9 paskaita

9.1 Erdvės su skaliarine daugyba

Šiame skyriuje nagrinėsime abstrakčias tiesines erdves, kurioms apibrėžta skaliarinė daugyba. Jos sudaro labai svarbų normuotųjų erdvių šeimos pošeimį. Pilnosios erdvės su skaliarine daugyba vadinamos Hilberto erdvėmis, vokiečių matematiko D. Hilberto garbei, kuris daug prisidėjo vystant funkcinę analizę. Erdvėms su skaliarine daugyba apibrėšime elementų statmenumo sąvoką, nagrinėsime Hilberto erdvių ortoganaliąsias bazes ir apibendrinsime klasikinę Furjė analizę.

9.1.1 Euklidinės ir unitariosios erdvės

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

9.1 apibrėžimas. *Atvaizdis $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{K}$ vadinamas erdvės $\mathbb{E}$ skaliarine daugyba, jei teisingos šios aksiomos:*

(SD1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *su visais* $x, y, z \in \mathbb{E}$*;*

(SD2) $\langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle$ *su visais* $x, z \in \mathbb{E}$ *ir* $\alpha \in \mathbb{K}$*;*

(SD3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *su visais* $x, y \in \mathbb{E}$*;*

(SD4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *su visais* $x \in \mathbb{E}$ *ir* $\langle x, x\rangle = 0$ *tada ir tik tada, kai* $x = 0$*.*

Jei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – erdvės $\mathbb{E}$ skaliarinė daugyba, tai $\langle x, y\rangle$ vadiname elementų x ir y skaliarine sandauga.

9.2 apibrėžimas. *Realioji tiesinė erdvė, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba, vadinama euklidine erdve, o kompleksinė – unitariąja erdve.*

Pastebėsime, kad trečioji skaliarinės daugybos aksioma euklidinėms erdvėms reiškia simetriškumą: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ su visais $x, y \in \mathbb{E}$.

9.1 pavyzdys. Formule

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k},$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{C}^d$, apibrėžiama erdvės $\mathbb{C}^d$ skaliarinė daugyba. Tikrai, pirmoji ir antroji skaliarinės daugybos aksiomos teisingos, nes

$$\sum_{k=1}^{d} (\alpha x_k + \beta y_k)\overline{z_k} = \alpha \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{z_k} + \beta \sum_{k=1}^{d} y_k \overline{z_k}.$$

Prisiminę paprasčiausias kompleksinių skaičių savybes, išvedame

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \textstyle\sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{d} \overline{\overline{x_k} y_k} \\ &= \overline{\textstyle\sum_{k=1}^{d} y_k \overline{x_k}} = \overline{\langle y, x \rangle}. \end{aligned}$$

Taigi (SD3) aksioma taip pat teisinga. Pagaliau (SD4) aksiomą išvedame iš lygybės

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{d} |x_k|^2.$$

Erdvės $\mathbb{R}^d$ skaliarinė daugyba apibrėžiama taip:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Taigi $\mathbb{R}^d$ – euklidinė, o $\mathbb{C}^d$ – unitarioji erdvės.

9.2 pavyzdys. Formule

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

kai $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, apibrėžiama realiosios tiesinės erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ skaliarinė daugyba. Kompleksinės erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ skaliarinę daugybą galime apibrėžti taip:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Pirmosios dvi skaliarinės daugybos aksiomos įrodomos remiantis paprasčiausiomis integralų savybėmis. Nagrinėdami atskirai realią bei menamą kompleksinės funkcijos dalis išvedame trečiąją aksiomą. Galiausiai bet kuriai kompleksinei tolydžiajai funkcijai $f : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Be to, $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$ tada ir tik tada, kai $f(t) = 0$ su kiekvienu $t \in [a,b]$. Taip gautą tiesinę erdvę su skaliarine daugyba žymėsime $\mathcal{C}_2[a,b]$.

9.3 pavyzdys. Formule

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \boldsymbol{x} = (x_k), \boldsymbol{y} = (y_k) \in \ell_2,$$

apibrėžiama erdvės ℓ_2 skaliarinė daugyba. Čia reikia pastebėti, kad eilutė $\sum_k x_k y_k$ konverguoja su visais $\boldsymbol{x} = (x_k)$ ir $\boldsymbol{y} = (y_k)$ iš aibės ℓ_2.

9.4 pavyzdys. Interpretuodami $L_2(a,b)$ kaip faktor-erdvę $\mathcal{L}_2(a,b)/\mathcal{L}_0$ (žr. **??** pavyzdį), ekvivalentumo klasių $[f],[g] \in L_2(a,b)$ skaliarinę sandaugą apibrėžiame formule

$$\langle [f],[g] \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

čia $f \in [f], g \in [g]$ bet kurie atitinkamų klasių elementai. Ateityje, vietoj $\langle [f],[g] \rangle$ rašysime $\langle f, g \rangle$, jei tai nekels painiavos.

Nagrinėkime kiek sudėtingesnį pavyzdį.

9.5 pavyzdys. Imkime realiasias funkcijas f, apibrėžtas intervale $[a,b]$ ir lygias nuliui visur išskyrus baigtinį ar skaitų skaičių taškų bei tenkinančias sąlygą

$$\sum_t f^2(t) < \infty.$$

Čia sumuojama pagal visus tuos taškus $t \in [a,b]$, kuriuose funkcija f nelygi nuliui. Todėl $\sum_t f^2(t)$ reiškia arba baigtinę sumą arba atitinkamos eilutės sumą. Visų tokių funkcijų aibę pažymėkime $L_{2,s}(a,b)$ (raidelė s pridėta norint pabrėžti, kad nagrinėjamos funkcijos pagal savybes artimesnės sekoms). Nesunku įsitikinti, kad ji yra tiesinė erdvė natūraliųjų sumos ir daugybos iš skaliaro operacijų atžvilgiu. Gautosios tiesinės erdvės skaliarinę daugybą apibėžkime taip:

$$\langle f, g \rangle = \sum_t f(t)g(t),$$

čia sumuojama pagal tas argumento $t \in [a, b]$ reikšmes, kurioms sandauga $f(t)g(t) \neq 0$ (tokių argumento reikšmių bus ne daugiau nei skaiti aibė). Naudodami Hiolderio nelygybę sekoms įrodome, jog visiems elementams $f, g \in L_{2,s}(a, b)$ skaliarinė sandauga $\langle f, g \rangle$ apibrėžta korektiškai. Taip $L_{2,s}(a, b)$ tampa euklidine erdve. Analogiškai galime apibrėžti unitariąją erdvę $L_{2,s}(a, b)$.

Įdomu pastebėti, kad nagrinėjant erdvę $L_2(a, b)$ (arba bet kurią $L_p(a, b)$) kaip faktor-erdvę $\mathcal{L}_2(a, b)/\mathcal{L}_0$ (žr. **??** pavyzdį), aibė $L_{2,s}(a, b) \subset [0]$, čia $[0]$ yra erdvės $L_2(a, b)$ nulinis elementas. Mat kiekviena funkcija iš $L_{2,s}(a, b)$ beveik visur (Lebego mato prasme) lygi nuliui.

Keletas paprasčiausių skaliarinės daugybos savybių surinkta šiame teiginyje.

9.1 teiginys. *Tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ skaliarinei daugybai teisingos šios savybės:*

(a) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ *su visais* $x, y, z \in \mathbb{E}$;

(b) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$ *su visais* $x, y \in \mathbb{E}$ *ir* $\alpha \in \mathbb{K}$;

(c) jei $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ *su kiekvienu* $z \in \mathbb{E}$, *tai* $x = y$.

(d) $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ *su visais* $x \in \mathbb{E}$;

Įrodymas. Iš skaliarinės daugybos (SD1) ir (SD3) aksiomų išvedame

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Pritaikę (SD2) ir (SD3) aksiomas, gauname

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y \rangle &= \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Jei $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$, taikydami (SD2) ir (SD3) aksiomas matome, kad

$$0 = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle + (-1)\langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle -y, z \rangle = \langle x - y, z \rangle.$$

Kadangi tai teisinga su visais $z \in \mathbb{E}$, paėmę $z = x-y$, gauname $\langle x-y, x-y\rangle = 0$. Remiantis (SD4) aksioma, $x - y = 0$, t.y. $x = y$.

Paskutinioji (d) savybė yra akivaizdi. ■

Sudėję kartu skaliarinės daugybos (SD1) ir (SD2) aksiomas bei ką tik įrodytas (a) ir (b) savybes, išvedame šias skaliarinės daugybos taisykles: su visais $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y, z \in \mathbb{E}$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \tag{9.3}$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle. \tag{9.4}$$

9.1.2 Erdvių su skaliarine daugyba norma

Skyrelį pradėsime svarbia Švarco nelygybe.

9.1 teorema. (Švarco nelygybė.) *Jei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ skaliarinė daugyba, tai su bet kuriais $x, y \in \mathbb{E}$ teisinga nelygybė*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{9.5}$$

Įrodymas. Sakykime, $x, y \in \mathbb{E}$, $t \in \mathbb{R}$ ir $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$. Remiantis skaliarinės daugybos (SD4) aksioma,

$$\langle t\alpha x + y, t\alpha x + y\rangle \geq 0.$$

Iš čia, pasinaudoję skaliarinės daugybos (9.3) bei (9.4) taisyklėmis, išvedame

$$t^2\langle x, x\rangle + 2t\Re(\alpha\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \geq 0. \tag{9.6}$$

Kadangi kvadratinė (9.6) nelygybė teisinga su bet kuriuo $t \in \mathbb{R}$, tai kvadratinio trinario diskriminantas būtinai neteigiamas, t. y.

$$(\Re(\alpha\langle x, y\rangle))^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

Parinkę tokį α, su kuriuo $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, gauname (9.5). ■

9.2 teiginys. *Jei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – erdvės $\mathbb{E}$ skaliarinė daugyba, tai su bet kuriais $x, y \in \mathbb{E}$ teisinga nelygybė*

$$\langle x + y, x + y\rangle^{1/2} \leq \langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2}. \tag{9.7}$$

Įrodymas. Pritaikę skaliarinės daugybos (SD1) aksiomą, (a) savybę iš 9.1 teiginio bei Švarco nelygybę, gauname

$$\begin{aligned}
\langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + 2\Re\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\le \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \\
&\le \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\
&= (\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2.
\end{aligned}$$

Gautasis rezultatas ekvivalentus (9.7). ∎

Iš 9.2 teiginio ir skaliarinės daugybos aksiomų išvedame šį teiginį.

9.3 teiginys. *Sakykime, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ skaliarinė daugyba. Tuomet atvaizdis $||\cdot|| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$,*

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{E}, \tag{9.8}$$

yra erdvės $\mathbb{E}$ norma.

Taip apibrėžta norma dažnai vadinama Hilberto (hilbertiška).

Įrodymas. Pirmoji normos aksioma sutampa su skaliarinės daugybos (SD4) aksioma. Pritaikę (SD2) ir (b) savybę iš 9.1 teiginio, išvedame

$$\begin{aligned}
||\alpha x|| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle} \\
&= \sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle} = |\alpha|\cdot||x||.
\end{aligned}$$

Trikampio nelygybė (9.8) formule apibrėžtai funkcijai yra užrašyta 9.2 teiginyje. ∎

Kalbėdami apie tiesinę erdvę su skaliarine daugyba kaip apie normuotą ar metrinę erdvę, normą, jei nepasakyta kitaip, apibrėžiame (9.8) formule, o atstumo funkciją – atitinkamai (**??**) formule.

Jei normuotoje erdvėje taip apibrėžiame skaliarinę daugybą, kad yra teisingas (9.8) sąryšis, tai sakome, kad *norma suderinta su skaliarine daugyba.* Pavyzdžiui, erdvių $\ell_2, L_2(a,b), \mathcal{C}_2[a,b]$ skaliarinė daugyba ir norma yra suderintos, t.y. teisingas (9.8) sąryšis. Tačiau erdvės $\mathcal{C}[0,1]$ tolygioji norma ir skaliarinė daugyba apibrėžta 9.2 pavyzdyje, nesuderintos. Taigi pagrįstas toks klausimas: ar galime tiesinei normuotai erdvei apibrėžti suderintą su norma skaliarinę daugybą? Į klausimą atsako ši teorema (be įrodymo).

9.2 teorema. *Tiesinei normuotai erdvei $\mathbb{E}$ apibrėžti suderintą su norma skaliarinę daugybą galima tada ir tik tada, kai galioja vadinamoji lygiagretainio taisyklė : su visais $x, y \in \mathbb{E}$,*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{9.9}$$

Jei ši taisyklė teisinga, tai suderinta su norma skaliarinė daugyba yra

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2), \quad x, y \in \mathbb{E}, \tag{9.10}$$

kai $\mathbb{E}$ – realioji erdvė, ir

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) - \frac{i}{4}(||ix+y||^2 - ||ix-y||^2), \quad x, y \in \mathbb{E},$$

kai $\mathbb{E}$ – kompleksinė erdvė.

Pastebėsime, kad (9.9) tapatybė vadinama lygiagretainio taisykle todėl, kad plokštumoje (kai $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$) ji reiškia gerai žinomą geometrijos faktą: *lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi kraštinių ilgių kvadratų sumai.*

9.6 pavyzdys. Nagrinkime erdvę $\mathcal{C}[0,1]$ su tolygiąja norma

$$||f|| = \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|.$$

Tegu funkcijos $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ ir $f(t) = 1$, o $g(t) = t$, $t \in [0,1]$. Tuomet

$$||f|| = 1, ||g|| = 1, ||f+g|| = 2, ||f-g|| = 1.$$

Akivaizdu, kad lygegretainio taisyklė šiems erdvės $\mathcal{C}[0,1]$ elementams f ir g neteisinga.

9.7 pavyzdys. Nagrinėkime erdves $\ell_p, p \ge 1$. Tegu

$$\boldsymbol{x} = (0,1,0,0,0,...), \quad \boldsymbol{y} = (1,0,0,0,...).$$

Tuomet

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (1,1,0,0,...), \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = (-1,1,0,0,...),$$

ir

$$||\boldsymbol{x}|| = 1, \ ||\boldsymbol{y}|| = 1, \ ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| = 2^{1/p}, \ ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|| = 2^{1/p}.$$

Taigi lygegretainio taisyklė elementams $\boldsymbol{x}$ ir $\boldsymbol{y}$ negalioja, jei $4 \ne 2\cdot 2^{2/p}$, t.y. $p \ne 2$. Kita vertus, erdvėje ℓ_2 lygegretainio taisyklė yra teisinga, nes jos norma ir skaliarinė daugyba yra suderinti.

Jei $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė su skaliarine daugyba $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ir $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ – tiesinis poaibis, tai atvaizdžio $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ siaurinys aibėje $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ yra tiesinės erdvės $\mathbb{F}$ skaliarinė daugyba, kuri vadinama *indukuotąja*. Kaip ir tiesinių normuotų erdvių atveju, išskirtinis vaidmuo čia suteikiamas uždariesiems (normuotos erdvės $\mathbb{E}$) tiesiniams poaibiams.

9.3 apibrėžimas. *Erdvės $\mathbb{E}$ su skaliarine daugyba poerdviu vadinamas uždaras tiesinis poaibis su indukuotąja skaliarine daugyba.*

Bet kuris baigtinės dimensijos tiesinės erdvės su skaliarine daugyba tiesinis poaibis yra uždara aibė, taigi yra poerdvis. Begalinio matavimo ℓ_2 erdvės poerdvį gausime paėmę, pavyzdžiui, aibę $L = \{\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_2 : x_1 = 0\}$.

9.1.3 Hilberto erdvės

9.4 apibrėžimas. *Tiesinė begalinio matavimo erdvė su skaliarine daugyba vadinama Hilberto erdve, jei ji yra pilna normuota erdvė normos, suderintos su skaliarine daugyba, atžvilgiu.*

Hilberto erdvėms žymėti rezervuota raidė $\mathbb{H}$. Paprasčiausias, bet kartu ir svarbiausias Hilberto erdvės pavyzdys – ℓ_2. Jau esame įrodę, kad ℓ_2 yra Banacho erdvė. Be to, kaip jau ne kartą pastebėjome, jos norma $||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ yra suderinta su skaliarine daugyba $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Taigi ℓ_2 – Hilberto erdvė. Kita išskirtinė erdvės ℓ_2 savybė – ji yra separabili. Vėliau įrodysime, kad visos separabiliosios Hilberto erdvės yra izometriškai izomorfinės erdvei ℓ_2.

Erdvės $\mathcal{C}_2(a, b)$ norma taip pat suderinta su skaliarine daugyba, tačiau ji nėra pilna (žr. **??** pavyzdį), vadinasi, nėra Hilberto.

9.8 pavyzdys. Erdvės $L_2(a, b)$, $L_2(\mathbb{R})$ yra Hilberto.

9.9 pavyzdys. Neseparabilios Hilberto erdvės pavyzdys yra 9.5 pavyzdyje aprašytoji erdvė $L_{2,s}(a, b)$. Jos pilnumą paliekame skaitytojui įrodyti pačiam, patardami pasinaudoti erdvės ℓ_2 pilnumo įrodymu. Tai, kad $L_{2,s}(a, b)$ nėra separabili, įsitikiname pastebėję, jog kontinumo galios funkcijų šeima $f_t, t \in [a, b]$, apibrėžta lygybe $f_t(u) = \delta_{u,t}, u \in (a, b)$, pasižymi savybe $||f_t - f_v||^2 = \sum_u (\delta_t(u) - \delta_v(u))^2 = 2, \quad \text{kai} \quad t \neq v$.

Iš erdvės su skaliarine daugyba poerdvio apibrėžimo (žr. 9.3 apibrėžimą) ir **??** teiginio išvedame šį rezultatą.

9.4 teiginys. *Hilberto erdvės poerdvis yra Hilberto erdvė.*

9.2 Statmenumas

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė su skaliarine daugyba $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ir elementų norma $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{E}$. Naudodami šią normą, Švarco nelygybę galime perrašyti taip:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Realiosios erdvės atveju gauname, kad $\langle x, y \rangle / (||x|| \cdot ||y||) \in [-1, +1]$. Todėl galime įvesti kampo tarp dviejų erdvės elementų savoką, apibrėždami to kampo kosinusą: $\cos \phi = \langle x, y \rangle / (||x|| \cdot ||y||)$. Taigi galime kalbėti apie daugelį euklidinės geometrijos savokų bendresnių erdvių kontekste. Šiame skyrelyje apibrėšime erdvės $\mathbb{E}$ elementų statmenumą ir įrodysime kelis paprastus teiginius surištus su šia sąvoka.

9.5 apibrėžimas. *Erdvės $\mathbb{E}$ elementus x ir y vadinsime statmenais ir žymėsime $x \perp y$, jei $\langle x, y \rangle = 0$.*

Šios statmenumo savybės nesunkiai išvedamos, pasinaudojus skaliarinės daugybos savybėmis.

(1) *Nulinis elementas yra statmenas kiekvienam $x \in \mathbb{E}$;*

(2) *$x \perp x$ tada ir tik tada, kai $x = 0$.*

(3) *jei $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_n$ tai $x \perp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ su visais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$;*

Įrodysime dar keletą statmenumo savybių.

9.5 teiginys. *Jei $x \perp y$ tai teisinga Pitagoro teorema:*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Įrodymas. Tai matyti iš šių lygybių

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + ||y||^2.$$

∎

9.6 teiginys. (Apibendrinta Pitagoro teorema.) *Jei Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ elementų sekos (x_n) nariai yra poromis ortogonalūs, t.y. $x_k \perp x_j$ su visais $k \neq j$ ir $\sum_n ||x_n||^2 < \infty$, tada eilutė $\sum_n x_n$ konverguoja ir*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2.$$

Įrodymas. Naudodamiesi Pitagoro teorema ir ką tik suformuluota statmenumo (3) savybe, išvedame

$$\begin{aligned} ||x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n||^2 &= ||x_{m+1}||^2 + ||x_{m+2} + \cdots + x_n||^2 = \cdots \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k||^2 \end{aligned}$$

su visais $n > m \geq 1$. Lieka pritaikyti Banacho erdvės elementų eilutės Koši konvergavimo kriterijų (žr. **??** teiginį). ∎

9.7 teiginys. *Jei $x \perp y_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $y_n \to y$, tai $x \perp y$.*

Įrodymas. Pritaikę statmenumo apibrėžimą ir Švarco nelygybę, išvedame

$$|(x, y)| = |(x, y - y_n)| \leq ||x|| \cdot ||y - y_n||.$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty} ||y - y_n|| = 0$, tai $\langle x, y\rangle = 0$. ∎

9.6 apibrėžimas. *Sakykime, $A \subset \mathbb{E}, A \neq \emptyset$. Elementas $x \in \mathbb{E}$ vadinamas statmenu aibei A (žymėsime $x \perp A$), jei x statmenas kiekvienam $y \in A$. Aibę elementų, statmenų aibei $A \subset \mathbb{E}$, žymimėsime $A^{\perp}$ ir vadinsime aibės A ortogonaliuoju papildymu.*

Keletas statmenumo savybių surinkta šiuose teiginiuose.

9.8 teiginys. *Jei $x \perp A$, tai*

i) $x \perp [A]$;

ii) $x \perp \mathrm{tap}(A)$;

iii) $x \perp [\mathrm{tap}(A)]$.

iv) Jei A visur tiršta, tai $x = 0$.

Įrodymas. (i) išvedame iš 9.7 teiginio. Tikrai, jei $y \in [A]$, tai egzistuoja tokia seka $(y_n) \subset A$, kad $y = \lim_n y_n$. Kadangi $x \perp y_n$ su kiekvienu $n \geq 1$, iš 9.7 teiginio gauname, kad $x \perp y$. (ii) išvedame iš anksčiau įrodytos statmenumo (3) savybės. (iii) yra (i) ir (ii) išvada. (iv) įrodomas remiantis (i), nes $x \perp A$ reiškia šiuo atveju, kad $x \perp \mathbb{H}$. Bet tuomet $x \perp x$. Taigi $x = 0$. ∎

9.9 teiginys. *Jei $A \subset \mathbb{E}, A \neq \emptyset$, tai aibė $A^\perp$ yra tiesinė ir uždara.*

Įrodymas. Su bet kuriais $x, y \in A^\perp$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0,$$

kai $z \in A$. Taigi $\alpha x + \beta y \in A^\perp$, todėl aibė $A^\perp$ yra tiesinė. Dabar tarkime, $(x_n) \subset A^\perp$ ir $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Remiantis 9.7 teiginiu, $x_0 \perp A$. Taigi aibė A uždara. ∎

9.2.1 Hilberto erdvės ortogonalusis išskaidymas

Nagrinėkime bet kurią tiesinę normuotą erdevę $\mathbb{F}$. Atstumas $\varrho(x, L)$ nuo taško $x \in \mathbb{F}$ iki aibės $L \subset \mathbb{F}$ ($\rho(x, L) = \inf_{y \in L} ||x - y||$) charakterizuoja geriausią elemento x aproksimaciją aibės L elementais. Dažnai jis realizuojamas vienu ar keliais aibės L elementais. Pavyzdžiui, jei L – baigtiniamatis erdvės $\mathbb{F}$ poerdvis, tai kiekvieną $x \in \mathbb{F}$ atitinka toks $y_0 \in L$, kad $\rho(x, L) = ||x - y_0||$. Ar toks elementas vienintelis, priklauso nuo erdvės geometrinių savybių. Pavyzdžiui, paimkime erdvę $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||)$, kai $||\boldsymbol{x}|| = |x_1| + |x_2|$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ir aibę $L = \{\alpha \boldsymbol{e} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Čia vektorius $\boldsymbol{e} = (1, 1)$. Imkime tašką $\boldsymbol{x}_0 = (-1, 1)$. Tada atstumas

$$\rho(\boldsymbol{x}_0, L) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} ||\boldsymbol{x}_0 - \alpha \boldsymbol{e}|| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} (|1 - \alpha| + |1 + \alpha|) = 2$$

realizuojamas kiekvienu elementu $\boldsymbol{x}^* = \alpha \boldsymbol{e}, \quad \alpha \in [-1, 1]$. Geometriškai vienintelę geriausią $\boldsymbol{x}$ aproksimaciją elementu iš L įsivaizduojame kaip elemento $\boldsymbol{x}$ „ortogonalią" projekciją į aibę L. Šis vaizdinys tinka erdvėse su skaliarine daugyba.

Sakykime, $\mathbb{H}$ – Hilberto erdvė, $x \in \mathbb{H}$, o $M \subset \mathbb{H}$.

9.10 teiginys. *Jei M – iškila uždaroji Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ aibė ir $x \notin M$, tai egzistuoja vienintelis toks elementas $y \in M$, kad*

$$\rho(x, M) = ||x - y||.$$

Įrodymas. Pirmiausia pastebėkime, kad $d = \rho(x, M) > 0$, nes aibė M uždara. Remiantis tiksliojo apatinio rėžio apibrėžimu, kiekvieną $n \in N$ atitinka toks $y_n \in M$, kad

$$d \leq ||x - y_n|| \leq d + \frac{1}{n}. \tag{9.11}$$

Įsitikinkime, kad (y_n) – Koši seka. Pritaikę lygiagretainio taisyklę, gauname

$$2||x - y_n||^2 + 2||x - y_m||^2 = ||y_n - y_m||^2 + ||2x - y_n - y_m||^2.$$

Remiantis aibės M iškilumu, $(y_m + y_n)/2 \in M$. Todėl

$$||2x - y_n - y_m||^2 = 4||x - \frac{y_n + y_m}{2}||^2 \geq 4d^2.$$

Iš (9.11) nelygybės išvedame

$$||x - y_m||^2 < (d + \frac{1}{m})^2, \quad \text{ir} \quad ||x - y_n||^2 < (d + \frac{1}{n})^2.$$

Vadinasi,

$$||y_n - y_m||^2 < 2(d + \frac{1}{m})^2 + 2(d + \frac{1}{n})^2 - 4d^2 < \frac{8d + 4}{N},$$

kai $n, m > N$. Taigi (y_n) yra Koši seka. Remiantis erdvės $\mathbb{H}$ pilnumu, egzistuoja toks $y \in \mathbb{H}$, kad $y = \lim_{n \to \infty} y_n$. Kadangi aibė M uždara ir y yra jos ribinis elementas, tai $y \in M$. Iš (9.11) nelygybės, perėję prie ribos kai $n \to \infty$ gauname $d = ||x-y||$. Liko įsitikinti, kad elementas y yra vienintelis. Šiam tikslui tarkime, kad egzistuoja dar vienas elementas $z \in M$, su kuriuo $||x - z|| = d$. Pritaikę lygiagretainio taisyklę elementams $x - z$ ir $x - y$, gauname

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2||x-y||^2 + 2||x-z||^2 = ||y-z||^2 + 4||x - \frac{z+y}{2}||^2 \\ &\geq ||y-z||^2 + 4d^2. \end{aligned}$$

Tačiau taip gali būti vieninteliu atveju, kai $||y - z|| = 0$. Taigi $y = z$. ∎

Sakykime, $L \subset \mathbb{H}$ – Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ poerdvis. Akivaizdu, kad aibė L iškila. Pritaikę 9.10 teoremą gauname, kad kiekvieną $x \in \mathbb{H}\backslash L$ atitinka vienintelis $y \in L$, su kuriuo $\rho(x, L) = ||x - y||$. Panaudoję šį rezultatą, įrodome dvi labai svarbias išvadas.

9.11 teiginys. *Jei $L \subset \mathbb{H}$ – poerdvis, $x =\in \mathbb{H}\backslash L$ ir elementas $y \in L$ yra toks, kad $||x - y|| = \rho(x, L)$, tai $x - y \perp L$.*

Įrodymas. Tarkime, λ – bet kuris kompleksinis skaičius (realusis, jei $\mathbb{H}$ realioji erdvė), $h \in L$. Kadangi aibė L tiesinė, tai $y - \lambda h \in L$ ir $||x - y + \lambda h|| \geq \rho(x, L) = ||x-y||$. Pakėlę šios nelygybės abi puses kvadratu, išvedame $\langle x - y + \lambda h, x - y + \lambda h\rangle \geq \langle x - y, x - y\rangle$ ir

$$\lambda\langle h, x - y\rangle + \overline{\lambda}\langle x - y, h\rangle + \lambda\overline{\lambda}||h||^2 \geq 0.$$

Paėmę $\lambda = -\langle x-y, h\rangle/||h||^2$, gauname $-|\langle x-y, h\rangle|^2/||h||^2 \geq 0$. Ši nelygybė teisinga tik tada, kai $\langle x - y, h\rangle = 0$. Vadinasi, $x - y \perp h$ su kiekvienu $h \in L$. ∎

Kita labai svarbi išvada – teorema apie Hilberto erdvės ortogonalųjį dėstinį. Priminsime, kad $L^\perp$ yra ortogonalusis aibės L pildinys.

9.3 teorema. (Hilberto erdvės ortogonalus dėstinys.) *Jei L Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ poerdvis, tai $\mathbb{H} = L \oplus L^\perp$, t.y. kiekvieną $x \in \mathbb{H}$ vieninteliu būdu galime išreikšti*

$$x = y + z,$$

$y \in L$, $z \in L^\perp$.

Įrodymas. Imkime tą elementą $y \in L$, su kuriuo $||x - y|| = \rho(x, L)$, ir pažymėkime $z = x - y$. Pagal 9.11 teiginį $z \in L^{\perp}$. Lieka įrodyti, kad dėstinys $x = y + z$ yra vienintelis. Jei egzistuotų kitas toks dėstinys $x = z_1 + y_1$, tai turėtume $z - z_1 = y_1 - y$. Bet $z - z_1 \in L^{\perp}$, $y_1 - y \in L$, o $L \cap L^{\perp} = \{0\}$. Taigi $z - z_1 = 0$ ir $y_1 - y = 0$ arba $z = z_1,\ y = y_1$. ∎

9.10 pavyzdys. Su kiekvienu fiksuotu n, erdvė $\mathbb{R}^n$ gali būti sutapatinama su Hilberto erdvės ℓ_2 poerdviu L, susidedančiu iš tų elementų, kurių visos koordinatės, pradedant $n+1$-ąja yra lygios nuliui. Todėl kiekvieną $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ galime užrašyti

$$x = y + z,$$

kai $y = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in L$, o $z = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots) \in L^{\perp}$.

Iš teoremos apie ortogonalųjį dėstinį gauname tokią išvadą.

9.1 išvada. *Tiesinė aibė $L \subset \mathbb{H}$ visur tiršta tada ir tik tada, kai $L^{\perp} = \{0\}$.*

Įrodymas. *Pakankamumas.* Tarkime, $L^{\perp} = \{0\}$, bet L nėra visur tiršta. Vadinasi, egzistuoja toks $x_0 \in \mathbb{H}$, kad $x_0 \notin [L]$. Pritaikę teoremą apie ortogonalųjį dėstinį gauname $x_0 = y_0 + z_0$, $y_0 \in [L]$, $z_0 \in [L]^{\perp}$. Bet $[L]^{\perp} = L^{\perp}$. Tikrai, kadangi $L \subset [L]$, tai $[L]^{\perp} \subset L^{\perp}$. Priešingas įjungimas nesunkiai išvedamas iš skaliarinės daugybos tolydumo. Taigi $z_0 = 0$. Bet tada $x_0 = y_0 \in [L]$, o tai jau prieštara.
Būtinumas. Dabar tarkime, kad aibė L visur tiršta. Be to, tarkime, kad egzistuoja toks $z_0 \in \mathbb{H}, z_0 \neq 0$, kad $z_0 \perp L$. Remiantis skaliarinės daugybos tolydumu $z_0 \perp [L] = \mathbb{H}$. Šitaip gali būti tik tuo atveju, kai $z_0 = 0$. ∎