2 paskaita

2.1 Metrinių erdvių aibės, sekos ir atvaizdžiai

Kai aibėje apibrėžtas atstumas tarp taškų, galime klasifikuoti tiek jos poaibius, tiek taškus poaibių atžvilgiu. Šiame skyrelyje apibrėšime atviras ir uždaras aibes, vidinius, išorinius, izoliuotus, ribinius bei krašto taškus. Be to, susipažinsime su metrinės erdvės elementų sekos riba ir tolydžiais metrinių erdvių atvaizdžiais.

2.1.1 Aibių ir taškų klasifikavimas

Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibė

$$S_r(y) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, y) < r\}$$

vadinama *atviruoju*, o

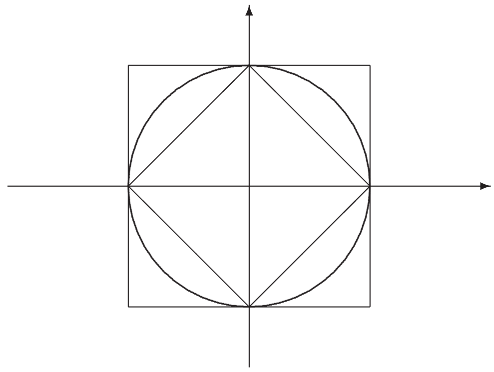
$$B_r(y) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, y) \leq r\}$$

– *uždaruoju rutuliu* su spinduliu r ir centru taške $y \in \mathbb{X}$ (kai rutulio spindulio išraiška sudėtingesnė, naudosime taip pat žymenis $S(y; r)$ ir $B(y; r)$). Rutuliai yra bene svarbiausios metrinių erdvių aibės. Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

2.1 pavyzdys. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ skirtingas metrikas atitiks skirtingi rutuliai. Įprastas euklidinis rutulys gaunamas su euklidine atstumo funkcija

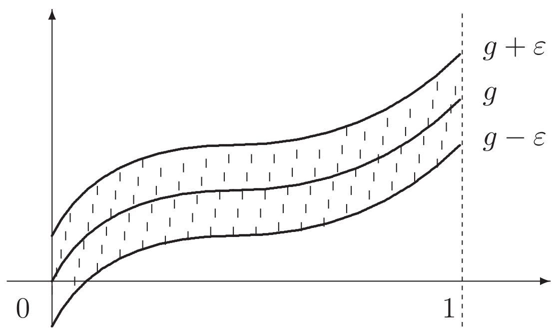
$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big)^{1/2},$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$. O štai atstumo funkcijas $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ ir $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ atitinkantys rutuliai turi visai kitokį vaizdą (žr. 1 brėžinį).



1 brėžinys: erdvės R^2 rutuliai, atitinkantys atstumo funkcijas d_∞, d_2 ir d_1

2.2 pavyzdys. Nesunku interpretuoti erdvės $\mathcal{C}[0,1]$ rutulius. Nagrinėkime funkciją $g \in \mathcal{C}[0,1]$. Jei $f \in B_r(g)$, tai $\sup_{t\in[0,1]} |g(t) - f(t)| \leq r$. Tai yra, $g(t) - r \leq f(t) \leq g(t) + r$ su visais $t \in [0,1]$. Vadinasi rutulį $B_r(g)$ sudaro visos tokios tolydžiosios funkcijos $f \in \mathcal{C}[0,1]$, kurių grafikai telpa juostoje $[g(t) - r, g(t) + r], t \in [0,1]$ (užbrūkšniuota juosta 2 brėžinyje).



2 brėžinys: erdvės $C[0,1]$ rutulys $B_\varepsilon(g)$

2.3 pavyzdys. Nagrinėkime metrinę erdvę $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Su bet kuriais $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1.$$

Taigi bet kuris erdvės $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ rutulys, kurio spindulys yra didesnis nei vienas, sutampa su aibe $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.1 apibrėžimas. *Aibė A vadinama taško x aplinka, jei egzistuoja toks $r > 0$, kad $S_r(x) \subset A$. Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama atvirąja, jei ji yra kiekvieno savo taško aplinka.*

Pagal susitarimą tuščioji aibė laikoma atvira. O šių savybių įrodymui tereikia pritaikyti atvirosios aibės apibrėžimą.

2.1 teiginys. *Bet kurios metrinės erdvės*

- *baigtinė atvirųjų aibių sankirta – atviroji aibė;*
- *bet kurio skaičiaus atvirųjų aibių sąjunga – atviroji aibė.*

2.4 pavyzdys. Metrinės erdvės $\mathbb{R}$ aibė $I_n = (-1/n, 1/n)$ yra atvira su kiekvienu $n \geq 1$. Tačiau jų sankirta $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ nėra atvira.

Remiantis antrąja 2.1 teiginyje pateikta atvirųjų aibių savybe, apibrėžiamas aibės vidus.

2.2 apibrėžimas. *Aibė*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{B \subset A} B,$$

kai sąjunga imama pagal visas atvirąsias aibes $B \subset A$, vadinama aibės A vidumi.

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad aibės A vidus $\overset{\circ}{A}$ yra didžiausia atviroji aibė, telpanti aibėje A.

2.3 apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama uždarąja, jei jos papildinys $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ – atviroji aibė.*

Pastebėkime, kad atvirasis rutulys yra atviroji aibė, o uždarasis rutulys – uždaroji. Be to, tuščioji aibė $\emptyset$ pagal susitarimą laikoma kartu ir atvirąja ir uždarąja. Aibė $\mathbb{X}$ taip pat yra kartu ir atvira ir uždara.

2.2 teiginys. *Bet kurios metrinės erdvės*

- *baigtinė uždarųjų aibių sąjunga – uždaroji aibė;*
- *bet kuri uždarųjų aibių sankirta – uždaroji aibė.*

Įrodymas. Reikia pasinaudoti 2.1 teiginiu bei šiomis, gerai žinomomis, De Morgano tapatybėmis:

$$\bigcap_i (\mathbb{X} \backslash A_i) = \mathbb{X} \backslash \bigcup_i A_i, \quad \bigcup_i (\mathbb{X} \backslash A_i) = \mathbb{X} \backslash \bigcap_i A_i.$$

Čia (A_i) – bet kuri aibės $\mathbb{X}$ poaibių šeima. ∎

2.5 pavyzdys. Metrinės erdvės $\mathbb{R}$ aibė $J_n = [0, 1 - 1/n]$ yra uždara su kiekvienu $n \geq 1$, bet sąjunga $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = [0, 1)$ nėra uždara.

Remiantis antrąja 2.2 teiginyje pateikta uždarųjų aibių savybe, apibrėžiamas aibės uždarinys.

2.4 apibrėžimas. *Aibė*

$$[A] = \bigcap_{B \supset A} B,$$

kai sankirta imama pagal visas uždarąsias aibes B, apimančias aibę A, vadinama aibės A uždariniu.

Vėl siūlome skaitytojui pačiam įsitikinti, kad uždarinys $[A]$ – mažiausia uždaroji aibė, kurioje telpa A. Sąryšį tarp aibės uždarinio ir jos vidaus aprašo šis teiginys.

2.3 teiginys. *Tarkime, $A \subset \mathbb{X}$. Teisingi šie sąryšiai:*

- $\overset{\circ}{A} = \mathbb{X} \backslash [A^c]$;
- $[A] = \mathbb{X} \backslash \overset{\circ}{A^c}$.

Įrodymas. Kadangi $A^c \subset [A^c]$, tai $\mathbb{X} \backslash [A^c] \subset \mathbb{X} \backslash A^c = A$. Bet aibė $\mathbb{X} \backslash [A^c]$ yra atvira, todėl $\mathbb{X} \backslash [A^c] \subset \overset{\circ}{A}$. Kita vertus, aibė $\mathbb{X} \backslash \overset{\circ}{A}$ yra uždara ir $A^c \subset \mathbb{X} \backslash \overset{\circ}{A}$. Todėl $[A^c] \subset \mathbb{X} \backslash \overset{\circ}{A}$. Vadinasi, $\overset{\circ}{A} \subset \mathbb{X} \backslash [A^c]$. Tai įrodo pirmąją lygybę. Antroji gaunama pritaikius pirmąją lygybę aibės A papildiniui A^c. ∎

2.5 apibrėžimas. *Aibė* $[A]\setminus \overset{\circ}{A}$ *vadinama aibės* A *kraštu ir žymima* ∂A.

Iš 2.3 teiginio gauname, kad

$$\partial A = [A] \cap [A^c] = \mathbb{X}\setminus(\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{A^c}).$$

Vadinasi, aibės kraštas yra uždara aibė ir sutampa su savo papildinio kraštu: $\partial A = \partial A^c$. Be to, akivaizdu, kad

$$[A] = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

ir

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{A^c} \cup \partial A.$$

2.6 pavyzdys. Metrinės erdvės $\mathbb{R}$ aibei $A = (0, 1]$,

- $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$,
- $\overline{A} = [0, 1]$,
- $\partial A = \{0; 1\}$.

Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^n$ atvirojo rutulio kraštas yra sfera. (Įsitikinkite.) Tai atitinka įprastinę geometrinę aibės krašto interpretaciją. Tačiau interpretuojant reikia būti atsargiems.

Visi metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ taškai aibės $A \subset \mathbb{X}$ atžvilgiu skirstomi į *vidinius* (priklausančius aibės vidui $\overset{\circ}{A}$), *išorinius*, *kraštinius* (priklausančius kraštui ∂A), *ribinius* ir *izoliuotus*. Taškas $x \in \mathbb{X}$ vadinamas aibės A

- *išoriniu tašku*, jei egzistuoja x aplinka (arba rutulys $S_r(x)$), nesikertanti (nesikertantis) su aibe A;
- *ribiniu tašku*, jei kiekvienoje jo aplinkoje (arba kiekviename rutulyje $S_r(x)$) yra bent vienas aibės A taškas, nesutampantis su x;
- *izoliuotuoju tašku*, jei $x \in A$ ir egzistuoja tokia x aplinka (arba egzistuoja toks rutulys $S_r(x)$), kurioje (kuriame) daugiau aibės A taškų nėra.

Pastebėsime, kad $x \in \partial A$ tada ir tik tada, kai kiekviename netuščiame atvirame rutulyje su centru taške x yra bent vienas aibės A ir bent vienas aibės A^c taškas. Taigi aibės izoliuotieji taškai priklauso jos kraštui.

2.4 teiginys. *Aibės A uždarinį sudaro jos ribiniai ir izoliuotieji taškai.*

Įrodymas. Jei $x \notin [A] = \cap_{A \subset B} B$, tai egzistuoja tokia uždaroji aibė $B \supset A$, kad $x \notin B$. Vadinasi, $x \in B^c$. Aibė B^c atvira, todėl egzistuoja toks $r > 0$, kad $S_r(x) \subset B^c$. Iš čia išplaukia, kad $S_r(x) \cap A = \emptyset$. Vadinasi, x nėra aibės A ribinis taškas. Taigi įrodėme, kad kiekvienas aibės A ribinis taškas priklauso jos uždariniui $[A]$. Akivaizdu, kad izoliuotieji aibės A taškai taip pat priklauso jos uždariniui.

Dabar tarkime, $x \in [A]$ ir x nėra izoliuotasis aibės A taškas. Jei $x \in A$, tai akivaizdu, kad x – ribinis taškas. Tarkime, $x \notin A$. Remiantis aibės uždarinio apibrėžimu, x priklauso kiekvienai uždarai aibei $B \supset A$. Jei tarsime, kad egzistuoja toks $r > 0$, su kuriuo $S_r(x) \cap A = \emptyset$, gausime prieštarą, nes taškas x nepriklausys uždarajai aibei $S_r^c(x) \supset A$. ■

Izoliuotieji ir ribiniai aibės taškai dar vadinami jos *sąlyčio* taškais. Ką tik įrodytą teiginį galime performuluoti taip: *aibės uždarinys sutampa su jos sąlyčio taškų aibe.*

2.5 teiginys. *Aibė A yra atvira tada ir tik tada, kai $A = \overset{\circ}{A}$, o uždara – tada ir tik tada, kai $A = [A]$.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad $A \subset [A]$. Įrodysime, kad $A \supset [A]$, jei aibė A uždara. Tarkime, $x \notin A$. Kadangi aibė A^c atvira ir $x \in A^c$, tai egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, su kuriuo $S_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Tai reiškia, kad $S_\varepsilon^c(x) \supset A$. Kadangi aibė $S_\varepsilon^c(x)$ uždara, remiantis aibės uždarinio apibrėžimu, $x \notin [A]$. Vadinasi, $A \supset [A]$.

Analogiškai įrodome, kad atvirai aibei A teisingas sąryšis $\overset{\circ}{A} \supset A$. Kita vertus $\overset{\circ}{A} \subset A$ pagal aibės vidaus apibrėžimą. ■

2.6 apibrėžimas. *Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibės A diametru vadinamas skaičius*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Aibė A vadinama aprėžta, jei jos diametras yra baigtinis.

Akivaizdūs yra šie teiginiai:

- jei $A \subset B$, tai $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$;
- $\operatorname{diam}(A) = 0$ tada ir tik tada, kai aibėje A yra tik vienas elementas;
- $\operatorname{diam}(S_r(x)) = \operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.

Beje, lygybės paskutiniojoje nelygybėje gali ir nebūti. Pavyzdžiui, tegu $B_r(\boldsymbol{x})$ yra erdvės $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ rutulys. Kaip matėme 2.3 pavyzdyje, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq 1$ su bet kuriais $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Taigi, $\operatorname{diam}(B_r(\boldsymbol{x})) \leq 1$ su visais $r \geq 1$.

2.1.2 Sekos riba ir sankaupos taškai

Tegu $(\mathbb{X}, d)$ – metrinė erdvė.

2.7 apibrėžimas. *Elementas $x_0 \in \mathbb{X}$ vadinamas sekos $(x_n) \subset \mathbb{X}$ riba, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad*

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \textit{su visais} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

Jei x_0 yra sekos (x_n) riba, rašysime $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ arba $x_n \to x_0$, kai $n \to \infty$, ar dar trumpiau $x_n \to x_0$ ir sakysime, kad *seka* (x_n) *konverguoja į elementą* x_0. Seka (x_n) vadinama *konverguojančia*, jei egzistuoja toks elementas x_0, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prisiminę skaitinės sekos ribos apibrėžimą, matome, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Sekos riba, jei ji egzistuoja, yra vienintelė. Tikrai, jei x_0 ir x_0' – sekos (x_n) ribos, tai atstumo funkcijai d pritaikę trikampio nelygybę ir simetriškumo aksiomą, išvedame

$$d(x_0, x_0') \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, x_0').$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname $d(x_0, x_0') = 0$. Pagal vienaties aksiomą, $x_0 = x_0'$. Kaip matome, būtent (M2) aksioma garantuoja konverguojančios sekos ribos vienatį.

Aibės ribinio taško prasmę paaiškina šis teiginys.

2.6 teiginys. *Elementas $x \in \mathbb{X}$ yra aibės $A \subset \mathbb{X}$ ribinis taškas tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia seka $(x_n) \subset A$, $x_n \neq x$, $n \in \mathbb{N}$, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Įrodymas. Tarkime, x – aibės A ribinis taškas. Remiantis ribinio taško apibrėžimu, su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ rutulyje $S_{1/n}(x)$ egzistuoja toks x_n, kad $x_n \in A$ ir $x_n \neq x$. Kadangi $d(x_n, x) < 1/n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, seka (x_n) konverguoja į elementą x.

Atvirkščiai, jei egzistuoja tokia seka $(x_n) \subset A, x_n \neq x,\ n \in \mathbb{N}$, kad $x_n \to x$, kai $n \to \infty$, tai, imdami bet kurį $r > 0$, rasime tokį N, kad $d(x_N, x) < r$. Vadinasi, $x_N \in S_r(x)$. Taigi kiekviename rutulyje su centru taške x randame aibės A elementą, nesutampantį su x. Vadinasi, x – aibės A ribinis taškas. ∎

2.1 išvada. *Netuščia aibė $A \subset \mathbb{X}$ yra uždara tada ir tik tada, kai kiekvienos konverguojančios aibės A elementų sekos riba priklauso aibei A.*

Svarbi yra ir sankaupos taško sąvoka.

2.8 apibrėžimas. *Taškas $x \in \mathbb{X}$ vadinamas sekos $(x_n) \subset \mathbb{X}$ sankaupos tašku, jei su bet kuriuo $r > 0$ aibė $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in S_r(x)\}$ yra begalinė.*

Sankaupos taško prasmę paaiškina šis teiginys.

2.7 teiginys. *Taškas $x \in \mathbb{X}$ yra sekos $(x_n) \subset \mathbb{X}$ sankaupos taškas tada ir tik tada, kai egzistuoja konverguojantis į x posekis (x_{n_k}).*

Įrodymas. Pakankamumas akivaizdus. Įrodysime būtinumą. Sakykime, x – sekos (x_n) sankaupos taškas. Naudodami indukciją, griežtai didėjančią sveikųjų skaičių seką (n_k) nusakykime taip. Tarkime, n_1 – mažiausias sveikasis skaičius, su kuriuo $x_{n_1} \in S_1(x)$. Akivaizdu, kad toks skaičius egzistuoja. Tarkime, jau radome $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$. Remiantis sankaupos taško apibrėžimu, aibė $\{n : n > n_{k-1} \text{ ir } x_n \in S_{1/k}(x)\}$ netuščia. Sakykime, n_k – mažiausias jos elementas. Taigi pagal matematinę indukciją surademe seką (n_k). Dabar imkime posekį (x_{n_k}), kurį apibrėžia sukonstruota seka (n_k). Nesunku matyti, kad $x_{n_k} \in S_{1/k}(x)$ su visais $k \in \mathbb{N}$, t.y. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. ∎

2.8 teiginys. *Sakykime,* $(x_n) \subset \mathbb{X}$, $M_n = \{x_m : m = n, n+1, ...\}, n = 1, 2, ...$ *Sekos (x_n) sankaupos taškų aibei M teisinga lygybė*

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} [M_n].$$

Įrodymas. Jei $x \in M$, tai su kiekvienu $r > 0$, aibė $\{n : x_n \in S_r(x)\}$ yra begalinė. Todėl $M_n \cap S_r(x) \neq \emptyset$, kai $n = 1, 2, ...$ Pagal 2.7 teiginį $x \in [M_n]$, kai $n = 1, 2, ...$ Vadinasi, $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[M_n]$.

Dabar tarkime, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[M_n]$ ir $r > 0$. Remiantis 2.4 teiginiu, $S_r(x) \cap M_n \neq \emptyset$, kai $n = 1, 2, ...$ Iš čia gauname, kad aibė $\{n : x_n \in S_r(x)\}$ būtinai begalinė. Vadinasi, $x \in M$. Kadangi x buvo pasirinktas laisvai, tai $\bigcap_{n=1}^{\infty}[M_n] \subset M$. ■

Norėdami geriau suprasti metrinių erdvių sekų konvergavimą, panagrinėkime keletą pavyzdžių.

2.7 pavyzdys. Konvergavimas euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^p$ reiškia kiekvienos koordinačių sekos konvergavimą:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_n = (x_{n1}, \ldots, x_{np}) \to \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \ \text{ tada ir tik tada, kai} \\ &x_{n1} \to x_1, \ldots, x_{np} \to x_p. \end{aligned}$$

Tikrai, tarkime $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. Pagal ribos apibrėžimą, kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, su kuriuo

$$d_2^2(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{p}(x_{nk} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2,$$

kai $n \geq N_\varepsilon$. Iš čia išplaukia, kad

$$|x_{nk} - x_k| < \varepsilon \ \text{ su visais } \ n \geq N_\varepsilon \ \text{ ir visais } \ k = 1, \ldots, p.$$

Tai yra, $x_{nk} \to x_k$ su visais $k = 1, \ldots, p$. Atvirkščiai, jei

$$\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k \ \text{ su visais } \ k = 1, \ldots, p,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} d_2^2(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p}(x_{nk} - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{p} \lim_{n\to\infty}(x_{nk} - x_k)^2 = 0.$$

Taigi $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$.

2.8 pavyzdys. Erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ elementų sekos konvergavimas sutampa su tolygiuoju funkcijų konvergavimu. Tikrai, nagrinėkime seką $(f_n) \subset \mathcal{C}[a, b]$ ir tarkime, kad $f_n \to f \in \mathcal{C}[a,b]$. Pagal apibrėžimą kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$\sup_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad n \ge N_\varepsilon.$$

Tai yra,

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad n \ge N_\varepsilon \quad \text{ir visais} \quad t \in [a,b].$$

O tai sutampa su tolygiuoju funkcijų sekos (f_n) konvergavimu į funkciją f.

2.9 pavyzdys. Erdvės $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ elementų sekos konvergavimas reiškia tolygų konvergavimą kiekviename uždarame intervale, t.y. $f_n \to f$ erdvėje $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ tada ir tik tada, kai su bet kuriuo $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[-a,a]} |f_n(t) - f(t)| = 0. \tag{2.1}$$

Norėdami tuom įsitikinti, pažymėkime

$$d_k(f_n, f) = \sup_{t\in[-k,k]} |f_n(t) - f(t)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ir tarkime,

$$d(f_n, f) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(f_n, f)}{1 + d_k(f_n, f)} < \varepsilon,$$

kai $n \ge N_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Iš čia gauname, kad su kiekvienu $k \ge 1$

$$2^{-k} \frac{d_k(f_n, f)}{1 + d_k(f_n, f)} < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n \ge N_\varepsilon.$$

Taigi su kiekvienu $k \ge 1$

$$\lim_{n\to\infty} d_k(f_n, f) = 0.$$

Tai ekvivalentu (2.1). Kita vertus, tarkime, (2.1) yra išpildyta. Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir parinkime tokį $K \ge 1$, kad

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2. \tag{2.2}$$

Be to, parinkime tokį $N_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{K} 2^{-k} \frac{d_k(f_n, f)}{1 + d_k(f_n, f)} < \varepsilon/2, \quad \text{kai} \quad n \geq N_{\varepsilon,K}. \tag{2.3}$$

Iš (2.2) ir (2.3) išplaukia, kad $d(f_n, f) < \varepsilon$, kai $n \geq N_{\varepsilon,K}$. Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

2.10 pavyzdys. Įsitikinkime, kad erdvės $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sekos konvergavimas ekvivalentus koordinatinių sekų konvergavimui.

Nagrinėkime seką $(\boldsymbol{x}_n = (x_{nk})) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ir elementą $\boldsymbol{x} = (x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Tarkime, $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$, kai $n > N_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Kadangi

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} < \varepsilon,$$

kai $n > N_\varepsilon$, tai su kiekvienu $k \geq 1$

$$2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} < \varepsilon, \text{kai} \quad n > N_\varepsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$.

Kita vertus, įrodykime, kad seka $(\boldsymbol{x}_n)$ konverguoja į $\boldsymbol{x}$, jei su kiekvienu k, $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$. Tam tikslui paimkime $\varepsilon > 0$ ir parinkime tokį m, kad $\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Tuomet

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) &= \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} + \varepsilon/2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kadangi m yra fiksuotas ir $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$, kai $k = 1, \ldots, m$, galime taip parinkti $N_{\varepsilon,m}$, kad

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{nk} - x_k|}{1 + |x_{nk} - x_k|} < \varepsilon/2, \tag{2.5}$$

kai $n \geq N_{\varepsilon,m}$. Taigi iš (2.4) ir (2.5) išplaukia, kad $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$, kai tik $n > N_{\varepsilon,m}$. Vadinasi, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$.