3 paskaita

3.1 Pilnosios metrinės erdvės

Metrinės erdvės pilnumo sąvoka yra viena pamatinių metrinių erdvių teorijai. Dar G. F. L. F. Kantoras savo 1872 metų darbe apie trigonometrines eilutes, apibrėždamas iracionaliuosius skaičius, panaudojo racionaliųjų skaičių sekų ribas. Taip jis „papildė“ realiųjų skaičių aibę. Panašiai samprotaudami galime „papildyti“ ir abstrakčias metrines erdves. Šiame skyrelyje apibrėšime pilnąsias metrines erdves, pateiksime pavyzdžius bei svarbias jų savybes. Įrodysime metrinės erdvės „užpildymo“ teoremą.

3.1.1 Apibrėžimas, pavyzdžiai

Nagrinėkime metrinę erdvę $(\mathbb{X}, d)$.

3.1 apibrėžimas. *Erdvės $\mathbb{X}$ elementų seka (x_n) vadinama Koši seka, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad n, m \geq N_\varepsilon.$$

Pritaikę trikampio nelygybės aksiomą ir konverguojančios sekos apibrėžimą, nesunkiai įrodome, kad kiekviena konverguojanti metrinės erdvės seka yra Koši seka. Gerai žinoma, kad realiųjų skaičių seka (a_n) konverguoja tada ir tik tada, kai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad $|a_n - a_m| < \varepsilon$ su visais $n, m \geq N_\varepsilon$. Kitaip tariant, seka (a_n) konverguoja metrinėje erdvėje $\mathbb{R}$ tada ir tik tada, kai ji yra Koši seka. Kita vertus, šis kriterijus teisingas ne kiekvienai metrinei erdvei. Iš tikrųjų, nagrinėkime metrinę erdvę $(\mathbb{X}, d)$, kai $\mathbb{X} = (0, 1)$ ir atstumo funkcija yra $d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{X}$. Šios erdvės seka $(x_n = 1/n, \quad n \in \mathbb{N})$ yra Koši. Tikrai, jei $\varepsilon > 0$ ir N_ε – mažiausias sveikasis skaičius, didesnis už ε^{-1}, tai

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

kai $n, m > N_\varepsilon$. Tačiau seka (x_n) nekonverguoja. Mat jei $t \in \mathbb{X}$ ir N_t yra mažiausias sveikasis skaičius didesnis už $2t^{-1}$ tai, imdami $n > N_t$, gauname

$$d(x_n, t) = \left|t - \frac{1}{n}\right| \geq t - \frac{1}{n} \geq t - \frac{1}{N_t} > t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} > 0.$$

Taigi su jokiu $t \in \mathbb{X}$ seka $(d(x_n, t), n \in \mathbb{N})$ neartėja prie nulio.

3.2 apibrėžimas. *Metrinė erdvė $\mathbb{X}$ vadinama pilnąja, jei kiekviena jos Koši seka konverguoja.*

Taigi pilnos metrinės erdvės yra tos, kurioms galioja sekų Koši konvergavimo kriterijus:

> *pilnos metrinės erdvės $\mathbb{X}$ seka $(x_n) \subset \mathbb{X}$ konverguoja tada ir tik tada, kai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ su visais $n, m \geq N_\varepsilon$.*

Norint įrodyti, kad Koši seka konverguoja, pakanka įsitikinti, kad kuris nors jos posekis konverguoja. Tai labai dažnai palengvina metrinės erdvės pilnumo įrodymą.

3.1 teiginys. *Jei Koši seka turi konverguojantį posekį, tai ji ir pati konverguoja.*

Įrodymas. Jei (x_n) – metrinės erdvės $\mathbb{X}$ Koši seka, tai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, kai $n, m \geq N_\varepsilon$. Jei (x_{n_k}) – konverguojantis sekos (x_n) posekis, imdami $n_k \geq N_\varepsilon$, gauname

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n \geq N_\varepsilon. \tag{3.1}$$

Jei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, (3.1) nelygybėje perėję prie ribos, kai $k \to \infty$, ir, pasinaudoję atstumo funkcijos tolydumu, gauname

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

Taigi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. ■

3.2 teiginys. *Jei $\mathbb{Y}$ – uždara pilnos metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibė, tai poerdvis $(\mathbb{Y}, d)$ – pilna metrinė erdvė.*

Įrodymas. Tikrai, jei $(x_n) \subset \mathbb{Y}$ – Koši seka, tai ji yra ir edvės $\mathbb{X}$ Koši seka. Vadinasi, egzituoja riba $\lim_{n\to\infty} x_n$, kuri yra aibės $\mathbb{Y}$ ribinis taškas. Kadangi aibė $\mathbb{Y}$ uždara, jai priklauso visi jos ribiniai taškai. Taigi seka (x_n) konverguoja ir erdvėje $\mathbb{Y}$. ∎

Kaip rodo aukščiau nagrinėtas nepilnos metrinės erdvės $((0,1),d)$ pavyzdys, poaibio $\mathbb{Y}$ uždarumas yra būtina sąlyga tam, kad $\mathbb{Y}$ būtų pilna metrinė erdvė.

Kadangi euklidinės $\mathbb{R}^p$ erdvės ir $\mathbb{C}^p$ erdvės konvergavimas yra ekvivalentus koordinačių sekų konvergavimui, akivaizdu, kad abi šios metrinės erdvės pilnos.

3.3 teiginys. *Sekų erdvės ℓ_p, $0 < p \leq \infty$, c_0, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ yra pilnos metrinės erdvės.*

Įrodymas. Įrodysime tik erdvių ℓ_p, kai $1 \leq p < \infty$, pilnumą, kitus atvejus palikdami skaitytojui vietoj pratimo.

Tarkime, $(\boldsymbol{x}_n)$ – erdvės ℓ_p Koši seka ir $\boldsymbol{x}_n = (x_{nk})$, $n \in \mathbb{N}$. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) < \varepsilon$, kai $n, m \geq N_\varepsilon$. Remiantis ℓ_p erdvės atstumo funkcijos d apibrėžimu (žr. **??** pavyzdį), iš pastarosios sąlygos išplaukia

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^p < \varepsilon^p, \tag{3.2}$$

kai $m, n \geq N_\varepsilon$. Iš šio įverčio gauname

$$|x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon,$$

kai $m, n \geq N_\varepsilon$ ir $k \in \mathbb{N}$. Vadinasi, su bet kuriuo $k \in \mathbb{N}$, realiųjų skaičių seka $(x_{nk}, n \in \mathbb{N})$ tenkina Koši konvergavimo kriterijų. Taigi egzistuoja riba $x_k = \lim_{n\to\infty} x_{nk}$. Pažymėkime $\boldsymbol{x} = (x_k)$. Pirmiausia įrodysime, kad $\boldsymbol{x} \in \ell_p$. Tuo tikslu fiksuokime $n_0 > N_\varepsilon$. Pritaikę Minkovskio nelygybę, turime

$$\Big(\sum_{k=1}^{J} |x_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{J} |x_{n_0k} - x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{J} |x_{n_0k}|^p\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq \varepsilon + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0k}|^p\Big)^{1/p}$$

su kiekvienu $J \geq 1$. Kadangi dalinių sumų seka $(\sum_{k=1}^{J} |x_k|^p, J \geq 1)$ aprėžta, eilutė $\sum_k |x_k|^p$ konverguoja. Vadinasi, $\boldsymbol{x} \in \ell_p$. Lieka įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n =$

$\boldsymbol{x}$ erdvėje ℓ_p. Imdami $J \geq 1$ ir $n, m \geq N_\varepsilon$, iš (3.2) gauname

$$\sum_{k=1}^{J} |x_{mk} - x_{nk}|^p < \varepsilon^p$$

ir

$$\sum_{k=1}^{J} |x_k - x_{nk}|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{J} |x_{mk} - x_{nk}|^p < \varepsilon^p.$$

Kadangi pastaroji nelygybė teisinga su visais $J \geq 1$, perėję prie ribos kai $J \to \infty$, gauname

$$d^p(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{nk}|^p < \varepsilon^p, \quad \text{kai} \quad n \geq N_\varepsilon. \tag{3.3}$$

Vadinasi, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ erdvėje ℓ_p. ■

3.4 teiginys. *Metrinės funkcijų erdvės $\mathcal{C}[a,b], \mathcal{C}(\mathbb{R}), \mathcal{B}[a,b], \mathcal{C}^k[a,b]$ yra pilnos.*

Įrodymas. Tarkime, (f_n) – erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ elementų Koši seka. Jei $\varepsilon > 0$, tai atsiras toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$d(f_m, f_n) = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad m, n \geq N_\varepsilon$$

Vadinasi, su kiekvienu $t \in [a,b]$,

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n, m \geq N_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Fiksavę $t \in [a,b]$, matome, kad skaičių sekai $(f_n(t))$ tenisingas Koši konvergavimo kriterijus. Taigi egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Ją pažymėkime $f_0(t)$. Dabar (3.4) nelygybėje perėję prie ribos kai $m \to \infty$, gauname

$$|f_0(t) - f_n(t)| < \varepsilon \ \text{ su visais } \ t \in [0,1], \quad \text{kai} \ \ n \geq N_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Pirmiausia įsitikinkime, kad funkcija f_0 yra tolydi. Tegu $\eta > 0$. Remdamiesi (3.5), parinkime tokį $N \in \mathbb{N}$, kad $|f_0(t) - f_N(t)| < \eta/3$ su visais $t \in [a,b]$. Kadangi kiekviena tolydi funkcija uždarame intervale yra tolygiai tolydi, funkcija f_N – tolygiai tolydi. Todėl egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $|f_N(t) -$

$f_N(s)| < \eta/3$, kai $|t-s| < \delta$. Taigi imdami tokius $t, s \in [a,b]$, kad $|t-s| < \delta$, turime

$$|f_0(s) - f_0(t)| \leq |f_0(s) - f_N(s)| + |f_N(s) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_0(t)| < \eta.$$

Vadinasi, funkcija f_0 tolygiai tolydi. O iš (3.5) išplaukia, kad $f_n \to f_0$ erdvėje $\mathcal{C}[a,b]$.

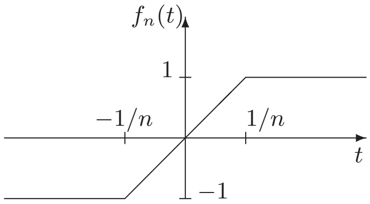
Panašiai įrodome ir likusių metrinių erdvių $\mathcal{C}(\mathbb{R}), \mathcal{B}[a,b], \mathcal{C}^k[a,b]$ pilnumą.

■

3.5 teiginys. *Metrinės erdvės $L_p(a,b)$, $\ 1 \leq p \leq \infty$, yra pilnos.*

Įrodymas. Be įrodymo. ■

3.1 pavyzdys. Erdvės $\mathcal{C}_p(a,b), p > 0$, nėra pilnos. Nekonverguojančios Koši sekos erdvėje $\mathcal{C}_p(-1,1)$ pavyzdys –



$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{kai } t \in [-1, -1/n], \\ nt, & \text{kai } t \in (-1/n, 1/n), \\ 1, & \text{kai } t \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

5 brėžinys: funkcija f_n.

Įsitikinkime, kad seka (f_n) nekonverguoja erdvėje $\mathcal{C}_1(-1,1)$ (bendrąjį atvejį paliekame skaitytojui vietoj pratimo). Nesunku matyti, kad

$$d(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)| dt \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Taigi (f_n) – Koši seka. Jei $f \in \mathcal{C}_1(-1,1)$, tai

$$d(f_n, f) = \int_{-1}^{-1/n} |1 + f(t)| dt + \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(t) - f(t)| dt + \int_{1/n}^{1} |1 - f(t)| dt.$$

Tarkime $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$. Iš

$$0 \leq \int_{-1}^{-1/n} |1 + f(t)| dt \leq d(f_n, f)$$

gauname, kad $\int_{-1}^{0} |1+f(t)|dt = 0$, t.y. $f(t) = -1$, kai $t \in [-1, 0)$. Analogiškai išvedame, kad $\int_{0}^{1} |1 - f(t)|dt = 0$, t.y. $f(t) = 1$, kai $t \in (0, 1]$. Tačiau taip negali būti jokiai tolydžiai funkcijai f. Vadinasi, seka (f_n) nekonverguoja.

3.1.2 Įdėtų rutulių teorema

Pilnoje metrinėje erdvėje teisinga labai svarbi įdėtųjų rutulių teorema, analogiška analizės kurse žinomai įdėtų intervalų lemai.

3.1 teorema. *Tarkime,* $\mathbb{X}$ *– pilna metrinė erdvė,* $(B_{r_n}(x_n))$ *– uždarų įdėtųjų rutulių seka, t.y* $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$ *su visais* $n \in \mathbb{N}$*. Be to, sakykime,* $r_n \to 0$*, kai* $n \to \infty$*. Tada egzistuoja vienintelis taškas* $x \in \mathbb{X}$*, kuris priklauso visiems rutuliams* $B_{r_n}(x_n),\ \ n \in \mathbb{N}$*.*

Įrodymas. Kadangi $\{x_n, x_{n+1}, ...\} \subset B_{r_n}(x_n)$, tai $d(x_{n+p}, x_n) \le r_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Vadinasi, (x_n) yra Koši seka ir, remiantis erdvės $\mathbb{X}$ pilnumu, konverguoja į elementą, sakykime, $x \in \mathbb{X}$. Be to,

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \subset B_{r_k}(x_k).$$

Taigi su kiekvienu $k \ge 1$ elementas x yra aibės $B_{r_k}(x_k)$ ribinis taškas. Kadangi uždarasis rutulys yra uždara aibė, tai $x \in B_{r_k}(x_k)$ su visais $k = 1, 2, ...$ Jei y – kitas taškas priklausantis visiems rutuliams $B_{r_k}(x_k)$, tai

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) \le 2r_n \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Vadinasi, $d(x, y) = 0$. Taigi $x = y$. ■

Uždarų įdėtųjų rutulių teorema charakterizuoja pilnas metrines erdves: *jei metrinėje erdvėje* $(\mathbb{X}, d)$ *bet kuri įdėtųjų uždarų rutulių seka, kurių spinduliai konverguoja į nulį, turi vienintelį bendrą tašką, tai erdvė* $\mathbb{X}$ *yra pilna.* Tikrai, paimkime bet kurią erdvės $\mathbb{X}$ Koši seką (x_n). Tegu $(N_k, k \in \mathbb{N})$ yra tokia didėjanti sveikųjų skaičių seka, kad

$$d(x_{N_k}, x_m) \le 2^{-k-1}, \quad \text{kai} \quad m \ge N_k.$$

Nagrinėkime uždarųjų rutulių seką $B_k = B(x_{N_k}, 2^{-k}), k \ge 1$. Įsitikinkime, kad tai įdėtųjų rutulių seka. Tikrai, jei $x \in B_{k+1}$, tai

$$d(x_{N_k}, x) \le d(x, x_{N_{k+1}}) + d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \le 2^{-(k+1)} + 2^{-k-1} = 2^{-k}.$$

Vadinasi, $x \in B_k$. Taigi $B_{k+1} \subset B_k$ su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$ ir seka (B_k) turi bendrą tašką x, t.y. $d(x_{N_k}, x) < 2^{-k}$ su visais $k \geq 1$. Tai, savo ruožtu reiškia, kad seka (x_{N_k}) konverguoja. Kadangi Koši seka (x_n) turi konverguojantį posekį, todėl ir pati konverguoja (žr. 3.1 teiginį).

3.2 Metrinių erdvių atvaizdžiai

3.2.1 Tolydieji atvaizdžiai

Tarkime, turime dvi metrines erdves $(\mathbb{X}, d)$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ ir aibę $X_0 \subset \mathbb{X}$. Nagrinėkime atvaizdį $f : X_0 \to \mathbb{Y}$.

3.3 apibrėžimas. *Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas tolydžiuoju taške $x_0 \in X_0$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, kad*

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \textit{su visais} \quad x \in S_\delta(x_0) \cap X_0.$$

Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas tolydžiuoju, jei jis yra tolydus kiekviename aibės X_0 taške.

3.4 apibrėžimas. *Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ vadinamas tolygiai tolydžiu, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad*

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \textit{su visais tokiais} \quad x, y \in X_0, \quad \textit{kuriems} \quad d(x, y) < \delta.$$

Kiekviena tolygiai tolydi funkcija yra tolydi, bet ne atvirkščiai. Pavyzdžiui, funkcija $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, metrinėje erdvėje $\mathbb{R}$ yra tolydi, bet ne tolygiai tolydi. (Įsitikinkite.)

3.2 pavyzdys. Fiksuokime metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ tašką $a \in \mathbb{X}$ ir nagrinėkime funkciją $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$ su visais $x \in \mathbb{X}$. Funkcija f yra tolygiai tolydi. Tai matome, pritaikę nelygybę

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y),$$

kuri lengvai išvedama iš trikampio nelygybės aksiomos.

3.3 pavyzdys. Bet kuri funkcija, apibrėžta diskrečiojoje metrinėje erdvėje, yra tolydi. (Įrodykite.)

3.2 teorema. *Atvaizdis $f : X_0 \to \mathbb{Y}$ yra tolydus taške $x_0 \in X_0$ tada ir tik tada, kai $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ su bet kuria konverguojančia į x_0 seka $(x_n) \subset X_0$.*

Įrodymas. Tarkime, atvaizdis f tolydus taške x_0 ir seka (x_n) konverguoja į x_0. Remiantis tolydumo apibrėžimu, kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad nelygybė $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ teisinga, kai $x \in X_0$ ir $d(x, x_0) < \delta$. Pagal ribos apibrėžimą, egzistuoja toks $N_\delta \in \mathbb{N}$, kad $d(x_n, x_0) < \delta$, kai $n \geq N_\delta$. Imdami $n \geq N_\delta$, gauname $\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Vadinasi, $f(x_n) \to f(x_0)$, kai $n \to \infty$.

Dabar tarkime, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, kai $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Jei f nėra tolydi taške x_0, tai egzistuoja toks $\varepsilon > 0$ su kuriuo teisinga ši savybė: bet kurį $\delta > 0$ atitinka toks $x \in X_0$, kad $d(x, x_0) < \delta$, bet $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Imdami $\delta = 1/n$, gauname seką $(x_n) \subset X_0$, su kuria $\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$, nors $d(x_n, x_0) < 1/n$. Akivaizdu, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, bet seka $(f(x_n))$ nekonverguoja į $f(x_0)$. Ši prieštara įrodo, kad prielaida buvo klaidinga. ∎

Atvaizdžių tolydumą galime charakterizuoti atvirųjų aibių terminais.

3.3 teorema. *Atvaizdis $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tolydus tada ir tik tada, kai su kiekviena atviraja aibe $A \subset \mathbb{Y}$, pirmvaizdis $f^{-1}(A)$ – atviroji aibė.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, atvaizdis f tolydus ir $A \subset \mathbb{Y}$ – atviroji aibė. Jei $x \in f^{-1}(A)$, tai $f(x) \in A$. Kadangi aibė A atvira, egzistuoja toks $\varepsilon > 0$ su kuriuo $S_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Iš funkcijos f tolydumo išplaukia, kad spindulį ε atitinka toks $\delta > 0$, su kuriuo $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, kai $d(x, y) < \delta$. O tai reiškia, kad su kiekvienu $y \in S_\delta(x)$, $f(y) \in A$ arba $S_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$. Taigi aibė $f^{-1}(A)$ atvira.

Pakankamumas. Fiksuokime $x \in \mathbb{X}$. Kokį bepaimtume atvirąjį rutulį $S_\varepsilon(f(x))$, jo pirmvaizdis $f^{-1}(S_\varepsilon(f(x))$ yra atvira aibė ir jai priklauso x. Todėl egzistuoja toks $\delta > 0$, su kuriuo $S_\delta(x) \subset f^{-1}(S_\varepsilon(f(x))$. O tai, savo ruožtu reiškia, kad jei $d(x, y) < \delta$, tai $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Vadinasi, funkcija f tolydi taške x. ∎

Labai svarbi yra sudėtinės funkcijos tolydumo savybė. Jos įrodymą paliekame skaitytojui vietoj pratimo.

3.4 teorema. *Tarkime,* $(\mathbb{X}, d)$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ *ir* $(\mathbb{Z}, q)$ *– metrinės erdvės. Be to, tarkime, funkcija* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *yra tolydi taške* $x \in \mathbb{X}$, *o funkcija* $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ *– tolydi taške* $y = f(x) \in \mathbb{Y}$ *. Tuomet kompozicija* $g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ *yra tolydi taške* x.

Priminsime, kad bet kuriai bijekcijai $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ atvirkštinis atvaizdis $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ yra apibrėžtas pagal taisyklę $f^{-1}(y) = x$, jei $f(x) = y$.

3.5 apibrėžimas. *Tarkime,* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *– bijekcija. Jei abu atvaizdžiai* f *ir* f^{-1} *yra tolydūs, tai atvaizdis* f *vadinamas homeomorfiniu. Jei toks atvaizdis egzistuoja, tai metrinės erdvės* $\mathbb{X}$ *ir* $\mathbb{Y}$ *vadinamos homeomorfinėmis.*

3.6 apibrėžimas. *Bijekcija* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *vadinama izometrija, jei*

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

su visais $x, y \in \mathbb{X}$. *Jei egzistuoja erdvių* $\mathbb{X}$ *ir* $\mathbb{Y}$ *izometrija, tai sakome kad tos erdvės yra izometriškos.*

Akivaizdu, kad izometrija yra taip pat ir homeomorfizmas, bet ne atvirkščiai. Pavyzdžiui, erdvės $\mathbb{X} = (-1, 1)$ ir $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ su euklidiniu atstumu tarp realių skaičių yra homeomorfinės, bet ne izometriškos. Funkcija $f(x) = tg(\pi x/2)$ yra erdvių $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ homeomorfizmas.

Homeomorfizmas išsaugo visas pagrindines topologines metrinių erdvių savybes: atvirosios aibės atvaizduojamos į atvirąsias, ribiniai taškai į ribinius. Izometrinis atvaizdis išsaugo dar ir metrines savybes.

3.2.2 Sutraukiantieji atvaizdžiai

Šiame skyriuje įrodysime svarbią Banacho teoremą apie pilnos metrinės erdvės atvaizdžio nejudamąjį tašką. Šią teoremą taikysime kai kurioms lygtims spręsti.

Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ – metrinė erdvė.

3.7 apibrėžimas. *Atvaizdis* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *vadinamas sutraukiančiuoju, jei egzistuoja toks teigiamas skaičius* $\alpha < 1$, *kad*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \text{su visais} \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

Taškas x, su kuriuo $f(x) = x$, vadinamas atvaizdžio f *nejudamuoju tašku.* Sutraukiančiojo atvaizdžio nejudamojo taško egzistavimą 1939 metais įrodė S. Banachas.

3.5 teorema. *Tarkime, $\mathbb{X}$ – pilna metrinė erdvė. Jei atvaizdis $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sutraukiantysis, tai egzistuoja vienintelis $x \in \mathbb{X}$, su kuriuo $f(x) = x$.*

Įrodymas. Kadangi atvaizdis f yra sutraukiantis, egzistuoja toks skaičius $\alpha \in (0, 1)$, su kuriuo

$$d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x, y), \quad \text{kai} \ \ x, y \in \mathbb{X}. \tag{3.6}$$

Fiksuokime bet kurį elementą $x_0 \in \mathbb{X}$ ir apibrėžkime paprastųjų iteracijų seką

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Įrodysime, kad (x_n) – Koši seka. Remiantis jos narių apibrėžimu ir (3.6) savybe,

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \le \alpha d(x_k, x_{k-1}),$$

kai $k \in \mathbb{N}$. Pakartoję šią nelygybę k kartų, gauname

$$d(x_{k+1}, x_k) \le \alpha^k d(x_1, x_0). \tag{3.7}$$

Tarkime, $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Naudodami trikampio nelygybę ir (3.7) įvertį, išvedame

$$\begin{aligned} &d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \le \\ &(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \le \\ &\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Kadangi $0 < \alpha < 1$, tai $\alpha^n \to 0$, kai $n \to \infty$ ir iš (3.8) išplaukia $d(x_n, x_m) \to 0$, kai $n, m \to \infty$. Vadinasi, (x_n) – Koši seka. Kadangi erdvė $\mathbb{X}$ pilna, seka (x_n) konverguoja. Pažymėkime $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Kadangi funkcija f tolydi, tai $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Kita vertus, $f(x_n) = x_{n+1}$, todėl

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Vadinasi, $f(x) = x$.

Lieka įrodyti, kad nejudamasis taškas yra vienintelis. Jei egzistuoja dar vienas taškas $y \in \mathbb{X}$, su kuriuo $f(y) = y$, tai

$$d(y, x) = d(f(y), f(x)) \leq \alpha d(y, x).$$

Ši nelygybė teisinga vieninteliu atveju, kai $d(x, y) = 0$. Vadinasi, $x = y$. ∎

Iš teoremos įrodymo matome, kad funkcijos f nejudamąjį tašką galime rasti naudodami paprastųjų iteracijų seką (x_n), pradinį iteracijos narį x_0 pasirinkdami laisvai. Naudodami iš (3.8) formulės gaunamą ivertį

$$d(x_n, x) = \lim_{m \to \infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(f(x_0), x_0),$$

galime apskaičiuoti nejudamojo taško x n-ojo artinio x_n tikslumą. Iš šios formulės matome, kad iteracijų sekos (x_n) konvergavimo į nejudamą tašką greitis priklauso nuo x_0 parinkimo.

Sutraukiančiojo atvaizdžio principą galime apibendrinti. Tarkime, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Su bet kuriuo $n \in \mathbb{N}$ funkcijos f n-asis laipsnis f^n apibrėžiamas taip: $f^1 = f$,

$$f^n(x) = f^{n-1}(f(x)), \quad \text{kai} \quad x \in \mathbb{X} \quad \text{ir} \quad n > 1.$$

Pagal šį indukcinį apibrėžimą, $f^n(f(x)) = f(f^n(x))$ su visais $x \in X$.

3.6 teorema. *Tarkime, $\mathbb{X}$– pilna metrinė erdvė. Jei egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, kad atvaizdis $f^n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ yra sutraukiantis, tai egzistuoja vienintelis atvaizdžio f nejudomas taškas.*

Įrodymas. Jei teoremos sąlygos išpildytos kai $n = 1$, tai tvirtinimas išplaukia iš 3.5 teoremos. Tarkime, $n > 1$. Nagrinėkime sutraukiantįjį atvaizdį $g = f^n$. Remiantis 3.5 teorema, egzistuoja vienintelis šio atvaizdžio nejudamasis taškas, sakykime, $x_0 : g(x_0) = x_0$. Tada

$$\begin{aligned} &g\big(f(x_0)\big) = f^n(f(x_0)) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = \\ &f\big(g(x_0)\big) = f(x_0). \end{aligned}$$

Gauname, kad elementas $f(x_0)$ taip pat yra atvaizdžio g nejudamasis taškas. Kadangi toks taškas gali būti tik vienas, tai $x_0 = f(x_0)$. ∎

3.2.3 Banacho teoremos pritaikymo pavyzdys

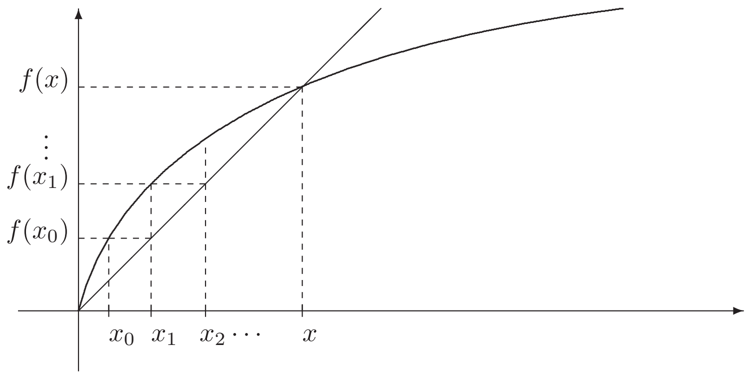
3.4 pavyzdys. Tarkime, $f : [a, b] \to [a, b]$ – duota tolydi funkcija ir reikia surasti tokį intervalo $[a, b]$ tašką x su kuriuo $f(x) = x$ (žr. 5 brėžinį). Norėdami šio uždavinio sprendimui pritaikyti teoremą apie nejudamą tašką, intervalą $[a, b]$ nagrinėkime kaip metrinę erdvę su įprastine metrika $d(x, y) = |x - y|$. Taip gauta metrinė erdvė, pažymėkime ją $\mathbb{X}$, yra pilna ir funkcija f atvaizduoja ją į save: $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Išspręsti lygtį $f(x) = x$ reiškia surasti atvaizdžio f nejudamą tašką. Jeigu

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \alpha < 1,$$

tai atvaizdis f – sutraukiantis, nes pagal Lagranžo formulę, su visais $x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\theta)(x - y)| \leq \alpha |x - y| \quad (\text{čia } \ \theta \in [x, y]).$$

Taigi remiantis Banacho teorema, egzistuoja vienintelis atvaizdžio f nejudamas taškas $x \in [a, b]$, kuris yra ieškomasis sprendinys ir gali būti surastas paprastųjų iteracijų metodu (žr. 5 brėžinį.)



6 brėžinys: Lygties $f(x) = x$ sprendimas paprastosiomis iteracijomis

Pirmasis iteracijų metodą nagrinėtos lygties sprendimui pritaikė Č. E. Pikaras. Tai pasitarnavo S. Banachui bendresnės teoremos apie sutraukiančių atvaizdžių nejudamus taškus įrodymui.

3.5 pavyzdys. Tirsime integralinę lygtį

$$g(t) - \lambda \int_a^b K(t, s, g(s))ds = f(t), \quad t \in [a, b]; \tag{3.9}$$

čia g – ieškomoji argumento t funkcija; f – duotoji argumento t funkcija; K – duotoji trijų kintamųjų funkcija; λ – konstanta.

Skaičių λ galime prijungti prie funkcijos K, bet, kaip matysime vėliau, (3.9) forma yra patogesnė.

3.7 teorema. *Tarkime, patenkintos šios sąlygos:*

a) $f \in L_2(a, b)$;

b) *egzistuoja tokia dviejų argumentų funkcija* $N : (a, b)^2 \to \mathbb{R}$, *kad*

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \le N(t, s)|u - v| \quad \text{su visais} \;\; s, t, u, v \in [a, b];$$

be to,

$$\int_a^b \int_a^b N^2(t, s)dsdt = P^2 < \infty;$$

c) *funkcija* $K(t, s, 0)$ *yra tolydi abiejų argumentų* t *ir* s *atžvilgiu;*

d) $|\lambda| < 1/P$.

Tuomet (3.9) *lygtis turi vienintelį sprendinį* $g \in L_2(a, b)$.

Įrodymas. Funkciją $F : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ apibrėžkime taip:

$$F(g)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, g(s))ds + f(t), \quad t \in [a, b].$$

Nesunku įsitikinti, kad (3.9) lygties sprendinys yra funkcijos F nejudamasis taškas. Jei įrodysime, kad atvaizdis F yra sutraukiantis, tai įrodysime, kad F turi vienintelį nejudamąjį tašką. Iš teoremos sąlygų išvedame

$$\begin{aligned} d^2(F(g), F(f)) &= \lambda^2 \int_a^b \Big(\int_a^b (K(t, s, g(s)) - K(t, s, f(s))ds \Big)^2 dt \\ &\le \lambda^2 \int_a^b \Big(\int_a^b N(t, s)|g(s) - f(s)|ds \Big)^2 dt \\ &\le \lambda^2 P^2 d^2(g, f). \end{aligned}$$

Paskutiniąją nelygybę gavome pritaikę Hiolderio (**??**) nelygybę kai $p = q = 2$. Taigi $d(F(g), F(f)) \leq |\lambda| P d(g, f)$. Kadangi $|\lambda| < 1/P$, atvaizdis F sutraukiantis. ∎