistema yra $S^* = (1, \{S_i^*\}_{i=1}^d)$. Kiekvienam $t \in \{1, \ldots, T\}$ apibrėžkime skaičių

$$\psi_0(t) := v + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \psi_i(s) \Delta S_i^*(s) - \sum_{i=1}^{d} \psi_i(t) S_i^*(t),$$

ir $\psi_0(0) := \psi_0(1)$. Šiomis reikšmėmis apibrėžtas procesas $\psi_0 = \{\psi_0(t)\colon\ t \in D\}$ yra numatomas kadangi

$$\psi_0(t) = \begin{cases} v + \sum_{s=1}^{t-1} \sum_{i=1}^{d} \psi_i(s) \Delta S_i^*(s) - \sum_{i=1}^{d} \psi_i(t) S_i^*(t-1) & \text{jei } t > 1, \\ v - \sum_{i=1}^{d} \psi_i(t) S_i^*(t-1) & \text{jei } t = 1, \end{cases}$$

o atsitiktiniai dydžiai $S_i^*(0), \ldots, S_i^*(t-1)$ ir $\psi_i(1), \ldots, \psi_i(t)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matūs su visais $i \in \{1, \ldots, d\}$. Tokiu būdu $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_d\}$ yra investuotojo strategija. Šios strategijos diskontuoto portfelio vertė laiko momentu $t \in \{1, \ldots, T\}$ yra

$$V^{\psi,S^*}(t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \psi_i(t) S_i^*(t) = v + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \psi_i(s) \Delta S_i^*(s) = v + G^{*,\psi}(t),$$

nes $\Delta S_0^*(t) = 1 - 1 = 0$. Kadangi $\psi_i(0) \equiv \psi_i(1)$ su visais i, tai

$$V^{\psi,S^*}(0) = \psi_0(1) + \sum_{i=1}^{d} \psi_i(1) S_i^*(0) = v.$$

Iš čia išplaukia, kad $V^{\psi,S^*}(t) = V^{\psi,S^*}(0) + G^{\psi,S^*}(t)$ su visais $t \in \{1, \ldots, T\}$. Tai reiškia, kad ψ yra S^*-finansavimosi strategija. Remiantis 3.4 Lema, ψ yra S-finansavimosi strategija.

3.2 Arbitražas ir rizikai neutralus matas

Arbitražas. Arbitražo galimybe vadinama tokia portfelio formavimo strategija, kuri be jokios pralošimo rizikos su teigiama tikimybe garantuoja teigiamą pelną. Paprasčiausias arbitražo pavyzdys yra *galimybė* tuo pačiu metu nusipirkti pigiau ir parduoti brangiau. Atsiradus tokiai galimybei, ji ilgai neegzistuoja, nes kas nors būtinai ją realizuoja ir tokiu būdu išlygina pardavimo ir pirkimo kainas.

Tikslus arbitražo apibrėžimas priklauso nuo modelio.

3.6 Apibrėžimas. Sakykime, kad (S, P) yra D laikotarpio finansų rinka. *Arbitražo galimybe* (angl. an arbitrage opportunity) arba tiesiog *arbitražu* vadinama tokia S-finansavimosi strategija ψ, kad portfelio vertės procesui $V^{\psi,S}$ teisinga:

$$V^{\psi,S}(0) \le 0, \quad V^{\psi,S}(T) \ge 0 \quad P\text{-b.v.} \quad \text{ir} \quad P(\{V^{\psi,S}(T) > 0\}) > 0. \tag{3.7}$$

Priminsime, kad atsitiktiniais dydžiais tikimybių teorijoje vadinamos ekvivalentumo klasės, t. y. klasės kurioms priklauso P-b.v. lygios mačios funkcijos. Tokių neneigiamų atsitiktinių dydžių erdvę žymėsime $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada arbitražo galimybės (3.7) sąlygą galima išreikšti ir taip:

$$-V^{\psi,S}(0) \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \text{ir} \quad V^{\psi,S}(T) \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, P) \setminus \{0\}.$$

Tarkime, kad tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sudaro baigtinė ateities scenarijų aibė:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}, \quad \mathcal{F} = 2^\Omega \quad \text{ir} \quad P(\{\omega\}) > 0 \quad \text{su visais } \omega \in \Omega. \tag{3.8}$$

Tokiu atveju arbitražo galimybės (3.7) sąlyga reiškia, egzistavimą tokios S-finansavimosi strategijos ψ, kad su visais $\omega \in \Omega$

$$V^{\psi,S}(0,\omega) \le 0 \quad \text{ir} \quad (V^{\psi,S}(T,\omega_1), \ldots, V^{\psi,S}(T,\omega_K)) \in \mathbb{R}^K_+ \setminus \{0\}, \tag{3.9}$$

Pastaroji sąlyga reiškia, kad egzistuoja bent vienas ateities scenarijus $\omega \in \Omega$, kuriam esant $V^{\psi,S}(T,\omega) > 0$.

Arbitražo galimybės egzistavimas laikomas finansų rinkos neefektyvumo pasireiškimu, kurio priežastys aiškinamos tuo, kad kai kurių VP kainos nėra „pagrįstos". Šiame skyrelyje charakterizuojamos tos finansų rinkos, kuriose *nėra* arbitražo galimybių. Tokia finansų rinka bus vadinama *bearbitražė* (angl. arbitrage-free).

3.7 Lema. *Sakykime, kad (S, P) yra finansų rinka. S-finansavimosi strategijai ψ teiginiai (a), (b) ir (c) ekvivalentūs. Čia:*

(a) *ψ yra arbitražo galimybė;*

(b) *vertės procesui $V := V^{\psi,S}$ yra teisinga: $V(0) \le 0$, $V(T) \ge 0$ ir $EV(T) > 0$;*

(c) *diskontuotam vertės procesui $V^* := V^{\psi,S^*}$ yra teisinga: $V^*(0) \le 0$, $V^*(T) \ge 0$ ir $EV^*(T) > 0$.*

Įrodymas. Teiginiai $(a) \Leftrightarrow (b)$ kadangi su bet kuriuo atsitiktiniu dydžiu (ekvivalentumo klase) $\xi \ge 0$, $E\xi = 0$ tada ir tik tada, kai $\xi = 0$ remiantis Lebesgue integralo savybe. (Atskiru atveju, kai ateities neapibrėžtis nusakoma (3.8) tikimybine erdve, o arbitražo galimybės (3.7) sąlyga reiškia (3.9), tai ši išvada išplaukia iš to, kad

$$EV(T) = \sum_{\omega \in \Omega} V(T,\omega) P(\{\omega\})$$

ir $P(\{\omega\}) > 0$ su visais $\omega \in \Omega$.) Teiginiai $(b) \Leftrightarrow (c)$ kadangi $V^*(t) = V(t)/S_0(t)$ su visais $t \in D$.

Parodysime, kad sąžiningojo lošimo rinka yra bearbitražė. Priminsime, kad dabartiniame kontekste finansų rinka (S, P) yra sąžiningojo lošimo rinka, jei egzistuoja toks $\mu \in \mathbb{R}$, kad banko sąskaitos S_0 palūkanų normos $r_t \equiv \mu$ ir su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, d\}$, i-tojo VP grąžos pokytis

$$\Delta R_i(t) = \mu + \xi_{i,t} \qquad t \in \{1, \ldots, T\}$$

ir $\xi_i = \{\xi_{i,t}\colon\ t \in D\}$ $\mathbb{F}$-atžvilgiu yra martingalinių skirtumų seka. Tada (2.11) teigia, kad sąžiningojo lošimo rinkoje diskontuoti kainos procesai S_i^* yra $\mathbb{F}$-martingalai, t. y. su kiekvienu $t \in \{1, \dots, T\}$ ir $i \in \{1, \dots, d\}$

$$E\big[\Delta S_i^*(t)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] = E\big[S_i^*(t)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] - S_i^*(t-1) = 0. \tag{3.10}$$

Sakykime, kad ψ yra bet kuri S-finansavimosi strategija. Remiantis 3.4 Lema, ψ yra S^*-finansavimosi strategija. Prisiminę, kad VP kainos procesai yra $\mathbb{F}$-suderinti, bei pažymėję $V^* = V^{\psi,S^*}$ ir $G^* = G^{\psi,S^*}$, su bet kuriuo $t \in \{1, \dots, T\}$, gauname

$$\begin{aligned} E\big[V^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] &= V^*(0) + E[G^*|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= V^*(0) + \sum_{i=0}^{d}\left\{\sum_{s=1}^{t-1}\psi_i(s)\Delta S_i^*(s) + \psi_i(t)E\big[\Delta S_i^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big]\right\} \\ \text{pagal (3.10)} \qquad &= V^*(0) + G^*(t-1) = V^*(t-1), \end{aligned}$$

t. y. diskontuotas vertės procesas V^* yra $\mathbb{F}$-martingalas. Kadangi $V^*(0)$ yra $\mathcal{F}_0$-matus, o matas P yra trivialus σ-algebroje $\mathcal{F}_0$, tai P-beveik visada galioja lygybės

$$V^*(0) = E[V^*(0)] = E\big[E[V^*(T)|\mathcal{F}_0]\big] = EV^*(T).$$

Tai rodo, kad 3.7 Lemos (c) sąlyga negali būti išpildyta ir todėl sąžiningojo lošimo rinka (S, P) yra bearbitražė.

Rizikai neutralus matas. Toliau matysime, kad bearbitraže yra ne tik sąžiningojo lošimo rinka. Yra keletas savybių, charakterizuojančių bearbitražes rinkas. Viena iš jų yra diskontuotos kainos martingališkumo savybė, kurią taip pat anksčiau nustatėme sąžiningojo lošimo rinkoje (žr. (2.11)). Šią savybę suformuluosime bendresnėje formoje.

3.8 Apibrėžimas. Sakykime, kad (S, P) yra finansų rinka, t. y. kainų sistema S apibrėžta tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir suderinta su informaciniu srautu $\mathbb{F}$. Mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ apibrėžtas tikimybinis matas Q vadinamas *rizikai neutraliu matu* (angl. risk neutral measure), jei

(1) σ-algebroje $\mathcal{F}_0$ matas Q yra trivialus (plg. su (3.1)) ir

(2) su visais $i \in \{1, \dots, d\}$ diskontuotas kainos procesas S_i^* yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu mato Q, t. y. S_i^* yra $\mathbb{F}$-suderintas, $E_Q[|S_i^*(t)|] < \infty$ su visais $t \in D$ ir

$$S_i^*(s) = E_Q[S_i^*(t)\big|\mathcal{F}_s] \qquad \text{su visais } 0 \le s \le t \le T.$$

Taigi sąžiningojo lošimo rinkos (S, P) matas P yra rizikai neutralus. Mato pavadinimas „rizikai neutralus" atspindi tą aplinkybę, kad finansų rinkos (S, P) bet kurio VP laukiamosios grąžos norma šio mato atžvilgiu yra lygi banko sąskaitos palūkanų normai (plg. su (2.10) savybe sąžiningojo lošimo rinkoje). Iš tikrųjų, remiantis grąžos normos apibrėžimu ir tuo, kad banko sąskaitos kaina $S_0(t)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-mati, su kiekvienu $t \in \{1, \ldots, T\}$ ir $i \in \{1, \ldots, d\}$ teisinga

$$E_Q[r_i(t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{S_0(t)}{S_i(t-1)} E_Q\left[\frac{S_i(t)}{S_0(t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\right] - 1 = \frac{S_0(t)}{S_0(t-1)} - 1 = r_t.$$

Paskutinė lygybė išplaukia remiantis 3.1 Apibrėžimu. Ką tik matėme (žr. (3.10)), kad sąžiningojo lošimo rinkoje (S, P) diskontuotas kainos procesas yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu pradinio mato P, t. y. šis matas yra rizikai neutralus.

Toliau matysime, kad finansų rinka (S, P) yra bearbitražė tada ir tik tada, kai egzistuoja rizikai neutralus matas Q tam tikra prasme artimas matui P. Tiksliau, sakykime, kad tikimybiniai matai Q ir P apibrėžti mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$. Matai Q ir P vadinami *ekvivalenčiais*, jei su kiekvienu $A \in \mathcal{F}$, $Q(A) = 0$ tada ir tik tada, kai $P(A) = 0$. Taip yra tada ir tik tada, kai matas Q turi griežtai teigiamą tankį atžvilgiu mato P, paprastai žymimą dQ/dP. Jei tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžta sąryšiais (3.8), tai matas Q yra ekvivalentus P tada ir tik tada, kai $Q(\{\omega\}) > 0$ su visais $\omega \in \Omega$.

3.9 Lema. *Sakykime, kad (S, P) yra finansų rinka. Jei Q yra rizikai neutralus matas, o ψ yra S-finansavimosi strategija, tai diskontuotas vertės procesas V^{ψ,S^*} yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu Q.*

Įrodymas. Tegul Q yra rizikai neutralus matas, o ψ yra S-finansavimosi strategija. Taip pat tegul $V^* := V^{\psi,S^*}$, $G^* := G^{\psi,S^*}$ ir $t \in \{1, \ldots, T\}$. Remiantis 3.8 Apibrėžimu, nesunku pastebėti, kad $V^*(t)$ yra $\mathcal{F}_t$-matus ir $E_Q|V^*(t)| < \infty$. Kadangi $\psi(t)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus, tai

$$\begin{aligned} E_Q\big[V^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] &= V^*(0) + E_Q\big[G^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &= V^*(0) + \sum_{i=0}^{d} \left\{ \sum_{s=1}^{t-1} \psi_i(s)\Delta S_i^*(s) + \psi_i(t) E_Q\big[\Delta S_i^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] \right\} \\ &= V^*(0) + G^*(t-1) = V^*(t-1). \end{aligned}$$

Čia pirmoji ir paskutinė lygybės išplaukia iš to, kad ψ yra S^*-finansavimosi strategija remiantis 3.4 Lema. Todėl diskontuotas vertės procesas yra $\mathbb{F}$-martingalas, ką ir reikėjo įrodyti.

Dabar galima įrodyti pirmąją fundamentaliąją teoremą:

3.10 Teorema. *Finansų rinka (S, P) yra bearbitražė tada ir tik tada, kai mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ egzistuoja rizikai neutralus matas ekvivalentus matui P.*

Įrodymas. Tai, kad rinka yra bearbitražė jei egzistuoja rizikai neutralus matas ekvivalentus matui P, įrodysime prieštaravimo būdu. Tarkime, kad Q yra rizikai neutralus matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentus matui P, o S-finansavimosi strategija ψ yra arbitražo galimybė. Pastebėsime, kad arbitražo galimybė yra invariantinė klasėje visų matų, kurie yra ekvivalentūs matui P. Todėl arbitražo galimybės sąlyga (3.7) ekvivalenti tokiai sąlygai:

$$V^{\psi,S}(0) \leq 0, \qquad V^{\psi,S}(T) \geq 0 \quad Q\text{-b.v.} \quad \text{ir} \quad Q(\{V^{\psi,S}(T) > 0\}) > 0.$$

Remiantis 3.7 Lemos (a) ir (c) tvirtinimų ekvivalentumu matui Q, ψ yra tokia S-finansavimosi strategija, kad diskontuotam vertės procesui $V^* := V^{\psi,S^*}$ yra teisinga

$$V^*(0) \leq 0, \quad V^*(T) \geq 0 \quad Q\text{-b.v.} \quad \text{ir} \quad E_Q V^*(T) > 0.$$

Kadangi $V^*(0)$ yra atsitiktinis dydis matus atžvilgiu trivialios σ-algebros $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, remiantis 3.9 Lema, V^* yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu mato Q ir todėl

$$0 \geq V^*(0) = E_Q V^*(0) = E_Q\big[E_Q\big[V^*(T)|\mathcal{F}_0\big]\big] = E_Q V^*(T) > 0.$$

Šis prieštaravimas rodo, kad rinkoje nėra arbitražo galimybių.

Teoremos tvirtinimą priešinga linkme įrodysime tuo atveju, kai tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra (3.8) pavidalo[1]. Taigi tarkime, kad rinkoje nėra arbitražo galimybių. Sukonstruosime rizikai neutralų matą ekvivalentų matui P. Tegul Φ^d yra aibė visų rinkinių $\phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ sudarytų iš numatomų procesų $\phi_i = \{\phi_i(t)\colon\ t \in \{1, \ldots, T\}\}$ ir tegul

$$W := \{(\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_K))\colon \text{ egzistuoja toks } \phi \in \Phi^d\text{, kad } \xi = G(\phi, S^*)\} \subset \mathbb{R}^K;$$

čia $G(\phi, S^*) := \sum_{s=1}^T \sum_{i=1}^d \phi_i(s) \Delta S_i^*(s)$. Remdamiesi arbitražo negalimumu, parodysime, kad

$$W \cap \mathbb{R}_+^K = \{0\}. \tag{3.11}$$

Tegul $\phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_d\} \in \Phi^d$. Remiantis 3.5 Lema, egzistuoja toks numatomas procesas ψ_0, kad rinkinys $\psi := \{\psi_0, \phi_1, \ldots, \phi_d\}$ yra S-finansavimosi strategija ir šią strategiją atitinkanti pradinė diskontuoto portfelio vertė $V^{\psi,S^*}(0) = 0$. Kadangi $\Delta S_0^*(t) = 1 - 1 = 0$ su visais $t \in \mathcal{T}$, tai

$$G(\phi, S^*) = G^{\psi,S^*}(T) = V^{\psi,S^*}(T) - V^{\psi,S^*}(0) = V^{\psi,S^*}(T). \tag{3.12}$$

Čia antroji lygybė yra teisinga todėl, kad ψ taip pat yra S^*-finansavimosi strategija (žr. 3.4 Lemą). Kadangi rinkoje arbitražo galimybių nėra, tai remiantis 3.7 Lemos (a) ir (c) teiginių ekvivalentumu, $V^{\psi,S^*}(T) \notin \mathbb{R}_+^K \setminus \{0\}$. Dėl šios aplinkybės ir dėl (3.12) lygybių, $G(\phi, S^*) \notin \mathbb{R}_+^K \setminus \{0\}$. Kadangi $\phi \in \Phi^d$ yra laisvai pasirinktas ir rinkinys sudarytas iš nulių priklauso Φ^d, tai (3.11) yra teisinga.

Tegul S^K žymi simpleksą $\{(x_i) \in \mathbb{R}_+^K\colon\ \sum_i x_i = 1\}$. Trokštamam rizikai neutraliam matui surasti pasinaudosime galimumu atskirti aibes W ir S^K hiperplokštuma. Nesunku įsitikinti, kad W yra tiesinis $\mathbb{R}^K$ poerdvis, o S^K yra iškilas kompaktas erdvėje $\mathbb{R}^K$. Be to, remiantis (3.11), $W \cap S^K = \emptyset$. Todėl remiantis atskyrimo teorema, egzistuoja toks vektorius $q = (q_k) \in \mathbb{R}^K$, kad

$$\begin{cases} q \cdot y = 0 & \text{su visais } \ y \in W, \\ q \cdot x > 0 & \text{su visais } \ x \in S^K. \end{cases} \tag{3.13}$$

Kadangi standartinės bazės erdvėje $\mathbb{R}^K$ vektorius $e_k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in S^K$, tai remiantis (3.13) sąryšiu, skaliarinė sandauga šioje erdvėje $q_k = q \cdot \mathbf{e}_k > 0$ su visais k. Todėl visos q vektoriaus koordinatės q_k yra teigiamos. Su visais $k = 1, \ldots, K$, tegul

$$Q(\{\omega_k\}) := q_k/(q_1 + \cdots + q_K) > 0. \tag{3.14}$$

[1] pilnas teoremos įrodymas yra H. Föllmer ir A. Schied knygoje [4, Theorem 5.17]

Išlaikydami adityvumą pratęsiame Q apibrėžimą iki visos algebros $\mathcal{F}$ ir tokiu būdu gauname tikimybinį matą, apibrėžtą aibėje Ω. Liko parodyti, kad diskontuotas kainos procesas S_i^* yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu Q su visais $i = 1, \dots, d$.

Su kiekvienu numatomų procesų rinkiniu $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_d\} \in \Phi^d$, $G(\phi, S^*) \in W$ ir todėl

$$E_Q G(\phi, S^*) = \sum_{\omega \in \Omega} G(\phi(\cdot, \omega), S^*(\cdot, \omega)) Q(\{\omega\}) = \frac{q \cdot G(\phi, S^*)}{q_1 + \cdots + q_K} = 0, \tag{3.15}$$

remiantis (3.13) sąryšiu. Tegul $i \in \{1, \dots, d\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$, $A \in \mathcal{F}(t-1)$ ir

$$\psi_i(s) := \begin{cases} 0 & \text{jei } s \in \{1, \dots, T\} \setminus \{t\}, \\ 1_A & \text{jei } s = t. \end{cases}$$

Čia $1_A(\omega) = 1$ jei $\omega \in A$ ir $1_A(\omega) = 0$ jei $\omega \notin A$. Tada ψ_i yra numatoma, o rinkinys $\phi = \{0, \dots, \psi_i, \dots, 0\} \in \Phi^d$. Tada remiantis (3.15) lygybe nuliui gauname, kad

$$0 = E_Q G(\phi, S^*) = E_Q \left[\sum_{s=1}^{T} \psi_i(s) \Delta S_i^*(s) \right] = E_Q \left[\Big(S_i^*(t) - S_i^*(t-1) \Big) 1_A \right].$$

Dėka šios lygybės ir naudojantis žinoma sąlyginio vidurkio savybe gauname, kad lygybė

$$\int_A S_i^*(t-1)\, dQ = \int_A S_i^*(t)\, dQ = \int_A E_Q \Big[S_i^*(t) | \mathcal{F}_{t-1} \Big]\, dQ$$

yra teisinga bet kuriai aibei $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Iš čia išplaukia, kad

$$E_Q[S_i^*(t) | \mathcal{F}_{t-1}] = S_i^*(t-1).$$

Kadangi $t \in \{1, \dots, T\}$ yra laisvai pasirinktas, tai reiškia, kad diskontuotas kainų procesas S_i^* yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu Q ir tai yra teisinga su visais $i \in \{1, \dots, d\}$. Taigi Q yra rizikai neutralus matas ir jis yra ekvivalentus P dėl (3.14) sąvybės, ką ir reikėjo įrodyti.

Binominis modelis. Žinome, kad atžvilgiu tam tikro mato P binominis modelis yra sąžiningosios rinkos pavyzdys (žr. 2.1 Teiginį) ir todėl yra bearbitražės rinkos pavyzdys. Parodysime, kad binominio modelio rinka yra bearbitražė galiojant mato P atžvilgiu žymiai bendresnėms sąlygoms.

Priminsime, kad binominiu modeliu vadiname finansų rinką (S, P), sudarytą iš nerizikingo VP S_0, vadinamo banko sąskaita, ir rizikingo VP S_1, kurių kainos dinamika nusakoma lygybėmis

$$\begin{cases} S_0(t) = S_0(0)(1+\mu)^t \\ S_1(t) = S_1(0)(1+\mu+a)^{t-N_t}(1+\mu+b)^{N_t} \end{cases} \tag{3.16}$$

su visais $t \in \{1, \dots, T\}$. Čia μ, a, b yra tokie realieji skaičiai, kuriems $-1 < \mu + a < \mu + b$, $N_t = \sum_{s=1}^{t} \epsilon_s$ ir $\{\epsilon_t \colon t = 1, \dots, T\}$ yra tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžti atsitiktiniai dydžiai. Priminsime, kad

$$\Omega := \{-1, +1\}^T = \Big\{ \omega = (r_1, \dots, r_T) \colon\ r_t \in \{-1, +1\} \Big\},$$

$\mathcal{F}$ yra aibės Ω visų poaibių klasė, o P yra bet kuris tikimybinis matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, kuriam $P(\{\omega\}) > 0$ su visais $\omega \in \Omega$. Be to, atsitiktiniai dydžiai $\epsilon_t(\omega) = 0$, jei $r_t = -1$ ir $\epsilon_t(\omega) = 1$, jei $r_t = 1$. Tarkime, kad informacinį srautą $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\colon\ t \in D\}$ sudaro σ-algebros

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_1(0), \ldots, S_1(t)) = \sigma(S_1^*(0), \ldots, S_1^*(t))$$

su kiekvienu $t \in D = \{0, 1, \ldots, T\}$, t.y. minimalios σ-algebros atžvilgiu kurių yra matūs išvardinti atsitiktiniai dydžiai. Tada $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ir su kiekvienu $t \in \{1, \ldots, T\}$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t).$$

3.11 Teiginys. *Binominis modelis (S, P) yra bearbitražė finansų rinka tada ir tik tada, kai $a < 0 < b$. Matui P ekvivalentus rizikai neutralus matas Q yra nusakomas ta savybe, kad $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai atžvilgiu Q ir turi tą patį skirstinį*

$$Q(\{\epsilon_t = 0\}) = \frac{b}{b-a}.$$

Įrodymas. Remiantis pirmąja fundamentaliąja teorema, pakanka nustatyti sąlygas kada mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ egzistuoja rizikai neutralus matas Q ekvivalentus matui P. Toks matas Q charakterizuojamas savybėmis: $Q(\{\omega\}) > 0$ su visais $\omega \in \Omega$ ir (Q-beveik visada)

$$E_Q[S_1^*(t)|\mathcal{F}_{t-1}] = S_1^*(t-1)E_Q\left[\frac{(1+\mu+a)^{1-\epsilon_t}(1+\mu+b)^{\epsilon_t}}{1+\mu}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\right] = S_1^*(t-1)$$

su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$. Pastaroji lygybė galioja tada ir tik tada, kai

$$(1+\mu+a)Q(\{\epsilon_t = 0\}|\mathcal{F}_{t-1}) + (1+\mu+b)Q(\{\epsilon_t = 1\}|\mathcal{F}_{t-1}) = 1+\mu,$$

t. y. Q-beveik visiems $\omega \in \Omega$,

$$Q(\{\epsilon_t = 0\}|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \frac{b}{b-a} =: q.$$

su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$. Taigi Q yra rizikai neutralus matas tada ir tik tada, kai $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai atžvilgiu mato Q apibrėžto lygybėmis $Q(\epsilon_t = 0) = q$ su kiekvienu t. Be to, $Q(\{\omega\}) > 0$ tada ir tik tada, kai $a < 0 < b$.

Pastebėsime, kad gautasis binominio modelio rizikai neutralus matas Q nepriklauso nei nuo galimų ateities būsenų, nei nuo jų tikimybių.

3.3 Išvestiniai vertybiniai popieriai

Finansų rinkos pirminiais vertybiniais popieriais vadinami akcijos, obligacijos, iždo vekseliai ir panašiai. Būtent pirminiai VP ir sudaro iki šiol nagrinėtus finansų rinkos VP $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Be pirminių VP, realiose finansų rinkose prekiaujama ir tokiais VP, kurių ateities išmokos vienareikšmiškai priklauso (yra netiesinės funkcijos) nuo pirminių VP kainų sistemos $S_0, S_1, \ldots, S_d$

ir gal būt nuo kitų faktorių. Šie finansiniai instrumentai vadinami *išvestiniais VP* (angl. derivative securities) arba *finansinėmis išmokomis* (angl. contingent claims). Pagrindinė problema susijusi su išvestiniais VP yra jų įkainavimo mechanizmas, t. y. klausimas: kokia yra finansinio instrumento kaina šiandien nežinant jo išmokos dydžio ateityje?

Tokia finansinio instrumento kaina, jei ji egzistuoja, turėtų patenkinti ir pirkėją ir pardavėją. Dėl šios priežasties tokia kaina vadinama *sąžiningąja*. Sąžiningąja kaina bearbitražėje VP rinkoje vadinama bearbitražė kaina, t. y. tokia kaina, kuri nesukuria arbitražo. Tegul Q yra rizikai neutralus matas, kuris egzistuoja (ir gal būt ne vienintelis) remiantis pimąja fundamentaliąja teorema. Parodysime, kad bearbitražėje vieno periodo rinkoje (europietiškosios) finansinės išmokos C bearbitražė kaina, yra sąlyginis vidurkis

$$\pi(C) := E_Q\left[\frac{C}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_0\right] = E_Q\left[\frac{C}{1+r}\right]. \tag{3.17}$$

Pastebėsime, kad ši kaina priklauso nuo rizikai neutralaus mato Q.

Europietiškoji finansinė išmoka. Toliau nagrinėjamą finansinę išmoką galima apibudinti kaip kontraktą tarp dviejų rinkos veikėjų. Priklausomai nuo kontrakto tipo finansinės išmokos gali būti kelių rūšių. Jei kontraktas sudaromas laiko momentu $t = 0$, o įpareigojama išmoka atliekama (fiksuotu) ateities momentu $t = T$, tai toks finansinis instrumentas vadinamas europietiškąja finansine išmoka. Amerikietiškąja finansine išmoka vadinamas toks kontraktas, kuris sudaromas momentu $t = 0$, o įpareigojama išmoka atliekama tuo momentu $t \in \{1, \dots, T\}$, kurį nusistato kontrakto pirkėjas ateityje. Paminėsime pagrindinius europietiškojo tipo finansinių išmokų pavyzdžius.

Pasirenkamuoju sandoriu, arba PS, (angl. option) vadinamas kontraktas pagal kurį jo savininkas įgyja teisę, bet ne pareigą, ateityje pirkti arba parduoti VP iš kontrakto pardavėjo už iš anksto sutartą kainą, toliau žymimą K. PS pardavėjas už šio kontrakto kainą, vadinamą premija, įgyja pareigą išpildyti kontrakto įpareigojimą. Priklausomai nuo to ar VP perkamas ar parduodamas, PS vadinamas pirkimo PS (angl. call option) arba pardavimo PS (angl. put option). Pirkimo PS ateities išmoka yra

$$C^{call} = (S_i(T) - K)^+ = \begin{cases} S_i(T) - K & \text{jei } S_i(T) > K, \\ 0 & \text{jei } S_i(T) \le K. \end{cases}$$

Jei momentu $t = T$ pasirodo, kad $S_i(T) > K$, tai pirkimo PS savininkui yra pelninga pasinaudoti savo teise pirkti i-tąjį VP už mažesnę kainą K. Priešingu atveju, jei $S_i(T) \le K$, tai šia teise jis gali ir nesinaudoti. Pardavimo PS ateities išmoka yra

$$C^{put} = (K - S_i(T))^+ = \begin{cases} K - S_i(T) & \text{jei } S_i(T) < K, \\ 0 & \text{jei } S_i(T) \ge K. \end{cases}$$

Taigi, klausimas, kuriuo domėsimės yra PS premijos dydis, t. y. PS sąžiningoji kaina momentu $t = 0$.

Pastebėsime, kad pirkimo ir pardavimo PS išmokos yra susijusios sąryšiu

$$C^{call} - C^{put} = S_i(T) - K.$$

Jei rinka yra vieno periodo ir bearbitražė, tai šių PS bearbitražės kainos yra $\pi(C^{call})$ ir $\pi(C^{put})$ apibrėžtos (3.17) lygybe. Dėl pastarojo sąryšio, šios kainos yra susiję lygybe

$$\pi(C^{call}) - \pi(C^{put}) = E_Q\left[\frac{S_i(T) - K}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_0\right] = S_i(0) - K/(1+r).$$

Pastaroji lygybė yra teisinga todėl, kad diskontuota VP kaina yra martingalas atžvilgiu rizikai neutralaus mato Q, $S_0(0) = 1$ ir $S_0(T) = 1 + r$. Formulė

$$\pi(C^{call}) = \pi(C^{put}) + S_i(0) - K/(1+r)$$

vadinama pirkimo–pardavimo paritetu (angl. put–call parity). Naudojantis šia formule pakanka nustatyti vieną iš dviejų kainų, pavyzdžiui pirkimo PS kainą $\pi(C^{call})$.

Kitas finansinės išmokos pavyzdys. Momentu $t = 0$, du rinkos veikėjai nutaria, kad vienas iš jų ateities momentu $t = T$ parduos kitam rinkos veikėjui i-tąjį VP už iš anksto suderėtą kainą K. Tai yra kontraktas vadinamas *išankstiniu sandoriu* (angl. forward contract). Išankstinio sandoriaus savininkas pirks i-tąjį VP už sutartą kainą K, nepriklausomai nuo tikrosios to momento kainos. Šio kontrakto pasekoje išmoka yra

$$C^{is} = S_i(T) - K.$$

Išankstinio sandorio išmoka gali būti tiek neigiama tiek ir teigiama. Pastebėsime, kad ši išmoka yra lygi pirkimo ir pardavimo PS išmokų skirtumui.

Finansų rinkos modelyje toliau nagrinėjamos tokios finansinės išmokos, kurios yra neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Europietiškoji finansinė išmoka matematiškai apibrėžiama tokiu būdu:

3.12 Apibrėžimas. Europietiškąja *finansine išmoka* (angl. contingent claim) vadinamas atsitiktinis dydis $C = C(\omega)$ tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kuriam

$$0 \le C < \infty \qquad \text{P-beveik visada.}$$

Finansinė išmoka C vadinama *išvestine* nuo pirminių VP $S = (S_0, S_1, \dots, S_d)$, jei ji yra mati atžvilgiu šių VP generuotos σ-algebros $\sigma(S)$. Tokiu atveju egzistuoja tokia mati funkcija $f\colon \mathbb{R}^{d+1} \to [0, \infty)$, kad

$$C = f(S_0, S_1, \dots, S_d).$$

Europietiška finansinė išmoka interpretuojama kaip VP, kuris momentu $t = T$ kainuoja C. Momentas T vadinamas šios finansinės išmokos galiojimo pabaigos data (angl. maturity).

Įkainavimo mechanizmas. Toliau aptariamas finansinės išmokos įkainavimo mechanizmas grindžiamas prielaida, kad finansų rinka yra bearbitražė. Šios prielaidos išvada yra „vienos kainos" principas: *jei egzistuoja dvi skirtingos strategijos, kurių portfelių kainos ateities momentu $t = T$ yra vienodos, tai tų strategijų portfeliai momentu $t = 0$ privalo turėti tą pačią kainą.*

Šiuo principu grindžiamas toks įkainavimo mechanizmas. Parodoma, kad finansinė išmoka C yra perteklinė tarp visų rinkos VP ta prasme, kad egzistuoja tokia banko sąskaitos S_0 ir rizikingo VP S_1 pirkimo-pardavimo strategija ψ, kurios portfelis momentu $t = T$ kainuoja C, t. y. $V^{\psi,S}(T) = C$ kai $S = (S_0, S_1)$. Pačią finansinę išmoką C galima panaudoti sudarant antrąją strategiją, kurios portfelis sudarytas tik iš šio išvestinio VP, kurio vertė momentu $t = 0$ yra nežinomoji kontrakto kaina $\pi(C)$, o atitinkamo portfelio vertė momentu $t = T$ yra lygi išmokai C. Tada, remiantis minėtuoju principu, $\pi(C)$ turėtų būti lygi ψ strategijos portfelio vertei momentu $t = 0$, t. y. $V^{\psi,S}(0)$. Tokią finansinės išmokos kainą vadinsime bearbitražine kaina.

Šį įkainavimo mechanizmą iliustruosime vieno periodo $(T = 1)$ binominio modelio pavyzdžiu. Tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ elementariųjų įvykių aibė Ω sudaryta tik iš dviejų elementariųjų ivykių $\{-1, +1\}$. Binominio modelio finansų rinka (S, P) sudaryta iš vieno rizikingo VP S_1 ir banko sąskaitos S_0, kurių kainos dinamika nusakoma lygybėmis (3.16). Remiantis 3.11 Teiginiu, tokia finansų rinka yra bearbitražė tada ir tik tada, kai $a < 0 < b$. Tarkime, kad C yra finansinė išmoka. Rasime jos bearbitražinę kainą $\pi(C)$.

Tarkime, kad rizikingojo VP kaina momentu $t = 0$ yra 1. Tada, momentu $t = 1$, šio VP kaina yra

$$S_1(1, \omega) = \begin{cases} s_- := 1 + \mu + a & \text{jei } \omega = -1, \\ s_+ := 1 + \mu + b & \text{jei } \omega = +1. \end{cases}$$

Tarkime, kad banko sąskaitoje S_0 momentu $t = 0$ yra 1, o palūkanų norma yra $\mu > 0$ ir tai reiškia, kad momentu $t = 1$ sąskaitoje S_0 yra $1 + \mu$. Tarkime, kad finansinė išmoka $C = C(\omega)$ igyja reikšmes x_- ir x_+, priklausomai nuo dviejų galimų ateities būsenų $\omega \in \{-1, +1\}$. Pagaliau tarkime, kad portfelį sudaro ψ_1 rizikingojo VP vienetų ir ψ_0 banko sąskaitos vienetų. Realiuosius skaičius ψ_1 ir ψ_0 rasime iš sąlygos:

$$\psi_0 \begin{pmatrix} 1 + \mu \\ 1 + \mu \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} s_+ \\ s_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Ši sąlyga reiškia, kad portfelio $\psi(1) = \{\psi_0, \psi_1\}$ vertė $V^{\psi,S}(1)$ lygi išmokai C. Išsprendę (3.18) sistemą, gauname, kad

$$\psi_1 = \frac{x_+ - x_-}{s_+ - s_-} \qquad \text{ir} \qquad \psi_0 = \frac{s_+ x_- - s_- x_+}{(s_+ - s_-)(1 + \mu)}.$$

Kadangi $S_0(0) = S_1(0) = 1$, finansinės išmokos bearbitražinė kaina yra

$$\begin{aligned} \pi(C) &= \psi_1 + \psi_0 = \frac{x_+}{1 + \mu} \cdot \frac{1 + \mu - s_-}{s_+ - s_-} + \frac{x_-}{1 + \mu} \cdot \frac{s_+ - 1 - \mu}{s_+ - s_-} \\ &= \frac{x_+}{1 + \mu} \cdot (1 - q) + \frac{x_-}{1 + \mu} \cdot q, \qquad \text{su} \qquad q = \frac{b}{b - a}. \end{aligned}$$

Priminsime, kad $Q = \{q, 1 - q\}$ yra rizikai neutralus tikimybinis matas ekvivalentus matui P. Gautą finansinės išmokos C bearbitražę kainą galima užrašyti ir taip:

$$\pi(C) = E_Q\left[\frac{C}{1 + \mu}\right].$$

Atkartojama finansinė išmoka. Minėtame pavyzdyje bearbitražė kaina buvo rasta iš (3.18) sąlygos, reiškiančios, kad ieškomą strategiją atitinkančio portfelio vertė $V(1) = C$. Ši sąlyga yra esminė bearbitražės kainos sampratoje ir formalizuojama tokiu būdu:

3.13 Apibrėžimas. Sakykime, kad (S, P) yra VP rinka. Finansinė išmoka C vadinama *atkartojama* (arba replikuojama), jei egzistuoja finansavimosi strategija ψ, kurią atitinkančio portfelio vertė momentu $t = T$ yra $V^{\psi,S}(T) = C$, t. y. P-beveik visada

$$C = \psi(T)\cdot S(T)\bigg(= \psi(0)\cdot S(0) + \sum_{s=1}^{T} \psi(s)\cdot\Delta S(s)\bigg).$$

Tokia strategija ψ vadinama išmoką C *atkartojančia strategija*.

Finansinę išmoką C atitinkanti *diskontuota išmoka* yra

$$H := C/S_0(T).$$

Remiantis 3.4 lema, S-finansavimosi strategija yra ir S^*-finansavimosi strategija. Todėl finansinė išmoka C yra atkartojama tada ir tik tada, kai ją atitinkanti diskontuota išmoka H turi pavidalą

$$H = \psi(T)\cdot S^*(T) = V^{\psi,S^*}(T) = V^{\psi,S^*}(0) + \sum_{s=1}^{T} \psi(s)\cdot\Delta S^*(s)$$

su kuria nors finansavimosi strategija ψ. Tokia diskontuota išmoka H vadinama atkartojama, o ψ vadinama H atkartojančia strategija.

3.14 Teorema. *Sakykime, kad finansų rinkos (S, P) kainų sistema yra suderinta su informaciniu srautu $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\colon\ t \in D\}$ ir Q yra rizikai neutralus matas ekvivalentus matui P. Bet kuri atkartojama diskontuota išmoka H yra integruojama atžvilgiu mato Q, t. y. $E_Q[H] < \infty$. Be to, bet kurią, H atkartojančią strategiją ψ, atitinkančiam vertės procesui $V = V^{\psi,S^*}$ P-beveik visur teisinga*

$$0 \le V(t) = E_Q\big[H\big|\mathcal{F}_t\big] \tag{3.19}$$

su kiekvienu $t = 0, 1, \ldots, T$. Be kita ko, V yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu Q.

Įrodymas. Tarkime, kad ψ yra diskontuotą išmoką H atkartojanti S-finansavimosi strategija ir $V = V^{\psi,S^*}$ yra ją atitinkančio diskontuoto portfelio vertės procesas. Pirmiausia parodysime, kad

$$V(t) \ge 0 \qquad P\text{-beveik visada su visais } t. \tag{3.20}$$

Tai yra teisinga kai $t = T$ nes $V(T) = H \ge 0$. Kitiems t naudosimės mažėjančia indukcija. Tarkime, kad $t \in \{1, \ldots, T\}$ ir $V(t) \ge 0$ P-beveik visur. Parodysime, kad $V(t-1) \ge 0$ P-beveik visur. Kadangi ψ yra S^*-finansavimosi strategija,

$$V(t-1) = V(t) - \psi(t)\cdot\Delta S^*(t) \ge -\psi(t)\cdot[S^*(t) - S^*(t-1)].$$

Su bet kuriuo $c > 0$ ir $t \in D$, pažymėkime $\psi^c(t) := \psi(t)1_{\{|\psi(t)| \le c\}}$ (čia 1_A yra aibės $A \subset \Omega$ indikatorinė funkcija) ir tarkime, kad Q yra rizikai neutralus matas ekvivalentus P. Kadangi $\psi^c(t)$ yra aprėžtas, o $V(t-1)1_{\{|\psi(t)| \le c\}}$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus, tai

$$\begin{aligned} V(t-1)1_{\{|\psi(t)|\le c\}} &= E_Q\big[V(t-1)1_{\{|\psi(t)|\le c\}}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &\ge -E_Q\big[\psi^c(t)\cdot[S^*(t)-S^*(t-1)]\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &= -\psi^c(t)\cdot E_Q\big[S^*(t)-S^*(t-1)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] = 0 \end{aligned}$$

P-beveik visada, nes diskontuotas kainos procesas S_i^* yra $\mathbb{F}$-martingalas atžvilgiu Q su kiekvienu i. Šioje nelygybėje leisdami $c \uparrow \infty$ gauname $V(t-1) \ge 0$ kadangi $\{|\psi(t)| \le c\} \uparrow \Omega$. Indukcijos argumentas įrodo (3.20).

Toliau, P-beveik visur aibėje $\{|\psi(t)| \le c\}$, su kiekvienu t, turime

$$\begin{aligned} E_Q\big[V(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] - V(t-1) &= E_Q\big[V(t)-V(t-1)|\mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &= E_Q\big[\psi^c(t)\cdot[S^*(t)-S^*(t-1)]\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &= \psi^c(t)\cdot E_Q\big[S^*(t)-S^*(t-1)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big] = 0. \end{aligned}$$

Leisdami $c \uparrow \infty$, vėl gauname, kad $\{|\psi(t)| \le c\} \uparrow \Omega$. Todėl P-beveik visada

$$E_Q\big[V(t)|\mathcal{F}_{t-1}\big] = V(t-1)$$

ir tai teisinga su visais t. Kadangi $V(0)$ yra baigtinė konstanta ir naudojantis sąlyginio vidurkio savybe, gauname

$$\infty > V(0) = E_Q[V(0)] = E_Q[E_Q[V(1)|\mathcal{F}_0]] = E_Q[V(1)]$$

Indukcija pagal t ir tai, kad $V(t) \ge 0$, įrodo $V(t) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ir $E_Q[V(t)] = V(0)$ su visais t. Teoremos teiginys išplaukia iš to, kad $V(T) = H$.

Kadangi dešinė (3.19) lygybės pusė nepriklauso nuo ψ, tai visos H atkartojančios strategijos privalo turėti vieną ir tą patį vertės procesą $V = V^{\psi,S^*}$. Atveju $t = 1$ gauname, kad atkartojamai diskontuotai išmokai H galioja lygybė

$$V^{\psi,S^*}(0) = E_Q\big[H\big|\mathcal{F}_0\big]$$

su bet kuriuo rizikai neutraliu matu Q ekvivalenčiu matui P. Pritaikyta nediskontuotai finansinei išmokai C, gautoji teorema teigia, kad C atkartojančią strategiją atitinkančio nediskontuoto portfelio vertė

$$V^{\psi,S}(t) = \psi(t)\cdot S(t) = S_0(t)V^{\psi,S^*}(t) = S_0(t)E_Q\left[\frac{C}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

su kiekvienu $t = 0, 1, \dots, T$. Atskiru atveju, kai $S_0(0) = 1$, pradinė tokio portfelio vertė yra

$$\psi(0)\cdot S(0) = E_Q\left[\frac{C}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_0\right].$$

Bearbitražė kaina. Sakykime, kad diskontuotą išmoką H atkartojančios strategijos portfelis yra V. Tada kaina $\pi(H) := V(0)$ yra bearbitražė diskontuotos išmokos H kaina ta prasme, kad bet kuri kita kaina sukuria arbitražo galimybę. Iš tikro, tarkime, kad laiko momentu $t = 0$ diskontuotą išmoką H galima parduoti už kainą $\tilde{\pi} > \pi(H)$. Tada momentu $t = 0$, parduodant H ir perkant H atkartojantį portfelį V, be jokios rizikos gaunamas pelnas $\tilde{\pi} - V(0) > 0$. Momentu $t = T$, portfelio vertė $V(T)$ yra pakankama išpildyti kontraktu numatytą sąlygą, t. y. išmokėti $V(T) = H$.

Tiksliau bearbitražės kainos idėją galima suformuluoti taip:

3.15 Apibrėžimas. Sakykime, kad (S, P) yra VP rinka. Diskontuotos išmokos H *bearbitražė kaina* vadinamas realusis skaičius $\pi(H) \geq 0$, jei egzistuoja toks $\mathbb{F}$-suderintas stochastinis procesas X_{d+1}, kad

$$X_{d+1}(0) = \pi(H), \quad X_{d+1}(t) \geq 0, \quad \text{kai } t = 1, \dots, T-1 \text{ ir } \quad X_{d+1}(T) = H, \tag{3.21}$$

ir papildyta finansų rinka $(1, S_1^*, \dots, S_d^*, X_{d+1})$ yra bearbitražė.

Tokiu būdu, diskontuotos išmokos bearbitražė kaina yra tokia kaina, kuria prekiaujant momentu $t = 0$ VP rinkoje nėra sukuriama arbitražo galimybė. Tai reiškia, kad nei pirkėjui nei pardavėjui neegzistuoja finansavimosi strategija visiškai be rizikos sukurianti teigiamo pelno galimybę.

Pasirodo, kad bearbitražės kainos pavidalas gali turėti tik jau anksčiau nustatytą formą.

3.16 Teorema. *Sakykime, kad finansų rinkos (S, P) matui P ekvivalenčių ir rizikai neutralių matų aibė $\mathcal{P}(P)$ yra netuščia. Diskontuotos išmokos H bearbitražių kainų aibė*

$$\Pi(H) = \big\{ E_Q[H] \colon \; Q \in \mathcal{P}(P) \text{ ir } E_Q[H] < \infty \big\}. \tag{3.22}$$

Įrodymas. Tarkime, kad $\pi(H) \in \Pi(H)$, t. y. $\pi(H)$ yra bearbitražė H kaina. Tada papildyta rinka $(1, S_1^*, \dots, S_d^*, X_{d+1})$ yra bearbitražė. Remiantis 3.10 Teorema, egzistuoja toks matui P ekvivalentus matas Q, kad visi $d+1$ diskontuoti VP yra martingalai atžvilgiu Q. Iš čia išplaukia, kad X_{d+1} ir S_i^*, $i = 1, \dots, d$, yra martingalai atžvilgiu Q, t. y. $Q \in \mathcal{P}(P)$. Be to,

$$\pi(H) = X_{d+1}(0) = E_Q[X_{d+1}(T)] = E_Q[H] < \infty$$

remiantis 3.14 Teorema. Taigi (3.22) galioja su $\subset$ vietoje $=$.

Atvirkščiai, tarkime, kad $\pi(H) = E_Q[H]$ su kuriuo nors $Q \in \mathcal{P}(P)$. Apibrėžkime atsitiktinį procesą X_{d+1} lygybėmis $X_{d+1}(T) := H$ ir

$$X_{d+1}(t) := E_Q[H | \mathcal{F}_t]$$

su kiekvienu $t = 0, 1, \dots, T-1$. Taip apibrėžtam procesui X_{d+1} galioja (3.21). Be to, matas Q yra rizikai neutralus papildytai rinkai $(1, S_1^*, \dots, S_d^*, X_{d+1})$. Todėl $\pi(H) \in \Pi(H)$, t. y. (3.22) galioja su $\supset$ vietoje $=$.

Jei matu P ekvivalenčių ir rizikai neutralių matų aibė $\mathcal{P}(P)$ turi daugiau negu vieną elementą, tai gali atrodyti, kad diskontuota išmoga turi daugiau negu vieną bearbitražės kainos reikšmę. Tačiau taip nėra:

3.17 Išvada. *Bearbitražėje finansų rinkoje atkartojamos diskontuotos išmokos H bearbitražių kainų aibę $\Pi(H)$ sudaro vienintelis elementas $V(0)$; čia V yra H atkartojančios strategijos vertės procesas.*

Įrodymas. Tarkime, kad diskontuota išmoka H yra atkartojama ir V yra ją atkartojančios finansavimosi strategijos vertės procesas (nepriklausantis nuo strategijos). Remiantis 3.14 teorema, $V(0) = E_Q[H] < \infty$ su bet kuriuo rizikai neutraliu matu Q ekvivalenčiu matui P. Tai reiškia, kad bearbitražių kainų aibė (3.22) sudaryta iš vienintelio elemento.

3.4 Pilnoji finansų rinka

Šiame skyriuje charakterizuojama finansų rinka, kurioje visos finansinės išmokos yra atkartojamos.

3.18 Apibrėžimas. Finansų rinka (S, P) vadinama *pilnąja*, jei kiekviena finansinė išmoka yra atkartojama.

Su bet kuriuo finansų rinkos modeliu (S, P) ir matu $Q \in \mathcal{P}(P)$, galioja sąryšiai

$$\mathcal{V} := \{\phi(T)\cdot S(T) \colon \ \phi \ \text{numatomas}\} \subset L^1(\Omega, \sigma(S), Q) \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, Q) = L^0(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Jei rinka yra pilna, tai visi šie sąryšiai virsta lygybėmis. Kadangi aibė $\mathcal{V}$ yra baigtinio matavimo tai ir atsitiktinių dydžių erdvė privalo būti baigtinio matavimo. Bet tai reiškia, kad rinkos modelis priklauso tik nuo baigtinio skaičiaus ateities scenarijų. Tiksliau šį teiginį galima išreikšti naudojantis tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ atomo sąvoka. Būtent, aibė $A \in \mathcal{F}$ vadinama erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *atomu*, jei $P(A) > 0$ ir su kiekvienu $B \in \mathcal{F}$ iš to, kad $B \subset A$ išplaukia, kad arba $P(B) = 0$ arba $P(B) = P(A)$.

3.19 Teiginys. *Su bet kuriuo $p \in [0, \infty]$, erdvės $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dimensija*

$$\textit{dim} L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \sup\{n \in \mathbb{N} \colon \ \exists \ \textit{toks} \ \Omega \ \textit{skaidinys} \ \{A_i\}_{i=1}^n, \ \textit{kad} \ A_i \in \mathcal{F} \ \textit{ir} \ P(A_i) > 0\}. \tag{3.23}$$

Be to, $n :=$ dim $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) < \infty$ tada ir tik tada, kai egzistuoja Ω skaidinys sudarytas iš n erdvės $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ atomų.

Įrodymas. Tarkime, kad $\{A_i\}_{i=1}^n$ yra toks Ω skaidinys, kad $A_i \in \mathcal{F}$ ir $P(A_i) > 0$. Atitinkamos indikatorinės funkcijos $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ yra erdvės $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tiesiškai nepriklausomų funkcijų rinkinys. Todėl dim$L^p \geq n$. Priešingai nelygybei įrodyti pakanka tarti, kad (3.23) lygybės dešinioji pusė yra baigtinė ir lygi m. Jei $\{A_i\}_{i=1}^m$ yra atitinkamas Ω skaidinys, tai kiekviena aibė A_i yra $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ atomas nes priešingu atveju m nebūtų maksimalus. Todėl kiekvienas atsitiktinis dydis $X \in L^p$ yra P-beveik visur pastovus aibėje A_i, t. y. pažymėjus X reikšmę aibėje A_i x_i,

$$X = \sum_{i=1}^m x_i 1_{A_i} \qquad P\text{-beveik visur.}$$

Taigi $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_m}$ sudaro erdvės L^p bazę, t. y. dim$L^p = m$, ką ir reikėjo įrodyti.

Kita teorema charakterizuoja pilnas rinkas ir dažnai vadinama antrąja fundamentaliąja teorema.

3.20 Teorema. *Bearbitražė finansų rinka* (S, P) *yra pilna tada ir tik tada, kai egzistuoja vienintelis rizikai neutralus matas ekvivalentus matui* P*.*

Įrodymas. Tarkime, kad bearbitražė finansų rinka (S, P) yra pilna ir $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(P)$. Su bet kuria aibe $A \in \mathcal{F}$, diskontuota finansinė išmoka $H = 1_A$ yra atkartojama. Remiantis 3.17 išvada, $Q_1(A) = Q_2(A)$. Kadangi A yra bet kuris $\mathcal{F}$ elementas, tai $Q_1 = Q_2$. Taigi aibę $\mathcal{P}(P)$ sudaro vienintelis elementas.

Teoremos tvirtinimą priešinga linkme įrodysime tuo atveju, kai tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra (3.8) pavidalo[2]. Tarkime, kad bearbitražės finansų rinkos (S, P) aibė $\mathcal{P}(P) = \{Q\}$, o pati rinka nėra pilna. Parodysime, kad tada aibę $\mathcal{P}(P)$ privalo sudaryti daugiau negu vienas elementas. Erdvėje $\mathbb{R}^K$ apibrėšime skaliarinę sandaugą: su visais $x, y \in \mathbb{R}^K$

$$x{\cdot}y := \sum_{i=1}^{K} x_i y_i Q(\{\omega_i\}).$$

Pana6iai kaip ir pirmosios fundamentaliosios teoremos (3.10 teorema) įrodyme, tarkime, kad Φ^{d+1} yra aibė visų rinkinių $\phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ sudarytų iš numatomų procesų $\phi_i = \{\phi_i(t) \colon t \in \{1, \ldots, T\}\}$ ir tegul

$$W := \{(\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_K)) \colon \exists \text{ tokie } \phi \in \Phi^d \text{ ir } v_0 \in \mathbb{R}, \text{kad } \xi = v_0 + G(\phi, S^*)\} \subset \mathbb{R}^K;$$

čia $G(\phi, S^*) := \sum_{s=1}^{T} \sum_{i=0}^{d} \phi_i(s) \Delta S_i^*(s)$. Kadangi rinka nėra pilna, egzistuoja neatkartojamas finansinis ieškinys C, t. y. $x := (C(\omega_1), \ldots, C(\omega_K)) \notin W$. Kadangi W yra tiesinis $\mathbb{R}^K$ poerdvis, o $\{x\}$ yra kompakti ir iškila aibė nesikertanti su W, remiantis atskyrimo teorema, egzistuoja toks vektorius $u = \{u_i\} \in \mathbb{R}^K$, kad $u{\cdot}y = 0$ su visais $y \in W$ ir $u{\cdot}x > 0$. Dėl pastarosios nelygybės $u \neq 0$. Tarkime, kad su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, K\}$,

$$\tilde{Q}(\{\omega_i\}) := \Big(1 + \frac{u_i}{2 \max_j |u_j|}\Big) Q(\{\omega_i\})$$

Kadangi $u_i > -2 \max_j |u_j|$, tai $Q(\{\omega_i\}) > 0$ su visais i. Be to, kadangi $1 = 1 + G(0, S^*) \in W$, tai

$$\sum_{i=1}^{K} \tilde{Q}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{K} Q(\{\omega_i\}) + \sum_{i=1}^{K} \frac{u_i}{2 \max_j |u_j|} Q(\{\omega_i\}) = 1 + \frac{u{\cdot}1}{2 \max_j |u_j|} = 1.$$

Todėl $\tilde{Q}$ yra tikimybinis matas ekvivalentus matui P, nesutampantis su matu P. Be to, su kiekvienu $\phi \in \Phi^d$

$$E_{\tilde{Q}}\Big[\sum_{s=1}^{T} \phi(s){\cdot}\Delta S^*(s)\Big] = E_Q\Big[\sum_{s=1}^{T} \phi(s){\cdot}\Delta S^*(s)\Big] + \frac{u{\cdot}G(\phi, S^*)}{2 \max_j |u_j|} = 0,$$

nes Q yra rizikai neutralus matas ir $\{G(\phi, S^*)(\omega_i)\} \in W$. Tai yra lygybė, analogiška (3.15), leidžianti tokiu pat b¯udu parodyti, kad diskontuotas kainos procesasS^* yra martingalas atžvilgiu $\tilde{Q}$. Taigi $\tilde{Q}, Q \in \mathcal{P}(P)$ – prieštaravimas, įrodantis rinkos pilnumą.

[2]pilnas teoremos įrodymas yra H. Föllmer ir A. Schied knygoje [4, Theorem 5.39]

Klausimai ir pratimai.

1. Esant baigtinei tikimybinei erdvei (3.8), įrodyti, kad (3.9) arbitražo galimybė yra ekvivalenti tam, kad egzistuoja tokia S-finansavimosi strategija ϕ, kuriai $V^{\phi,S}(0) < 0$ ir $V^{\phi,S}(T) = 0$.

2. Esant baigtinei tikimybinei erdvei (3.8), tikimybinis matas Q ant $(\Omega, \mathcal{F})$ yra ekvivalentus P tada ir tik tada, kai $Q(\{\omega\}) > 0$ su visais $\omega \in \Omega$.

Skyrius 4

Arbitražo teorija: tolydaus laiko modelis

4.1 Tolydaus laiko finansų rinka

Black'o-Scholes'o rinkos modelis. Sakykime, kad finansų rinka sudaryta iš dviejų VP, pažymėtų indeksais $i \in \{0, 1\}$. Pirmasis VP yra nerizikingas ir jo kainos $S_0 = \{S_0(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ dinamika

$$S_0(t) = \exp\{rt\}, \qquad r > 0. \tag{4.1}$$

atitinka tolydžiąsias sudėtines palūkanas su grąžos norma r (žr. (2.24)). Antrasis VP yra rizikingas ir jo kaina $S_1 = \{S_1(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ yra geometrinis Wiener'io procesas, t. y.

$$S_1(t) = \exp\{\mu t + \sigma W(t) - (\sigma^2/2)t\} \qquad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{ir} \quad \sigma > 0; \tag{4.2}$$

čia, Wiener'io procesas $W = \{W(t)\colon\ t \ge 0\}$ apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tarkime, kad $S = (S_0, S_1)$. Taip apibrėžtą finansų rinką (S, P) vadinsime *Black'o–Scholes'o rinkos modeliu*, arba trumpiau *BS rinkos modeliu*.

Tolimesnis tikslas - pasirenkamojo sandorio sąžiningosios kainos nustatymas BS rinkos modelyje. Panašiai kaip ir diskretaus laiko modelyje parodoma, kad ši rinka yra bearbitražė ir kad pasirenkamasis sandoris yra atkartojamas. Tuo atveju sąžiningoji kaina yra sandorį atkartojančio portfelio šiandieninė kaina.

Rizikai neutralus matas. Tai, kad BS rinkos modelyje nėra arbitražo bus parodyta naudojantis rizikai neutraliu matu ekvivalenčiu matui P. Tokį matą sukonstruosime toliau.

Kaip ir diskretaus laiko modelyje, matas Q apibrėžtas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ vadinamas *rizikai neutraliu*, jei finansų rinkos visi diskontuoti kainos procesai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, yra martingalai atžvilgiu informacinio srauto $\mathbb{F}$ (žr. A.3 apibrėžimą).

4.1 Teorema. *BS rinkos modelyje (S, P) egzistuoja rizikai neutralus matas Q ekvivalentus matui P.*

Įrodymas. Su kiekviena aibe $A \in \mathcal{F}_T$, tegul $Q(A) := E_P\big[1_A L(T)\big]$; čia

$$L(t) := \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma} W(t) - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t/2\right\}, \qquad t \in [0, T].$$

Naudojantis tuo, kad $W(t) = \sqrt{t}W(1)$, $t > 0$, skirstinių prasme, galima parodyti, kad Q yra tikimybinis matas aibėje $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Kadangi funkcija $L(T, \cdot) \geq c > 0$, Q yra ekvivalentus matui P.

Parodysime, kad diskontuotas kainos procesas $S_1^*(t) = e^{-rt}S_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, yra martingalas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$. Naudosimės Itô formule du kartus. Pirma, tegul $F(u) = e^u$, $u \in \mathbb{R}$ ir h yra glodi funkcija. Tada

$$\int_0^t h(s)\, de^{\sigma W(s)} = \int_0^t h(s)F'(\sigma W(s))\, d\sigma W(s) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t h(s)F''(\sigma W(s))ds,$$

su kiekvienu $0 \leq t \leq T$, kadangi kvadratinė variacija $[W](s) = s$. Antra, remiantis Itô formule funkcijai $\phi(u, v) = uv$ ir pažymėję $q := \mu - r - \sigma^2/2$

$$S_1^*(t) = \phi(e^{qt}, e^{\sigma W(t)}) = 1 + \int_0^t S_1^*(s)q\, ds + \int_0^t e^{qs}\, de^{\sigma W(s)} = 1 + \int_0^t S_1^*(s)\sigma\, dW^*(s),$$

su kiekvienu $t \in [0, T]$, čia

$$W^*(t) := \frac{\mu - r}{\sigma}t + W(t), \qquad t \in [0, T].$$

Remiantis Girsanov'o teorema A.4, atsitiktinis procesas $W^* = \{W^*(t)\colon\ 0 \leq t \leq T\}$, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, yra Wiener'io procesas ir todėl martingalas. Kadangi integralas atžvilgiu martingalo yra martingalas, gauname

$$E_Q\big[S_1^*(t)\big|\mathcal{F}_{t'}\big] = 1 + E_Q\left[\int_0^t S_1^*(s)\sigma\, dW^*(s)\Big|\mathcal{F}_{t'}\right] = S_1^*(t')$$

su kiekvienu $0 \leq t' < t \leq T$. Diskontuotas nerizikingas VP yra tapatingai lygus vienetui ir todėl yra martingalas bet kurioje tikimybinėje erdvėje. Gavome, kad Q yra rizikai neutralus matas BS rinkos modelyje.

Strategijos. Nagrinėkime BS rinkos modelį (S, P), čia $S = (S_0, S_1)$ yra kainos procesai apibrėžti (4.1) ir (4.2) lygybėmis. Kaip ir anksčiau diskontuoti kainos procesai sudaro porą $S^* = (1, S_1^*)$ ir $S_1^*(t) = e^{-rt}S_1(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Pora atsitiktinių procesų $\psi = \{\psi_0, \psi_1\}$, $\psi_i = \{\psi_i(t)\colon\ 0 \leq t \leq T\}$ vadinama strategija, jei egzistuoja integralai:

$$\int_0^T \psi_i(s)\, dS_i(s) \equiv \int_0^T \psi_i\, dS_i, \qquad i = 1, 2,$$

o tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ apibrėžtas atsitiktinis procesas

$$\left\{\int_0^t \psi_1 dS_1^*\colon\ t \in [0, T]\right\} \tag{4.3}$$

yra martingalas atžvilgiu informacinio srauto $\mathbb{F}$. Tradicinėje tolydaus laiko finansų matematikoje minėtieji integralai paprastai suprantami *Itô stochastinio integralo prasme* ir todėl atsitiktiniams procesams ψ_i privalo galioti atitinkamos čia neminimos sąlygos. Šie integralai galėtų b ūti apibrėžiami ir netradicine "d_λ" prasme, kiekvienai proceso trajektorijai.

Kaip ir anksčiau, atsitiktinio proceso ψ_i reikšmė $\psi_i(t)$, $t \in [0,T]$, išreiškia i-tojo VP kiekį momentu t laikomo portfelyje $\psi = (\psi_0, \psi_1)$. Todėl strategijos ψ portfelio vertė momentu t yra

$$V^{\psi,S}(t) := \psi_0(t)S_0(t) + \psi_1(t)S_1(t)$$

su kiekvienu $t \in [0,T]$.

Strategija ψ vadinama *S-finansavimosi strategija* jei su kiekvienu $t \in [0,T]$

$$V^{\psi,S}(t) = V^{\psi,S}(0) + \int_0^t \psi_0\, dS_0 + \int_0^t \psi_1\, dS_1.$$

Kaip ir diskretaus laiko modelyje galioja teiginys:

4.2 Teiginys. *Sakykime, kad (S,P) yra BS rinkos modelis. Strategija ψ yra S-finansavimosi strategija tada ir tik tada, kai ji yra S^*-finansavimosi strategija, t. y.*

$$V^{\psi,S^*}(t) = V^{\psi,S^*}(0) + \int_0^t \psi_1\, dS_1^*. \tag{4.4}$$

su kiekvienu $t \in [0,T]$.

Teiginio įrodymas remiasi Itô formulės taikymu ir yra praleidžiamas.

4.2 Finansinės išmokos įkainavimas

Arbitražas.

4.3 Apibrėžimas. Sakykime, kad (S,P) yra BS rinkos modelis. *Arbitražo galimybe* arba tiesiog *arbitražu* vadinama tokia S-finansavimosi strategija ψ, kad atitinkamam portfelio vertės procesui $V^{\psi,S} = \{V^{\psi,S}(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ teisinga:

$$V^{\psi,S}(0) \le 0, \qquad V^{\psi,S}(T) \ge 0 \quad P\text{-b.v.} \quad \text{ir} \quad P(\{V^{\psi,S}(T) > 0\}) > 0.$$

Kaip ir diskretaus laiko modelio atveju (žr. 3.7 lemą) arbitažo galimybė ekvivalenti tam, kad diskontuotam vertės procesui $V^* := V^{\psi,S^*}$ yra teisinga:

$$V^*(0) \le 0, \quad V^*(T) \ge 0 \quad \text{ir} \quad EV^*(T) > 0. \tag{4.5}$$

BS rinka (S,P) yra bearbitražė kadangi egzistuoja ekvivalentus rizikai neutralus matas. Iš tikrųjų, tarkime, kad $\psi = \{\psi_0, \psi_1\}$ yra S-finansavimosi strategija. Remiantis 4.2 teiginiu, ψ yra S^*-finansavimosi strategija. Tegul Q yra 4.1 teoremoje sukonstruotas rizikai neutralus matas, ekvivalentus matui P. Tada remiantis (4.4) ir (4.3), turime

$$E_Q\big[V^{\psi,S^*}(T)\big] = V^{\psi,S^*}(0) + E_Q\left[E_Q\left[\int_0^T \psi_1\, dS_1^* \Big| \mathcal{F}_0)\right]\right] = V^{\psi,S^*}(0).$$

Kadangi tai prieštarauja (4.5), arbitražas nėra galimas.

Bearbitražė kaina. *Finansine išmoka* vadinsime bet kurį neneigiamą ir $\mathcal{F}_T$-matų atsitiktinį dydį C. Finansinė išmoka C yra *atkartojama*, jei egzistuoja tokia finansavimosi strategija ψ, kad ją atitinkančio portfelio kaina momentu $t = T$ yra $V^{\psi,S}(T) = C$ P-beveik visada.

4.4 Apibrėžimas. Sakykime, kad C yra atkartojama finansinė išmoka. Jei C atkartojančio portfelio pradinė vertė $V^{\psi,S}(0)$ nepriklauso nuo finansavimosi strategijos ψ, tai tokios išmokos kainą $V^{\psi,S}(0)$ vadinsime *bearbitraže*.

4.5 Teiginys. *BS rinkoje kiekviena atkartojama finansinė išmoka turi bearbitražę kainą.*

Įrodymas. Sakykime, kad C yra atkartojama finansinė išmoka, o ψ ir ϕ yra dvi ją atkartojančios finansavimosi strategijos, t. y. $V^{\psi,S}(T) = V^{\phi,S}(T) = C$. Parodysime, kad $V^{\psi,S}(0) = V^{\phi,S}(0)$. Tarkime priešingai $V^{\psi,S}(0) > V^{\phi,S}(0)$. Arbitražą sukonstruosime neformaliai tokiu būdu: laiko momentu $t = 0$ pirksime portfelį ϕ, parduosime portfelį ψ, o gautą skirtumą investuosime į nerizikingą VP S_0; po to, laiko momentu $t = T$ parduosime portfelį ϕ, pirksime portfelį ψ ir tokiu būdu gausime garantuotą pelną$V^{\psi,S}(0) - V^{\phi,S}(0) > 0$.

Formaliai arbitražą reikėtų konstruoti rūpinantis strategijos finansavimosi sąlyga. Tarkime, kad su kiekvienu $t \in [0, T]$ ir su kiekvienu $i = 0, 1$,

$$\theta_i(t) := \phi_i(t) - \psi_i(t), \quad \text{ir} \quad \theta := \phi - \psi = \{\theta_0, \theta_1\}.$$

Tarkime, kad $\gamma_0 = \{\gamma_0(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ yra tiesinės nehomogeninės integralinės lygties

$$\gamma_0(t)S_0(t) + \theta_1(t)S_1(t) = \int_0^t \gamma_0\, dS_0 + \int_0^t \theta_1\, dS_1, \quad 0 \le t \le T,$$

vienintelis sprendinys. Šeima $\gamma := \{\gamma_0, \theta_1\}$ yra tokia S-finansavimosi strategija, kurios portfelio pradinė vertė yra

$$V^{\gamma}(0) = \gamma_0(0)S_0(0) + \theta_1(0)S_1(0) = 0.$$

Tada $\gamma - \theta = \{\gamma_0 - \theta_0, 0\}$ taip pat S-finansavimosi strategija, ją atitinkančio portfelio pradinė vertė

$$V^{\gamma-\theta}(0) = -V^{\theta}(0) = V^{\psi}(0) - V^{\phi}(0) > 0.$$

Rasime šio portfelio vertę momentu $t = T$:

$$V^{\gamma-\theta}(T) = (\gamma_0 - \theta_0)(T)S_0(T) = V^{\gamma-\theta}(0) + \int_0^T (\gamma_0 - \theta_0)\, dS_0.$$

Išsprendę šią tiesinę integralinę lygtį gauname, kad $V^{\gamma-\theta}(T) = V^{\gamma-\theta}(0)e^{rT} > V^{\gamma-\theta}(0) > 0$, t. y. $\gamma - \theta$ yra arbitražo strategija - prieštaravimas, įrodantis teiginį.

4.3 Black'o–Scholes'o formulė

Nagrinėkime pirkimo pasirenkamąjį sandorį (angl. call option) BS rinkos modelyje. Kaip ir diskretaus laiko atveju, šis sandoris suteikia teisę pirkti vertybinį popierių S_1 laiko mometu

$t = T$ už iš anksto sutartą įvykdymo kainą K. Tai reiškia, kad sandorio išmoka laiko momentu $t = T$ yra

$$C(\omega) := [S_1(T,\omega) - K]^+ := \max\{S_1(T,\omega) - K, 0\}, \qquad \omega \in \Omega. \tag{4.6}$$

Klausimas: kokia yra šio sandorio *sąžiningoji kaina* (angl. fair price) pradiniu momentu $t = 0$, kai jo išmoka C yra nežinoma? Pažymėkime šią kainą $\pi(C)$.

Iki 1973 metų, kada pasirodė fundamentalūs Black ir Scholes [3] ir Merton [9] straipsniai, visuotinai priimtino atsakymo į šį klausimą nebuvo. Klasikiniu aktuarijų požiūriu, natūralus atsakymas į šį klausimą, kuris galėjo būti žinomas dar Chr. Huygens'o (1657) ir J. Bernoulli (1713) laikais, yra toks: sąžininga kaina yra atsitiktinio dydžio C vidurkis tikimybinio mato P atžvilgiu, tai yra

$$\pi(C) = E_P[C] = \int_\Omega C\, dP.$$

Jei šis atsakymas patenkina, tai belieka viena „smulkmena" – pasirinkti rizikingojo VP S_1 tikimybinį skirstinį. Jau minėjome, kad 1900 metais L. Bachelier pasiūlė akcijos kainą S_1 modeliuoti tuo, kas dabar vadinama Wiener'io procesu ir tokiu būdu žengė didelį žingsnį į priekį jau ilgus amžius trunkančioje sąžiningosios sandorio kainos paieškoje. Po penkių metų, visiškai nežinodamas apie L. Bachelier darbą, A. Einstein'as sugalvojo iš esmės tą pačią matematinę konstrukciją, kurios pagalba jis sugebėjo įvertinti dalelės judėjimo tam tikra trajektorija tikimybę. Šis Einstein'o darbas buvo paminėtas kartu su jo sukurtomis reliatyvumo ir kvantine teorijomis, suteikiant jam Nobelio fizikos premiją. Deja, Bachelier negavo aukščiausio įvertinimo netgi už savo disertaciją.

Moderniosios finansų rinkos teorijos požiūriu, standartinis akcijos kainos S_1 pasirinkimas yra geometrinis Wiener'io procesas (2.31), t. y.

$$S_1(t) = \exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}, \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

Įstatę šią $S_1(T)$ išraišką į C ir suskaičiavę vidurkį $E_P[C]$, gautume Huygens'o–Bernoulli kainą. Tačiau Black ir Scholes 1973 metais pasiūlė visiškai kitokį atsakymą į klausimą apie sąžiningąją kainą. Išmokos C sąžiningoji kaina yra bearbitražė ir

$$\pi(C) = \Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T}); \tag{4.8}$$

čia Φ yra standartinis normalus skirstinys, t. y. su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du, \quad \text{o} \quad d = \frac{\ln(1/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Vėliau buvo įrodyta, kad (4.8) kainą galima išreikšti ir kitaip. Būtent sąžiningoji kaina yra diskontuotos išmokos sąlyginis vidurkis atžvilgiu rizikai neutralaus mato Q, t.y.

$$\pi(C) = E_Q[C/S_0(T)] = E_Q[C\, e^{-rT}],$$

kaip ir diskretaus laiko modelyje.

Kodėl reikėtų tikėti, kad (4.8) kaina yra sąžiningesnė nei Huygens'o–Bernoulli kaina? Tam yra dvi priežastys. Pirma, bet kuri kaina BS rinkoje, besiskirianti nuo Black'o–Scholes'o kainos, sukuria arbitražo galimybę arba sandorio pirkėjui, arba pardavėjui. Be to, Black ir Scholes sukonstruoja finansavimosi strategiją, leidžiančią sandorio pardavėjui bet kuriuo atveju sukaupti būtiną sandorio išmokai pinigų sumą be papildomų tam išlaidų. Pastaroji aplinkybė taip pat mažina riziką, susijusią su sandorio kaina. Apsauga nuo tokios rizikos vadinama *hedžingu* ir yra antroji priežastis dėl ko Black'o–Scholes'o kaina yra sąžiningesnė, nei Huygens'o–Bernoulli kaina.

Black'o–Scholes'o formulė. Sąžiningoji pirkimo pasirenkamojo sandorio kaina (4.8) vadinama *Black'o–Scholes'o formule*. Kaip ir anksčiau tarkime, kad be rizikingo vertybinio popieriaus S_1 nusakyto geometriniu Wiener'io procesu (4.7), rinkoje yra ir nerizikingas vertybinis popierius S_0, kurio kaina nusakoma tolydžiųjų palūkanų norma $r > 0$, t. y. $S_0(t) = e^{rt}$, $0 \le t \le T$. Tokiu būdu $S = (S_0, S_1)$ ir tikimybinis matas P, atžvilgiu kurio W yra Wiener'io procesas, sudaro BS rinkos modelį (S, P). Galime tarti, jog pirkimo pasirenkamasis sandorius yra trečias vertybinis popierius, kurio kainai V galioja sąlyga $V(T) = C$ (sandorio išmoka (4.6)). Įrodysime, kad egzistuoja tokia S-finansavimosi strategija $\phi = (\alpha, \beta)$, kad

$$\alpha(t)S_0(t) + \beta(t)S_1(t) = V(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.9}$$

Tuomet ϕ strategiją atitinkančio portfelio vertė $V^{\phi,S} = V$, pirkimo pasirenkamojo sandorio išmoka C yra atkartojama ir todėl jos bearbitražė kaina yra $V^{\phi,S}(0) = V(0)$.

Pradedant $\phi = (\alpha, \beta)$ strategijos egzistavimo įrodymą, tarkime, kad egzistuoja tokia tolydžioji funkcija $h = h(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$, kuri yra glodi aibėje $[0, T) \times (0, \infty)$ ir

$$V(t) = h(t, S_1(t)) \qquad \text{su visais} \quad 0 \le t \le T \tag{4.10}$$

(toliau matysime, kad tokia funkcija iš tikrųjų egzistuoja). Jei funkcija $F = F(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ yra glodi, o tolydžioji funkcija $f = f(t)$, $t \in [0, T]$ turi kvadratinę λ-variaciją $[f]_\lambda$, apibrėžtą (A.7) sąlyga, tai teisinga Itô formulė

$$F(t, f(t)) = F(0, f(0)) + \int_0^t F_t(s, f(s))\, ds + \int_0^t F_x(\cdot, f)\, d_\lambda f + \frac{1}{2}\int_0^t F_{xx}(\cdot, f)\, d[f]_\lambda$$

su kiekvienu $t \in [0, T]$, čia F_t, F_x, F_{xx} žymi dalines išvestines pagal nurodytus kintamuosius. Kadangi iš (2.28) su $S = S_1$ ir $R(t) = \mu t + \sigma W(t)$ išplaukia $[S_1]_\lambda(t) = \int_0^t \sigma^2 S_1(s)^2\, ds$ ir S_1 yra (2.29) integralinės lygties sprendinys, tai pasinaudoję Itô formule ir sąryšiu $\int g_1\, d(\int g_2\, dg_3) = \int g_1 g_2\, dg_3$, gauname lygybę

$$V(t) = V(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t \sigma h_x(s, S_1(s))S_1(s)\, d_\lambda W(s) \tag{4.11}$$

su kiekvienu $0 \le t < T$; čia

$$A(t) := h_t(t, S_1(t)) + \mu h_x(t, S_1(t))S_1(t) + \frac{\sigma^2}{2} h_{xx}(t, S_1(t))S_1(t)^2.$$

Tam, kad $\phi = (\alpha, \beta)$ strategija būtų S-finansavimosi, reikalinga šią savybę nusakanti sąlyga

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0) + \int_0^t \alpha\, dS_0 + \int_0^t \beta\, d_\lambda S_1 \\ &= V(0) + \int_0^t \Big[r\alpha(s)S_0(s) + \mu\beta(s)S_1(s)\Big]\, ds + \int_0^t \sigma\beta S_1\, d_\lambda W, \end{aligned} \tag{4.12}$$

kadangi S_1 yra (2.29) integralinės lygties sprendinys. Strategiją $\phi = (\alpha, \beta)$ apibrėžkime tokiu būdu: $\beta(T) := 0$ ir

$$\begin{cases} \beta(t) := h_x(t, S_1(t)), & \text{jei } t \in [0, T), \\ \alpha(t) := [h(t, S_1(t)) - \beta(t)S_1(t)]/S_0(t), & \text{jei } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Tuomet, sulyginę gautas $V(t)$ išraiškas (4.12) ir (4.11), kai $t \in [0, T)$, matome, kad funkcija h privalo tenkinti lygtį dalinėmis išvestinėmis:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 & \text{ant } [0, T) \times (0, +\infty), \\ u(T, x) = \max\{0, x - K\} & \text{visiems } x \in (0, +\infty), \\ u(t, 0) = 0 & \text{visiems } t \in [0, T], \end{cases}$$

čia Lu yra funkcija su reikšmėmis

$$Lu(t, x) := \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - ru(t, x).$$

Nesunku patikrinti, kad ši lygtis turi (vienintelį) sprendinį:

$$h(t, x) := \begin{cases} x\Phi(d_1(t, x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, x)), & \text{jei } (t, x) \in [0, T) \times (0, +\infty), \\ \max\{0, x - K\}, & \text{jei } (t, x) \in \{T\} \times (0, +\infty), \\ 0, & \text{jei } (t, x) \in [0, T] \times \{0\}, \end{cases}$$

kai

$$d_1(t, x) := \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad \text{ir} \quad d_2(t, x) = d_1(t, x) - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Tai reiškia, jog egzistuoja tokia funkcija h, kuriai galioja (4.10) ir tuo pačiu Black'o–Scholes'o (4.8) formulė įrodyta, kadangi $\pi(C) = V(0) = h(0, S_1(0))$.

Pateiktojo įrodymo esmė yra (4.9) lygybę tenkinančios finansavimosi strategijos (α, β) egzistavimo įrodymas. Tokia strategija vadinama *dinamiškuoju sandorio atkartojimu*. Šį įrodymo metodą pasiūlė R. C. Merton [**?**]. Jis skiriasi nuo originalaus Black'o ir Scholes'o įrodymo. Jo autoriai konstravo tokią finansavimosi strategiją $(1, -\delta)$, kurią atitinkantis portfelis $S_1 - \delta C$ būtų nerizikingas. Kitaip tariant, jie konstravo dinamiškąjį *obligacijos* atkartojimą.

Verta priminti, jog aukščiau pateiktas Black'o–Scholes'o–Merton'o formulės įrodymas galioja esant išpildytoms šioms sąlygoms:

- rizikingos akcijos kaina S_1 yra nusakoma specialaus pavidalo atsitiktiniu procesu (4.7), be to, tariama, kad kintamumas σ yra žinomas ir pastovus visą laikotarpį $[0, T]$;

- nerizikingo vertybinio popieriaus S_0 palūkanų norma r yra žinoma ir pastovi visą laikotarpį $[0, T]$;
- akcija S_1 nemoka dividendų, o transakcijos yra nemokamos;
- galima laisvai skolintis arba skolinti bet kurį akcijos S_1 kiekį.

Kas atsitiks, jei bent viena iš šių sąlygų nėra išpildyta? Pavyzdžiui, jei kiekvienos transakcijos kaina yra teigiama, tai, kadangi akcijos kaina S_1 ir tuo pačiu strategija (α, β) kinta be galo dažnai, atrodytų, kad tokio hedžingo reali kaina turėtų būti begalinė. Šis ir kiti panašūs klausimai stimuliavo aktyvią veiklą, ieškant Black'o–Scholes'o formulės mažiau suvaržytų apibendrinimų.

Vienu tokios veiklos rezultatu tapo mūsų nagrinėjama arbitražo teorija. Remiantis šia teorija sandorio įkainojimas grindžiamas „realaus pasaulio" tikimybinio mato P keitimu jam ekvivalenčiu ir rizikai neutraliu tikimybiniu matu Q. Tada sąžiningoji kaina

$$\pi(C) = E_Q\left[\frac{C}{S_0(T)}\right] \tag{4.13}$$

Ši išraiška sutampa su (4.8) Black'o–Scholes'o formulės dešiniąja puse. Iš tikrųjų, remiantis 4.2 teiginiu, ϕ yra S^*-finansavimosi strategija ir todėl

$$E_Q\Big[\frac{C}{S_0(T)}\Big] = E_Q[V^{\phi,S^*}(T)] = E_Q[E_Q[V^{\phi,S^*}(T)|\mathcal{F}_0]] = V^{\phi,S^*}(0) = V(0).$$

Pastarąjį vidurkį galima suskaičiuoti ir tiesiogiai, kitu būdu. Apibrėžkime funkciją f lygybe $f(x) := [x - K/S_0(T)]^+$, kai x realusis skaičius. Tada finansinė išmoka (4.6) įgyja pavidalą:

$$C = S_0(T) f(S^*(T));$$

čia $S^* = S_1/S_0$ yra diskontuotas kainos procesas. Mato Q atžvilgiu, S^* yra difuzinis procesas su atitinkamu generatoriumi L^*. Tarkime, kad $h = h(x,t)$ yra Cauchy problemos

$$\Big(L^* + \frac{\partial}{\partial t}\Big)h = 0, \qquad h(\cdot, T) = f,$$

sprendinys. Remdamiesi Itô formule, sprendiniui h gauname sąryšį

$$h(S^*(t), t) = h(S^*(0), 0) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(S^*(s), s)\, dS^*(s),$$

kai $0 \le t \le T$. Naudodamiesi Feynman'o–Kac'o sprendinio išraiška, gauname

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(xe^{\sigma u\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2}\Big) e^{-u^2/2}\, du$$

$$= x\Phi\Big(\frac{\ln(x/K) + rT + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - Ke^{-rT}\Phi\Big(\frac{\ln(x/K) + rT - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).$$

Dabar jau nesunku matyti, kad (4.13) $\pi(C)$ išraiška sutampa su (4.8) Black–Scholes formulės dešiniąja puse, nes $S^*(0) = S(0) = 1$.

Kitos finansų inžinerijos tyrimų kryptys. Pirmiausia reiktų pastebėti, kad (4.6) sandorio išmoka yra tik viena iš daugelio galimų. Visiškai panašiai galima įkainoti pardavimo pasirenkamąjį sandorį su išmoka $C = [K - S(T)]^+$. Šie pirkimo ir pardavimo pasirenkamieji sandoriai dar vadinami europietiškaisiais pasirenkamaisiais sandoriais. Gerokai sudėtingesnis įkainojimo metodas reikalingas tuo atveju kai rizikai mažinti naudojamas vadinamasis amerikietiškasis pasirenkamasis sandoris. Šis sandoris skiriasi nuo europietiškojo tuo, kad jo savininkas įgyja teisę pirkti (parduoti) vertybinį popierių S už kainą K bet kuriuo momentu nuo $t = 0$ iki $t = T$. Europietiškasis ir amerikietiškasis sandoriai gali turėti skirtingą kainą. Kitokios rūšies komplikacijos iškyla tais atvejais kai išmoka yra sudėtingesnė nei paprasta maksimumo funkcija. Tokiu pavyzdžiu gali būti vadinamasis vidurkinis arba azijietiškasis sandoris, kurio išmoka yra

$$C = \Big[\frac{1}{T}\int_0^T S(s)\,ds - K\Big]^+.$$

Svarbią finansų inžinerijos tyrimų kryptį sudaro darbai, kuriuose siekiama vertybinio popieriaus kainos S dinamiką, nusakomą (4.7) geometriniu Wiener'io procesu, pakeisti kitu, kiek galima bendresniu atsitiktiniu procesu. Pavyzdžiui, gerokai bendresnę kainos dinamiką aprašo stochastinė integralinė lygtis

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(u)d\Big(\int_0^u \mu(s)\,ds + \int_0^u \sigma\,dW\Big), \qquad 0 \le t \le T,$$

kai $\mu = \{\mu(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ ir $\sigma = \{\sigma(t)\colon\ 0 \le t \le T\}$ yra atsitiktiniai procesai, su kuriais egzistuoja vienintelis šios lygties sprendinys

$$S(t) = S(0)\exp\Big\{\int_0^t \Big(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}\Big)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW\Big\}. \tag{4.14}$$

Papildomai yra reikalaujama, kad atsitiktinis procesas σ, vadinamas *kintamumo funkcija*, būtų griežtai teigiamas. Toks šios funkcijos pavadinimas pateisinamas tolydaus laiko grąžos proceso, apibrėžto (2.30) lygybe, išraiška:

$$R(t) := \int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t \mu(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW, \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.15}$$

Tuo atveju, kai $\mu(t) \equiv \mu$, o $\sigma(t) \equiv \sigma$, S yra tas pats geometrinis Wiener'io procesas. Europietiškojo pasirenkamojo sandorio sąžiningosios kainos nustatymas tuo atveju, kai kainos procesas S yra nusakomas (4.14) lygybe, yra galimas modifikuojant antrąjį aukščiau aprašytąjį metodą. Tuo tikslu tenka apibendrinti ir arbitražo, pilnumo bei dinamiškojo sandorio atkartojimo sąvokas (žr. pavyzdžiui [**?**, VII.4 skyrius]). Tai, kad (4.14) lygybėje kintamumo funkcija σ gali būti atsitiktinė, yra svarbu siekiant adekvačiau modeliuoti realius kainų pokyčius, apie ką smulkiau kalbama kitame skyriuje.

Priedas A

Matematika

A.1 Wiener'io procesas

2.2 apibrėžimas apibudina Wiener'io procesą. Pateiksime konstruktyvų šio atsitiktinio proceso egzistavimo įrodymą.

Tegul $\{r_n\}$ yra teigiamų diadinių racionalių skaičių seka, t. y. seka skaičių $k/2^n$, $k = 1, 3, \dots$, $n = 1, 2, \dots$. Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tokia tikimybinė erdvė, kurioje yra apibrėžta nepriklausomų $N(0,1)$ atsitiktinių dydžių seka $\{X_{r_n}\}$. Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėšime Wiener'io procesą.

Su kiekvienu teigiamu sveikuoju skaičiumi k, tegul

$$W(k) := X_1 + X_2 + \cdots + X_k \qquad \text{ir}$$

$$W(k + 1/2) := \frac{W(k) + W(k+1)}{2} + \frac{X_{k+1/2}}{\sqrt{4}}.$$

Toliau apibrėšime a. d. $W(k/2^n)$ su visais $k = 1, 3, \dots$ ir $n = 1, 2, \dots$. Tarkime, kad šiuos a. d. apibrėžėme su visais $k = 1, 3, \dots$ ir $n = 1, 2, \dots, n_0$. Tada su kiekvienu $k = 1, 3, \dots$ ir $n = n_0 + 1$, tegul

$$W\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) := \frac{1}{2}\left[W\left(\frac{2k}{2^n}\right) + W\left(\frac{2k+2}{2^n}\right)\right] + \frac{X_{(2k+1)2^{-n}}}{\sqrt{2^{n+1}}}.$$

Remiantis matematine indukcija procesas W yra apibrėžtas visuose diadiniuose racionaliuose taškuose $\{r_n\}$. Su bet kuriuo $0 < t = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(t) 2^{-k}$ (čia $\epsilon_0(t) = 0, 1, 2, \dots$, $\epsilon_k(t) = 0, 1$ su visais $k = 1, 2, \dots$ ir $\epsilon_k(t)$ nėra tapatingas 1 pradedant kuriuo nors k), apibrėšime beveik visur

$$W(t) := \lim_{n\to\infty} W([2^n t]/2^n) = \lim_{n\to\infty} W(t_n) = W(\epsilon_0(t)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [W(t_k) - W(t_{k-1})],$$

kai $t_n := \sum_{j=0}^{n} \epsilon_j(t) 2^{-j}$. Šių ribų egzistavimas su kiekvienu fiksuotu t išplaukia remiantis Kolmogorovo trijų eilučių teorema. Nulinio mato aibė, kurioje toks konvergavimas nėra teisingas gali priklausyti nuo t. Tačiau taip nėra, kadangi egzistuoja tokia nulinio mato aibė $\Omega_0 \subset \Omega$, kad kiekvienam $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ eilutė $\sum_{k=1}^{\infty}[W(t_k,\omega) - W(t_{k-1},\omega)]$ konverguoja su visais $t > 0$. Iš tikro įrodysime, kad toks konvergavimas yra netgi tolygus $t > 0$, atžvilgiu, t. y. beveik visada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\le t\le 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| < \infty.$$

Įrodymui pasinaudosime įverčiais (Feler (1968), p. 175)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} \le 1 - \Phi(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad x > 0. \tag{A.1}$$

Kadangi aibę $\{W(t_k) - W(t_{k-1})\colon\ 0 \le t \le 1\}$ sudaro 2^{k+1} a. d. su normaliu skirstiniu $N(0, 1/\sqrt{2^k})$, tai

$$P\Big(\Big\{\sup_{0\le t\le 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \ge \frac{u_k}{\sqrt{K}}\Big\}\Big) \le 2K \exp\big\{-u_k^2/2\big\},$$

čia $K := 2^k$, $u_k := C\sqrt{2\ln K}$ ir $C > 1$ yra bet koks skaičius. Pritaikę šią nelygybę su konstanta $L := \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{(2\ln 2^k)/2^k}$, gauname sąryšius

$$P\Big(\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{0\le t\le 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \ge CL\Big\}\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^{k(C^2-1)}} = \frac{2}{2^{C^2-1}-1} \to 0$$

kai $C \to \infty$, iš kurių išplaukia trokštamas tolygus konvergavimas beveik visada.

Nesunku patikrinti, kad taip apibrėžtam atsitiktiniam procesui $W = \{W(t)\colon\ t \ge 0\}$ galioja pirmos dvi 2.2 apibrėžimo savybės. Trečioji savybė nėra tokia akivaizdi. Ji išplaukia iš toliau įrodomos A.1 teoremos. Todėl atsitiktinis procesas W yra Wiener'io procesas.

A.1 Teorema. *Atsitiktiniam procesui $W = \{W(t)\colon\ t \ge 0\}$ beveik visada yra teisinga*

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sup_{0\le s\le 1-h}\sup_{0<t\le h}|W(s+t) - W(s)|}{\sqrt{2h\log 1/h}} = 1$$

$$\textit{ir} \qquad \lim_{h\downarrow 0}\frac{\sup_{0\le s\le 1-h}|W(s+h) - W(s)|}{\sqrt{2h\log 1/h}} = 1.$$

Šios teoremos įrodymui naudosimės tokia nelygybe:

A.2 Lema. *Kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja tokia teigiama konstanta $C = C(\epsilon)$, kad nelygybė*

$$P\Big(\Big\{\sup_{0\le s\le 1-h}\sup_{0<t\le h}|W(s+t) - W(s)| \ge v\sqrt{h}\Big\}\Big) \le \frac{C}{\sqrt{h}}\exp\Big\{-\frac{v^2}{2+\epsilon}\Big\} \tag{A.2}$$

yra teisinga su visais teigiamais v ir $h < 1$.

A.1 teoremos įrodymas. Su kiekvienu $h \in (0,1)$ ir $\omega \in \Omega$, pažymėkime:

$$A_h(\omega) := \sup_{0\le s\le 1-h} \sup_{0<t\le h} |W(s+t,\omega) - W(s,\omega)|.$$

Pirmiausia įrodysime, kad beveik visada

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{A_h}{\sqrt{2h \ln 1/h}} \le 1. \tag{A.3}$$

Naudodamiesi (A.2) nelygybe su $v = (1+\epsilon)\sqrt{2\ln 1/h}$ ir bet kuriuo $\epsilon > 0$, gauname

$$P\Big(\Big\{\frac{A_h}{\sqrt{2h\ln 1/h}} \ge 1+\epsilon\Big\}\Big) \le \frac{C}{h}\exp\Big\{-\frac{2(1+\epsilon)^2}{2+\epsilon}\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)\Big\} \le Ch^{\epsilon}.$$

Tegul $T > 1/\epsilon$ ir $h = h_n = n^{-T}$. Tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big\{\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_n\ln 1/h_n}} \ge 1+\epsilon\Big\}\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} Cn^{-T\epsilon} < \infty,$$

ir, remiantis Borelio-Cantelli lema, beveik visada

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_n \ln 1/h_n}} \le 1+\epsilon.$$

Imant $h \in (h_{n+1}, h_n]$ su kuriuo nors n, iš čia išplaukia, kad beveik visada

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{A_h}{\sqrt{2h\ln 1/h}} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_{n+1}\ln 1/h_{n+1}}}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_n\ln 1/h_n}}\frac{\sqrt{2h_n\ln 1/h_n}}{\sqrt{2h_{n+1}\ln 1/h_{n+1}}}. \le 1+\epsilon.$$

Kadangi $\epsilon > 0$ yra laisvai pasirinktas, (A.3) yra teisinga beveik visada.

Dabar įrodysime, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$,

$$B(\omega) := \liminf_{h\downarrow 0} \sup_{0\le s\le 1-h} \frac{|W(s+h,\omega) - W(s,\omega)|}{\sqrt{2h\ln 1/h}} \ge 1. \tag{A.4}$$

Remiantis (A.1) nelygybe, turime įvertį

$$P\Big(\Big\{\Big|W\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - W\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| < (1-\epsilon)\sqrt{\frac{2\ln n}{n}}\Big\}\Big) \le 1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{8\pi\ln n}}.$$

Be to, dėl atsitiktinio proceso W pokyčių nepriklausomumo, turime

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big\{\max_{0\le k\le n-1}\Big|W\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - W\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| < (1-\epsilon)\sqrt{\frac{2\ln n}{n}}\Big\}\Big)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{8\pi\ln n}}\Big)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{n^\epsilon}{\sqrt{8\pi\ln n}}\Big\} < \infty.$$

Dar kartą remdamiesi Borelio-Cantelli lema, gauname

$$\liminf_{n\to\infty}\sup_{0\leq s\leq 1-1/n}\frac{|W(s+1/n)-W(s)|}{\sqrt{(2/n)\ln n}} \geq \liminf_{n\to\infty}\max_{0\leq k\leq n-1}\frac{\Big|W\Big(\frac{k+1}{n}\Big)-W\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|}{\sqrt{(2/n)\ln n}} \geq 1 \quad \text{(A.5)}$$

beveik visada. Imdami $h_n := 1/n$ ir $h \in (h_{n+1}, h_n]$ su kuriuo nors n, gauname

$$B \geq \liminf_{n\to\infty}\sup_{0<s<1-1/(n+1)}\frac{|W(s+1/(n+1))-W(s)|}{\sqrt{(2/(n+1))\ln(n+1)}}\frac{\sqrt{(2/(n+1))\ln(n+1)}}{\sqrt{(2/n)\ln n}}$$
$$-\limsup_{n\to\infty}\sup_{0<s<1-1/(n+1)}\sup_{0\leq t\leq 1/(n+1)}\frac{|W(s+t)-W(s)|}{\sqrt{(2/n)\ln n}}.$$

Pastarasis a. d. yra 0 beveik visada remiantis (A.3), o pirmasis a. d. yra ≥ 1 beveik visada remiantis (A.5). Iš čia išplaukia (A.4) ir A.1 teorema įrodyta.

A.2 Šiurkščiųjų funkcijų analizė

Funkcija f, apibrėžta uždarame intervale $[a,b]$ ir įgyjanti realiąsias reikšmes, vadinama *reguliaria* intervale $[a,b]$, jei kiekvienam $t\in[a,b)$ egzistuoja baigtinė riba iš dešinės $f(t+) := \lim_{s\downarrow t} f(s)$ ir jei kiekvienam $t\in(a,b]$ egzistuoja baigtinė riba iš kairės $f(t-) := \lim_{s\uparrow t} f(s)$. Kiekviena baigtinės variacijos funkcija yra reguliari. Taip pat reguliaria yra kiekviena tolydžioji funkcija. Tačiau mus domina reguliariosios funkcijos, kurių variacija yra begalinė. Kaip matėme tokių funkcijų pavyzdys yra beveik visos Wiener'io proceso trajektorijos. Toliau kiekviena reguliarioji funkcija, kurios variacija yra begalinė, vadinama *šiurkščiąja* (angl. rough function). Šiuo terminu apibudinama klasė funkcijų, kurios nėra glodžios ir kurioms nėra pritaikomas įprastinis matematinės analizės aparatas.

Šiurkščiosioms funkcijoms tirti praverčia funkcijų savybė vadinama p-variacija, kai $1<p<\infty$. Bet kuriems $0<p<\infty$ ir funkcijai $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$, dydis

$$v_p(f;[a,b]) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p\colon\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,\ n=1,2,\ldots\Big\} \quad \text{(A.6)}$$

vadinamas f funkcijos *p-variacija*[1] intervale $[a,b]$. Sakoma, kad f funkcija turi baigtinę p-variaciją, jei $v_p(f;[a,b])<\infty$. Baigtinės variacijos funkcija yra funkcija turinti baigtinę 1-variaciją. Jei funkcija turi baigtinę variaciją, tai jos p-variacija yra baigtinė su kiekvienu $1<p<\infty$. Tai išplaukia iš nelygybės $v_q(f;[a,b])^{1/q}\leq v_p(f;[a,b])^{1/p}$ su bet kuriais $0<p<q<\infty$, kuri savo ruožtu išplaukia iš nelygybės teigiamiems skaičiams $a_1,\ldots,a_n$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\Big)^{1/q}\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{1/p}.$$

[1] p-variacijos savybę pirmą kartą Fourier eilučių teorijoje panaudojo N. Wiener (1924) [**?**]

Atvirkščiai nėra teisinga, kaip rodo minėtasis Wiener'io proceso trajektorijos pavyzdys.

Funkcijos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *p-variacijos indeksu* vadinamas dydis

$$\upsilon(f) = \upsilon(f;[a,b]) := \begin{cases} \inf\{p > 0\colon\ v_p(f;[a,b]) < \infty\} & \text{jei aibė netuščia,} \\ +\infty & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Šis indeksas charakterizuoja funkcijos f šiurkštumo laipsnį. Kaip matėme, beveik visų Wiener'io proceso trajektorijų p-variacijos indeksas yra 2, t. y. kiekvienam $0 < T < \infty$ ir beveik visiems $\omega \in \Omega$,

$$\upsilon(W(\cdot,\omega);[0,T]) = 2.$$

Funkcijos 2-variacijos apibrėžime ((A.6) kai $p = 2$) supremumas vertinamas visų $[a,b]$ intervalo skaidinių $\{t_i\}_{i=0}^n$ atžvilgiu, kurių yra nesuskaičiuojama aibė. Šiame apibrėžime visų intervalo $[a,b]$ skaidinių aibę pakeitę skaičia skaidinių seka, o supremumą pakeitę riba, gausime kitą funkcijos savybę, vadinamą kvadratine variacija.

Tegul $\lambda_m = \{t_i^m\}_{i=0}^{n(m)}$, $m = 1,2,\dots$, yra tokia intervalo $[a,b]$ skaidinių seka, kad $\lambda_m \subset \lambda_{m+1}$ su visais m, o sąjunga $\cup\{\lambda_m\colon\ m \geq 1\}$ tiršta intervale $[a,b]$. Pažymėkime $D[a,b]$ aibę visų reguliariųjų funkcijų $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kurios yra tolydžios iš dešinės kiekviename taške $t \in [a,b)$ (joms egzistuoja ribos iš kairės $f(t-)$ kiekviename taške $t \in (a,b]$ pagal reguliarumo apibrėžimą). Toliau, tokios funkcijos f šuolį taške $t \in (a,b]$ žymėsime $\Delta f(t) := f(t) - f(t-)$. Sakysime, kad funkcija $f \in D[a,b]$ turi *kvadratinę λ-variaciją* intervale $[a,b]$, jei egzistuoja tokia funkcija $h \in D[a,b]$, kad:

(a) $h(0) = 0$,

(b) $\Delta h(t) = [\Delta f(t)]^2$ su visais $t \in (a,b]$,

(c) riba

$$h(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left[f(t_i^m \wedge t) - f(t_{i-1}^m \wedge t)\right]^2 \tag{A.7}$$

egzistuoja, bei lygybė yra teisinga su kiekvienu $t \in (a,b]$. Funkcija $[f]_\lambda := h$ yra nedidėjanti ir todėl egzistuoja jos išskaidymas į tolydžiąją dalį $[f]_\lambda^c$ ir visur trūkiąją dalį $\sum_{(a,\cdot]}[\Delta f]^2$. Nesunku pastebėti, kad kvadratinė λ-variacija $[f]_\lambda$ egzistuoja ir visur lygi nuliui jei f yra tolydžioji baigtinės variacijos funkcija.

A.3 Stochastinė analizė

Sakykime, kad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ yra pilnoji tikimybinė erdvė ir $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\colon\ t \geq 0\}$ nemažėjanti σ-algebrų šeima. Finansų matematikos kontekste $(\Omega,\mathcal{F},P)$ yra ateities neapibrėžtumo matematinis modelis, o $\mathbb{F}$ vadinamas *informaciniu srautu*.

A.3 Apibrėžimas. Sakykime, kad $M = \{M(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ yra atsitiktinis procesas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. M vadinamas *martingalu* atžvilgiu $\mathbb{F}$, jei su kiekvienu $t \in [0,T]$, $M(t)$ yra $\mathcal{F}_t$-matus, vidurkis $E_P|M(t)| < \infty$ ir

$$E_P\big[M(t)\big|\mathcal{F}_s\big] = M(s)$$

su visais $0 \le s < t \le T$.

Girsanov'o teorema. Tarkime, kad W yra Wiener'io procesas apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Finansų matematikoje naudojamas grąžos procesas

$$R(t) = \mu t + \sigma W(t), \qquad t \in [0,T], \tag{A.8}$$

yra martingalas tik tada jei $\mu = 0$. Tačiau, šį procesą galima paversti martingalu pakeitus matą P jam ekvivalenčiu matu. Du tikimybiniai matai P ir Q, apibrėžti mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, vadinami *ekvivalenčiais*, jei su kiekvienu $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ tada ir tik tada, kai $Q(A) = 0$. Jei P ir Q yra ekvivalentūs, tai egzistuoja toks teigiamas $\mathcal{F}$-matus atsitiktinis dydis f, kad

$$Q(A) = E_P[1_A f], \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Dydis f vadinamas *Radon'o–Nicodym'o tankiu* ir žymimas $\frac{dQ}{dP} := f$.

Tam, kad (A.8) procesas būtų martingalas, matą P reikia pakeisti ekvivalenčiu matu, apibrėžtu naudojantis specialios formos Radon'o–Nicodym'o tankiu. Tarkime, kad su kiekvienu $t \in [0,T]$,

$$L(t) := \exp\left\{\int_0^t h(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\,ds\right\},$$

kai $h = \{h(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ yra $\mathbb{F}$-suderintas aprėžtas atsitiktinis procesas. Atsitiktinis procesas $L = \{L(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ yra tiesinės integralinės lygties

$$L(t) = 1 + \int_0^t L(s)h(s)\,dW(s), \qquad 0 \le t \le T,$$

vienintelis sprendinys ir vidurkis $E_P[L(t)] = 1$ su kiekvienu $t \in [0,T]$.

Toliau formuluojamas teiginys vadinamas *Girsanov'o teorema*:

A.4 Teorema. *Sakykime, kad tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra apibrėžti Wiener'io procesas $W = \{W(t)\colon\ t \in [0,T]\}$ ir $\mathbb{F}$-suderintas aprėžtas atsitiktinis procesas $h = \{h(t)\colon\ t \in [0,T]\}$. Jei Q yra mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, apibrėžtas tikimybinis matas su Radon'o–Nicodym'o tankiu $\frac{dQ}{dP} = L(T)$, tai atsitiktinis procesas $W^* = \{W^*(t)\colon\ t \in [0,T]\}$, apibrėžtas lygybe*

$$W^*(t) := W(t) - \int_0^t h(s)\,ds,$$

yra Wiener'io procesas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Remiantis Girsanovo teorema, kurioje Radon'o–Nicodym'o tankis $\frac{dQ}{dP} = L(T)$ apibrėžtas funkcijos $h(t) \equiv -\mu/\sigma$ pagalba, (A.8) grąža

$$R(t) = \sigma \left\{ W(t) - \int_0^t \Big(-\frac{\mu}{\sigma}\Big)\, ds \right\} = \sigma W^*(t), \qquad 0 \le t \le T$$

yra martingalas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ kadangi Wiener'io procesas W^* yra martingalas.

A.4 Atskyrimo teoremos

A.5 Teorema. *Tarkime, kad Euklidinės erdvės aibė G yra iškila ir neturi teigiamų elementų. Tada egzistuoja tokia atskiriančioji hiperplokštuma $\{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = 0\}$, kad $\mathbf{p} \ge 0$, o aibė G priklauso poerdviui $\{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \le 0\}$.*

Priedas B

Terminai

Naudojamų terminų paaiškinimas:

Lietuviškai	*Angliškai*
akcija	share
efektyvi rinka	efficient market
finansinė vertybė	financial security
grąža	return
kapitalo vertybė	capital asset
naudingumo funkcija	utility function
neapibrėžtis	uncertainty
obligacija	bond
turtas	wealth
turto kainojimas	asset pricing
vertybiniai poperiai	securities
vidurkinė nauda	expected utility

Literatūra

[1] `http://finmath.com/Chicago/NAFTCORP/Bookshelf.html`

[2] Barndorff-Nielsen, O. E., Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, **2** (1998), 41-68.

[3] Black, F. and Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637-659.

[4] Föllmer, H. and Schied, A., *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin, 2002.

[5] Grigelionis, B., Generalized z-distributions and related stochastic processes. *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, **41** (2001), 303-319.

[6] Joshi, M. S., *The Concepts and Practice of Mathematical Finance.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[7] Lévy, P., Le mouvement brownien plan. *American Journal of Mathematics*, **62** (1940), 487-550.

[8] Mandelbrot, B. B., *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, New York, 1997.

[9] Merton, R. C., Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), 141-183.

[10] Mishkin, F. S., *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets.* 7-th Edition. Addison Wesley, Boston, 2004.

[11] J. Muth, Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica* **29** (1961), 315-335.