14 paskaita

14.1 Atvirkštiniai operatoriai

14.1.1 Apibrėžimas. Pavyzdžiai

Tegu $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – tiesinės erdvės. Priminsime, kad $I_{\mathbb{E}}$ žymi erdvės $\mathbb{E}$ tapatingą operatorių: $I_{\mathbb{E}}x = x, \quad x \in \mathbb{E}$.

14.1 apibrėžimas. *Sakysime, kad tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ turi atvirkštinį (yra apverčiamas), jei egzistuoja toks operatorius $S : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$, kad*

$$TS = I_{\mathbb{F}}, \quad ST = I_{\mathbb{E}}. \tag{14.1}$$

Čia $I_{\mathbb{E}}$ ir $I_{\mathbb{F}}$ tapatingieji operatoriai. Operatorius S vadinamas operatoriaus T atvirkštiniu.

Operatorius gali turėti ne daugiau kaip vieną atvirkštinį. Tikrai, jei $S_1, S_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ ir $TS_1 = TS_2 = I_{\mathbb{F}}, \ S_2T = S_1T = I_{\mathbb{E}}$, tai

$$S_1 = I_{\mathbb{E}}S_1 = (S_2T)S_1 = S_2(TS_1) = S_2I_{\mathbb{F}} = S_2.$$

Be to, atvirkštinis operatorius visada tiesinis. Tikrai, jei $y_1, y_2 \in \mathbb{F}$ ir $x_k = Sy_k$ tai $y_k = I_{\mathbb{F}}y_k = TSy_k = T(Sy_k) = T(x_k)$ todėl

$$S(y_1 + y_2) = S(Tx_1 + Tx_2) = S(T(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = Sy_1 + Sy_2.$$

Analogiškai patikriname atvirkštinio operatoriaus homogeniškumą.

14.1 lema. *Tarkime, $\mathbb{F}, \mathbb{E}$ – tiesinės erdvės, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – tiesinis atvaizdis.*

a) Jei egzistuoja toks atvaizdis $S : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$, kad $TS = I_{\mathbb{F}}$, tai $T(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$;

b) Jei egzistuoja toks tiesinis atvaizdis $U : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$, kad $UT = I_{\mathbb{E}}$, tai T – abipus vienareikšmis;

Įrodymas. a) Jei $y \in \mathbb{F}$, tai $y = I_{\mathbb{F}} y = (TS)y = T(Sy)$.

b) Jei $x \in \mathbb{E}$, tai $x = I_{\mathbb{E}} x = (UT)x = U(Tx)$. Kadangi U tiesinis, tai $x = 0$, kai $Tx = 0$. Iš čia išplaukia, kad operatorius T yra abipus vienareikšmis. ■

Tarkime, tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra bijekcija. Vadinasi, egzistuoja atvirkštinis atvaizdis $T^{-1} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$, apibrėžtas lygybe $T^{-1}y = x$, jei $Tx = y$. Nesunku matyti, kad toks atvirkštinio operatoriaus apibrėžimas yra ekvivalentus 14.1 apibrėžimui. Tikrai, jei operatorius T yra apverčiamas, tai T – bijekcija ir T^{-1} tenkina (14.1) sąryšius. Taigi, $T^{-1} = S$. Iš kitos pusės, jei T yra bijekcija, tai atvirkštinis T^{-1} tenkina (14.1) sąryšius, todėl T yra apverčiamas.

Nuo šio momento operatoriaus $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ atvirkštinį operatorių žymėsime tik simboliu T^{-1}.

Šioje lemoje surinktos paprasčiausios apverčiamų operatorių savybės. Jų įrodymas elementarus, todėl paliekamas vietoj pratimo.

14.2 lema. *Sakykime, $T, S : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ir $\alpha \in \mathbb{K}$.*

a) jei T apverčiamas tai T^{-1} taip pat apverčiamas; be to, $(T^{-1})^{-1} = T$;

b) jei $\alpha \neq 0$, tai αT apverčiamas tada ir tik tada, kai T apverčiamas; be to, jei T apverčiamas ir $\alpha \neq 0$, tai $(\alpha T)^{-1} = \alpha^{-1} T^{-1}$;

c) jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}, S : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ apverčiami operatoriai, tai ir jų sandauga $ST : \mathbb{E} \to \mathbb{G}$ apverčiama ir, be to, $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$;

14.1.2 Banacho teoremos apie atvirkštinį operatorių

Jei operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra apverčiamas, tai lygtis

$$Tx = y, \tag{14.2}$$

kai y – duotas erdvės $\mathbb{F}$ elementas, o $x \in \mathbb{E}$ – ieškomasis, turi vienintelį sprendinį $y = T^{-1}x$. Tačiau praktiniuose taikymuose, elementas y dažniausiai yra žinomas tik su tam tikra paklaida. Todėl labai svarbu žinoti, kaip keičiasi (14.2) lygties sprendinys x kintant y. Tiksliau, kokius sprendinio svyravimus sukelia nedideli y svyravimai. Tai ne kas kita, kaip atvirkštinio operatoriaus tolydumo klausimas.

14.1 teorema. *Tarkime, $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Operatorius T yra bijekcija ir $T^{-1} \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$ tada ir tik tada, kai egzistuoja toks teigiamas skaičius m, kad nelygybė $||Tx|| \geq m$ teisinga su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$, kurio norma lygi vienam.*

Įrodymas. *Būtinumas.* Tarkime, operatorius $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ – bijekcija ir $T^{-1} \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$. Vadinasi, $||T^{-1}|| < \infty$. Jei $x \in \mathbb{E}, ||x|| = 1$, tai

$$1 = ||x|| = ||T^{-1}(Tx)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||Tx||,$$

t.y. $||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}$.

Pakankamumas. Tarkime, egzistuoja $m > 0$, su kuriuo $||Tx|| \geq m$, kai $||x|| = 1$. Šiuo atveju $||Tx|| \geq m||x||$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Tai reiškia, kad T yra bijekcija. Tikrai, jei $Tx = 0$, tai būtinai $x = 0$. Be to, jei $y \in \mathbb{F}$ ir $Tx = y$, tai

$$||T^{-1}y|| = ||x|| \leq ||Tx||/m = ||y||/m.$$

Tai įrodo, kad T^{-1} – tolydusis operatorius. ∎

Dabar įrodysime teoremą, kuri dažnai vadinama atvirojo atvaizdžio Banacho teorema.

14.2 teorema. *Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – Banacho erdvės ir operatorius $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra bijekcija. Tada atvirkštinis operatorius T^{-1} tolydus.*

Įrodymas. Tarkime, $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra bijekcija. Tada T^{-1} egzistuoja ir yra uždaras operatorius. Tikrai, $T^{-1} : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$. Jei seka $(x_n) \subset \mathbb{F}$ konverguoja prie $x \in \mathbb{F}$ ir $T^{-1}x_n \to y$, tai, remiantis operatoriaus T tolydumu, $x_n = T(T^{-1}x_n) \to Ty$. Todėl $Ty = x$ arba $y = T^{-1}x$. Taigi T^{-1} – uždaras, todėl, remiantis uždarojo grafiko teorema, $T^{-1} \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$. ∎

Iš įrodymo matome, kad atvirkštinio atvaizdžio teoremą galime sustiprinti, mat įrodyme esminė savybė yra operatoriaus T uždarumas. Jei T yra uždaras operatorius ir T yra bijekcija, tai uždaras ir atvirkštinis operatorius. Taigi, teisinga ši teorema.

14.3 teorema. *Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – Banacho erdvės ir operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra bijekcija. Tada, jei T uždaras operatorius, tai atvirkštinis operatorius T^{-1} tolydus.*

Atvirojo atvaizdžio teoremą įrodėme naudodamiesi jau įrodyta teorema apie uždarą grafiką. Tačiau ją galima įrodyti ir nesiremiant uždarojo grafiko teorema, o tada įrodyti ir pastarąją. Tuo tikslu tarkime, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – uždaras operatorius. Vadinasi, jo grafikas $G(T) \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ – uždara aibė ir ją galime nagrinėti kaip Banacho erdvę. Apibrėžkime operatorių $A : G(T) \to \mathbb{E}$ imdami

$$A(x, Tx) = x.$$

Nesunku matyti, kad $A \in L(G(T), \mathbb{E})$ ir jo reikšmių aibė $R(A) = \mathbb{E}$. Be to, operatorius A yra abipus vienareikšmis, taigi bijekcija. Pritaikę teoremą apie atvirkštinį operatorių, gauname $A^{-1} \in L(\mathbb{E}, G(T))$. Tai yra

$$||x|| + ||Tx|| \leq c||x||.$$

Iš čia, $T \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$.

Ekvivalenti 14.2 teoremos formuluotė yra ši.

14.4 teorema. *Sakykime,* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *– Banacho erdvės,* $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$*. Jei* $T(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$*, tai su bet kuria atvirąja aibe* $A \subset \mathbb{E}$ *aibė* $T(A) \subset \mathbb{F}$ *atvira.*

14.1.3 Reguliarieji operatoriai

Šiame skyrelyje nagrinėsime tiesinius atvaizdžius, veikiančius vienoje normuotoje erdvėje $\mathbb{E}$. Vietoj $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ susitarkime rašyti $L(\mathbb{E})$. Be to, tapatųjį atvaizdį erdvėje E žymėsime I_E arba I, jei aišku, kokioje erdvėje jis veikia.

14.2 apibrėžimas. *Operatorius* $T \in L(\mathbb{E})$ *vadinamas reguliariuoju, jei jis turi tolydų atvirkštinį.*

Aibę visų reguliariųjų operatorių $T \in L(\mathbb{E})$ žymėsime $L^r(\mathbb{E})$.

Šioje lemoje surinktos paprasčiausios reguliariųjų operatorių savybės. Jų įrodymas elementarus, todėl paliekamas vietoj pratimo.

14.3 lema. *Sakykime,* $T, S \in L(\mathbb{E})$ *ir* $\alpha \in K$.

a) *jei* $T \in L^r(\mathbb{E})$*, tai* $T^{-1} \in L^r(\mathbb{E})$*; be to,* $(T^{-1})^{-1} = T$*;*

b) *jei* $\alpha \neq 0$*, tai* $\alpha T \in L^r(\mathbb{E})$ *tada ir tik tada, kai* $T \in L^r(\mathbb{E})$*; be to, jei* $T \in L^r(\mathbb{E})$ *ir* $\alpha \neq 0$*, tai* $(\alpha T)^{-1} = \alpha^{-1} T^{-1}$*;*

c) jei $T, S \in L^r(\mathbb{E})$, tai $ST \in L^r(\mathbb{E})$ ir $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$;

d) jei $S, T \in L^r(\mathbb{E})$ ir $ST = TS$, tai $S^{-1}T^{-1} = T^{-1}S^{-1}$;

e) jei $ST \in L^r(\mathbb{E})$ ir $ST = TS$, tai $T, S \in L^r(\mathbb{E})$ ir $S^{-1} = T(ST)^{-1}$, $T^{-1} = S(ST)^{-1}$.

Akivaizdu, kad tapatusis operatorius $I \in L^r(\mathbb{E})$. Netrukus įsitikinsime, kad kiekvienas operatorius, kuris yra „pakankamai artimas" tapačiajam – taip pat reguliarus. Šio fakto įrodymo idėją pakuždėjo elementari tapatybė

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

kai $|x| < 1$.

Operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ sveikasis laipsnis T^n apibrėžiamas induktyviai: $T^1 = T$ ir $T^n = T(T^{n-1})$, kai $n = 2, 3, ...$ Susitarkime, kad $T^0 = I$. Nesunku patikrinti, kad

$$T^n T^m = T^{n+m} \quad \text{su visais} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Be to,

$$||T^n|| \leq ||T||^n \quad \text{su visais} \quad n \in \mathbb{N}.$$

14.4 lema. *Jei $T \in L(\mathbb{E})$, tai seka $(||T^n||^{1/n})$ konverguoja, ir*

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = \inf\{||T^n||^{1/n} : n = 1, 2, ...\}.$$

Įrodymas. Tikslųjį apatinį rėžį pažymėkime ν. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks sveikasis skaičius m, kad $||T^m|| \leq (\nu + \varepsilon)^m$. Kiekvieną sveikąjį skaičių n galime išdėstyti $n = p_n m + q_n$; čia p_n, q_n – sveikieji neneigiami skaičiai, be to, $1 \leq q_n \leq m$. Remiantis (4.2) įverčiu,

$$||T^n|| = ||(T^m)^{p_n} T^{q_n}|| \leq ||T^m||^{p_n} ||T||^{q_n} < (\nu + \varepsilon)^{mp_n} ||T||^{q_n}.$$

Taigi

$$\nu \leq ||T^n||^{1/n} < (\nu + \varepsilon)^{mp_n/n} ||T||^{q_n/n} = (\nu + \varepsilon)(||T||/(\nu + \varepsilon))^{q_n/n}.$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty} q_n/n = 0$, tai egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad

$$(||T||/(\nu + \varepsilon))^{q_n/n} < \frac{\nu + 2\varepsilon}{\nu + \varepsilon},$$

kai $n \geq N$. Iš čia išplaukia, kad $\nu \leq ||T^n||^{1/n} < \nu + 2\varepsilon$, kai $n \geq N$. ∎

14.5 teorema. *Tarkime, $\mathbb{E}$ – Banacho erdvė ir $T \in L(\mathbb{E})$. Jei*

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} < 1,$$

tai eilutė $\sum_n T^n$ konverguoja erdvėje $L(\mathbb{E})$. Be to, $I - T \in L^r(\mathbb{E})$ ir

$$(I-T)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^n.$$

Įrodymas. Fiksuokime tokį α, kad $\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} < \alpha < 1$. Egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $||T^n|| < \alpha^n$, kai $n \geq N$. Iš čia išplaukia, kad eilutė $\sum_n ||T^n||$ konverguoja. Remiantis 4.4.1 teorema, eilutė $\sum_n T^n$ konverguoja erdvėje $L(E)$. Pažymėkime $S = I + \sum_n^{\infty} T^n$. Remiantis eilutės sumos apibrėžimu,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \quad \text{kai} \quad S_n = I + \sum_{k=1}^{n} T^k.$$

Nesunku patikrinti, kad

$$(I-T)S_n = S_n(I-T) = I - T^{n+1}.$$

Kadangi $||T^n|| < \alpha^n$, kai $n \geq N$ ir $\alpha < 1$, tai $\lim_{n\to\infty} ||T^n|| = 0$, todėl

$$(I-T)S = \lim_{n\to\infty}(I-T)S_n = \lim_{n\to\infty}(I - T^{n+1}) = I.$$

Visiškai taip pat įrodome, kad $S(I-T) = I$. Vadinasi, $I - T$ – reguliarusis operatorius ir $(I-T)^{-1} = S$. ∎

14.1 išvada. *Tarkime, $\mathbb{E}$ – Banacho erdvė, ir $T \in L(\mathbb{E})$. Jei $||T|| < 1$, tai $I - T \in L^r(\mathbb{E})$ ir*

$$(I-T)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^n.$$

14.2 išvada. *Jei E – Banacho erdvė, tai*

$$\{T \in L(\mathbb{E}) : ||I - T|| < 1\} \subset L^r(\mathbb{E}).$$

14.6 teorema. *Jei $\mathbb{E}$ – Banacho erdvė, tai aibė $L^r(\mathbb{E}) \subset L(\mathbb{E})$ – atvira.*

Įrodymas. Sakykime, $S \in L^r(\mathbb{E}),\ T \in L(\mathbb{E})$. Kadangi

$$||I - S^{-1}T|| = ||S^{-1}(S-T)|| \leq ||S^{-1}|| \cdot ||S-T||,$$

tai, remiantis 6.2 išvada, $S^{-1}T \in L^r(\mathbb{E})$, kai $||S-T|| < ||S^{-1}||^{-1}$. Be to, $T = S(S^{-1}T)$, todėl $T \in L^r(\mathbb{E})$, kai $S^{-1}T \in L^r(\mathbb{E})$. Vadinasi,

$$\{T \in L(E) : ||S-T|| < ||S^{-1}||^{-1}\} \subset L^r(\mathbb{E}).$$

■

Tarkime, $T \in L(\mathbb{E})$. Jei $\lambda \in K$ tenkina sąlygą $|\lambda|^{-1} > \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$, tai $\lim_{n\to\infty} ||(\lambda T)^n||^{1/n} < 1$, todėl operatorius $I - \lambda T$ – reguliarus ir

$$(I - \lambda T)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda T)^n.$$

Eilutė $\sum_n (\lambda T)^n$ vadinama operatoriaus T Noimano[1] eilute.

14.1.4 Integralinių lygčių sprendimo pavyzdys

Šioje teoremoje Noimano eilutę taikysime Voltero integralinei lygčiai spręsti.

14.7 teorema. *Jei k – realioji tolydi funkcija, apibrėžta aibėje $\{(s,t) : a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\}$, tai su bet kuriuo $\lambda \in R$ ir bet kuria funkcija $y \in C[a,b]$ Voltero integralinė lygtis*

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad s \in [a,b] \tag{14.3}$$

turi vienintelį sprendinį $x \in C[a,b]$.

Įrodymas. Lygtį (14.3) galime užrašyti

$$(I - \lambda K)x = y. \tag{14.4}$$

[1] C. Neumann (1907–1987) garbei, kuris sistemingai tyrė tokias eilutes.

Čia K – integralinis Voltero operatorius su branduoliu k. Esame įrodę, kad $K \in L(C[a,b])$. Norint išspręsti (14.4) lygtį, pakanka įsitikinti, kad su kiekvienu λ

$$\lim_{n\to\infty} ||K^n||^{1/n} < 1. \tag{14.5}$$

Tada (14.4) sprendinys bus užrašomas

$$x = (I - \lambda K)^{-1} y = (I + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda K)^m) y.$$

Pažymėkime $M = \sup\{|k(s,t)| : s,t \in [a,b]\}$ ir tarkime, $x \in C[a,b]$. Pritaikę gerai žinomas integralo savybes, gauname

$$|Kx(s)| = |\int_a^s k(s,t)x(t)dt| \leq (s-a) \sup_{a\leq t\leq s} |k(s,t)| \cdot |x(t)| \leq$$
$$M||x||(s-a),$$

kai $a \leq s \leq b$. Naudodami indukcijos metodą įrodysime, kad

$$|K^n x(s)| \leq M^n ||x||(s-a)^n/n!, \tag{14.6}$$

kai $a \leq s \leq b$ ir $n = 1, 2, ...$ Kai $n = 1$, (14.6) nelygybę jau įrodėme. Jei (6.5) nelygybė teisinga, kai $n = 1, ..., k$, tai

$$|K^{k+1}x(s)| = |K(K^k x)(s)| = |\int_a^s k(s,t)K^k x(t)dt|$$
$$\leq M^{k+1}||x|| \int_a^s (t-a)^k dt/k! = M^{k+1}||x||(s-a)^{k+1}/(k+1)!.$$

Remiantis matematine indukcija, (14.6) nelygybė teisinga su bet kuriuo $n \in \mathbb{N}$. Iš jos išplaukia, kad

$$||K^n x|| = \max\{|K^n x(s)| : a \leq s \leq b\} \leq M^n ||x||(b-a)^n/n!.$$

Todėl

$$||K^n|| = \sup\{||K^n x|| : x \in C[a,b], ||x|| \leq 1\} \leq M^n (b-a)^n/n!.$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty}(n!)^{-1/n} = 0$, gauname $\lim_{n\to\infty} ||K^n||^{1/n} = 0$, o iš čia kiekvienam $\lambda \in \mathbb{R}$ seka (14.5). ∎

14.2 Jungtiniai operatoriai

14.2.1 Banacho erdvių jungtiniai operatoriai

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – Banacho erdvės, $\mathbb{E}^*$, $\mathbb{F}^*$ – atitinkamos jungtinės erdvės, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – tiesinis tolydusis operatorius. Jei $f \in \mathbb{F}^*$, tai kompozicija $f \circ T : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ yra tiesinis tolydusis funkcionalas, t.y., erdvės $\mathbb{E}^*$ elementas. Gauname taisyklę, kaip elementui f priskiriamas elementas $g = f \circ T \in E^*$.

14.3 apibrėžimas. *Atvaizdis $T^* : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*$, apibrėžtas lygybe*

$$T^* f = f \circ T, \quad f \in \mathbb{F}^*$$

vadinamas operatoriaus T jungtiniu operatoriumi.

Funkcionalo f reikšmę taške x žymėdami simboliu $\langle f, x \rangle$, jungtinio operatoriaus apibrėžimą galime performuluoti taip.

Atvaizdis $T^* : F^* \to E^*$, apibrėžiamas lygybe

$$\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle \quad \text{su visais} \quad f \in F^*, \ x \in E$$

vadinamas operatoriaus T jungtiniu operatoriumi.

Pateiksime porą pavyzdžių.

14.1 pavyzdys. tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – baigtiniamatės erdvės, $m = \dim \mathbb{E}$, $n = \dim \mathbb{F}$. Tiesinį operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ atitinka matrica

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{pmatrix}$$

ir jei $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{E}$, o $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}$, tai

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tarkime, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ erdvės $\mathbb{F}$ funkcionalas:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i.$$

Tada funkcionalas $f = T^*g$ veikia taip:

$$f(x) = g(T(x)) = \sum_{j=1}^{n} g_j \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x_k = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} t_{jk} g_j \Big) x_k,$$

tai yra $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ir

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} g_j = \sum_{j=1}^{n} t^*_{kj} g_j.$$

Čia $t^*_{kj} = t_{jk}, j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m$. Taigi, jungtinį operatorių T^* atitinka matricos (t_{jk}) transponuota matrica:

$$T^* = \begin{pmatrix} t^*_{11} & t^*_{12} & \cdots & t^*_{1n} \\ t^*_{21} & t^*_{22} & \cdots & t^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t^*_{m1} & t^*_{m2} & \cdots & t^*_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{1m} & t_{2m} & \cdots & t_{nm} \end{pmatrix}$$

14.2 pavyzdys. Nagrinėkime integralinį operatorių K su branduoliu k:

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t) f(t) dt, \quad s \in [a,b].$$

Laikysime, kad operatorius K veikia erdvėje $L_p(a,b), 1 < p < \infty$. Imdami funkcionalą $g^* \in L^*_p(a,b)$, žinome, kad su kiekvienu $f \in L_p(a,b)$

$$g^*(f) = \int_a^b g(t) f(t) dt, \quad g \in L_q(a,b), \ 1/p + 1/q = 1.$$

Taigi

$$g^*(Tf) = \int_a^b g(s) \Big[\int_a^b k(s,t) f(t) dt \Big] ds =$$
$$= \int_a^b \Big[\int_a^b k(s,t) g(s) ds \Big] f(t) dt = \int_a^b (T^*g)(t) f(t) dt.$$

Taigi, jungtinis operatorius T^* – taip pat integralinis ir jo branduolys $k^*(s,t) = k(t,s)$:

$$K^*g(s) = \int_a^b k^*(s,t) g(t) dt = \int_a^b k(t,s) g(t) dt.$$

14.8 teorema. *Jei* $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *tai* $T^* \in L(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. *Be to,* $||T^*|| = ||T||$. *Atskiru atveju, jei* $T \in L(\mathbb{E})$, *tai* $T^* \in L(\mathbb{E}^*)$.

Įrodymas. Kadangi $||f \circ T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||f|| \cdot ||x|| \ \ \forall x \in \mathbb{E}$, tai $||T^*|| \leq ||T||$. Kita vertus, pagal **??** išvadą, kiekvieną $x_0 \in \mathbb{E}$, su kuriuo $Tx_0 \neq 0$, atitinka toks funkcionalas $f_0 \in \mathbb{F}^*$, kad $||f_0|| = 1$ ir $f_0(Tx_0) = ||Tx_0||$. Vadinasi, $||Tx_0|| = |f_0(Tx_0)| = |T^* f_0(x_0)| \leq ||T^*|| \cdot ||f_0|| \cdot ||x_0||$, t.y. $||Tx_0|| \leq ||T^*|| \cdot ||x_0||$. Kadangi šis įvertis teisingas, kai $Tx_0 = 0$, tai jis teisingas su visais $x_0 \in \mathbb{E}$. Vadinasi, $||T|| \leq ||T^*||$. Remdamiesi anksčiau įrodyta nelygybe $||T^*|| \leq ||T||$, gauname $||T^*|| = ||T||$. ■

14.5 lema. *Jei* $S, T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *ir* $\alpha \in \mathbb{K}$, *tai* $(\alpha T)^* = \alpha T^*$ *ir* $(S + T)^* = S^* + T^*$.

Įrodymas. Elementarus. ■

Sakykime, $\mathbb{G}$ – normuota tiesinė erdvė virš kūno $\mathbb{K}$.

14.6 lema. *Jei* $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $S \in L(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, *tai* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Įrodymas. Išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned} ((S \circ T)^* z^*)(x) &= z^*((S \circ T)x) = z^*(S(Tx)) = (S^* z^*)(Tx) \\ &= (T^*(S^* z^*))(x) = ((T^* \circ S^*)z^*)(x), \end{aligned}$$

kurios teisingos su visais $z^* \in \mathbb{G}^*$ ir $x \in \mathbb{E}$. ■

14.1 teiginys. *Tarkime,* $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. *Jei* T *yra tiesinis homeomorfizmas, tai ir jungtinis operatorius* T^* *– tiesinis homeomorfizmas. Be to,* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Įrodymas. Tarkime, T – tiesinis homeomorfizmas. Remiantis 14.3 lema, $T \circ T^{-1} = I_F$ ir $T^{-1} \circ T = I_E$. Remiantis 14.2 lema,

$$I_{\mathbb{F}^*} = I_{\mathbb{F}}^* = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*$$

ir

$$I_{\mathbb{E}^*} = I_{\mathbb{E}}^* = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^*.$$

Vėl pritaikę 14.3 lemą, gauname, kad T^* – bijekcija ir $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Iš T^{-1} aprėžtumo išplaukia $(T^{-1})^*$ aprėžtumas. Vadinasi, T^* – tiesinis homeomorfizmas. ∎

14.2.2 Hilberto erdvių jungtiniai operatoriai

Tarkime, $\mathbb{H}$ – Hilberto erdvė, $T \in L(\mathbb{H})$, $y \in \mathbb{H}$. Apibrėžkime funkcionalą f lygybe $f(x) = \langle Tx, y\rangle$. Šitaip apibrėžtas funkcionalas yra tiesinis. Kad jis tolydus, išplaukia iš nelygybės $|\langle Tx, y\rangle| \le ||Tx|| \cdot ||y|| \le ||T|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$. Remiantis Ryso teorema apie bendrąją tiesinio tolydžiojo funkcionalo išraišką Hilberto erdvėje, egzistuoja vienintelis $z \in \mathbb{H}$, kad lygybė

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$$

teisinga su visais $x \in \mathbb{H}$. Turime taisyklę, pagal kurią kiekvieną $y \in \mathbb{H}$ atitinka elementas $z \in \mathbb{H}$.

14.4 apibrėžimas. *Atvaizdis $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, tenkinantis salygą*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \text{su visais} \;\; x, y \in \mathbb{H}, \tag{14.7}$$

vadinamas operatoriaus T jungtiniu operatoriumi Hilberto erdvėje.

Pastebėkime, kad kiekvieną operatorių $T \in L(\mathbb{H})$ atitinka jungtinis operatorius Banacho erdvės apibrėžimo prasme. Jei jį pažymėtume T' (priminsime, kad $T' : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*$), tai nesunkiai įrodytume, kad $T^* = J \circ T' \circ J^{-1}$. Čia $J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ – erdvių $\mathbb{H}$ ir $\mathbb{H}^*$ izomorfizmas. Toliau Hilberto erdvės jungtinį operatorių vadinsime tiesiog jungtiniu operatoriumi.

14.2 teiginys. *Kiekvieną $T \in L(\mathbb{H})$ atitinka vienintelis jungtinis operatorius $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Be to, $T^* \in L(\mathbb{H})$ ir $||T|| = ||T^*||$.*

Įrodymas. Kad jungtinis operatorius yra tiesinis, išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned}&\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle = \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \overline{\beta}\langle Tx, z\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, T^* y\rangle + \overline{\beta}\langle x, T^* z\rangle = \langle x, \alpha T^* y + \beta T^* z\rangle,\end{aligned}$$

kurios yra teisingos imant bet kuriuos $x, y, z \in \mathbb{H}$, $\alpha, \beta \in K$. Iš lygybės $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ su visais $x \in \mathbb{H}$ išplaukia $u = v$. Vadinasi,

$$T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha T^* y + \beta T^* z.$$

Tarkime, kad operatorių $T \in L(\mathbb{H})$ atitinka du jungtiniai T_1^* ir T_2^*. Remiantis (14.7), $\langle x, (T_1^* - T_2^*)y\rangle = 0$ su visais $x, y \in \mathbb{H}$, todėl $(T_1^* - T_2^*)y = 0$ su visais $y \in \mathbb{H}$. Tai reiškia, kad $T_1^* = T_2^*$.

Įrodysime, kad operatorius T^* yra aprėžtas, ir rasime jo normą. Jei $y \in \mathbb{H}$, tai

$$\begin{aligned} ||T^*y||^2 &= \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle \\ &\le ||TT^*y|| \cdot ||y|| \le ||T|| \cdot ||T^*y|| \cdot ||y||. \end{aligned}$$

Jei $||T^*y|| \neq 0$, iš pastarojo įverčio gauname

$$||T^*y|| \le ||T|| \cdot ||y||.$$

Kadangi ši nelygybė akivaizdžiai teisinga ir, kai $||T^*y|| = 0$, todėl

$$||T^*|| \le ||T||.$$

Iš čia išplaukia, kad operatorius T^* yra tolydus. Pakartoję tuos pačius veiksmus ir sukeitę T^* ir T vietomis, įrodome priešingą nelygybę $||T|| \le ||T^*||$. Vadinasi, $||T^*|| = ||T||$. ∎

Šioje lemoje surinktos kai kurios jungtinio operatoriaus savybės. Jas reiktų įrodyti kaip pratimą.

14.7 lema. *Jei $S, T \in L(\mathbb{H})$ ir $\alpha \in K$, tai:*

a) $(T + S)^* = T^* + S^*$;

b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;

c) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$;

d) $(T^*)^* = T$.

14.3 pavyzdys. Tarkime, $T : R^n \to R^n$ yra tiesinis operatorius ir (t_{ij}) – jį atitinkanti $n \times n$ matrica. Tarkime, (t^*_{ij}) – matrica, atitinkanti jungtinį operatorių T^*. Imdami vienetinius vektorius $x = e_k$, $y = e_j$, iš (8.1) lygties matome, kad $t_{ij} = t^*_{ji}$, $i, j = 1, ..., n$. Vadinasi, jungtinį operatorių T^* atitinka transponuotoji operatorių T atitinkanti matrica.

14.4 pavyzdys. Tarkime, $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ – tolydžioji funkcija. Apibrėžkime operatorių $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$,

$$Tx(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt, \quad t \in [a,b], \quad x \in L_2(a,b).$$

Jungtinį operatorių T^* apibrėžianti (14.7) lygtis užrašoma

$$\int_a^b (T^*x)(t)y(t)dt = \int_a^b x(t)\Big\{\int_a^b K(t,s)y(s)ds\Big\}dt$$
$$= \int_a^b \Big\{\int_a^b K(t,s)x(s)ds\Big\}y(t)dt.$$

Čia panaudojome integravimo eiliškumo sukeitimo taisyklę. Pastarąją lygtį tenkina operatorius T^*, apibrėžtas

$$(T^*x)(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)ds.$$

Kadangi jungtinis operatorius yra vienintelis, tai T^* – operatoriaus T jungtinis. Matome, kad jungtinis operatorius taip pat yra integralinis, tik jo branduolys gaunamas sukeitus operatorių T apibrėžiančio branduolio kintamuosius vietomis. Atskiru atveju, kai

$$K(s,t) = K(t,s),$$

t.y., kai branduolys yra simetrinė funkcija, gauname $T = T^*$. Operatoriai, pasižymintys šia savybe, sudaro labai svarbią klasę.

14.2.3 Hilberto erdvių savijungiai operatoriai

14.5 apibrėžimas. *Tiesinis tolydusis operatorius $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vadinamas savijungiu, jei $T = T^*$. Visų savijungių operatorių $T \in L(\mathbb{H})$ aibę žymėsime $S(\mathbb{H})$.*

Iš jungtinio operatoriaus apibrėžimo išplaukia, kad $T \in L(\mathbb{H})$ yra savijungis tada ir tik tada, kai

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{su visais} \;\; x, y \in \mathbb{H}.$$

14.9 teorema. *Aibė $S(\mathbb{H})$ yra tiesinė erdvės $L(\mathbb{H})$ daugdara. Be to, jei $S, T \in S(\mathbb{H})$, tai $T \circ S \in S(\mathbb{H})$ tada ir tik tada, kai $T \circ S = S \circ T$.*

Įrodymas. Pirmasis tvirtinimas yra 14.7 lemos išvada. Remiantis tos pačios lemos c) punktu,

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* = S \circ T.$$

Todėl $(T \circ S)^* = T \circ S$ tada ir tik tada, kai $T \circ S = S \circ T$. ■

14.10 teorema. *Sakykime, $\mathbb{H}$ – kompleksinė Hilberto erdvė. Operatorius $T \in L(\mathbb{H})$ yra savijungis tada ir tik tada, kai su bet kuriuo $x \in \mathbb{H}$ $\langle Tx, x\rangle$ – realusis skaičius.*

Įrodymas. Jei T – savijungis operatorius, tai

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

Iš čia išplaukia, kad $\langle Tx, x\rangle$ – realusis skaičius.

Dabar tarkime, kad su kiekvienu $x \in \mathbb{H}$ skaičius $\langle Tx, x\rangle$ – realus. Rekomenduojame skaitytojui patikrinti, kad tada galioja šios lygybės:

$$4\langle Tx, x\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle +$$
$$\imath\langle T(x+\imath y), x+\imath y\rangle - \imath\langle T(x-\imath y), x-\imath y\rangle$$

ir

$$4\langle x, Tx\rangle = \langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle +$$
$$\imath\langle x+\imath y, T(x+\imath y)\rangle - \imath\langle x-\imath y, T(x-\imath y)\rangle.$$

Kadangi $\langle Tx, x\rangle$ – realus, todėl pastarųjų lygybių dešinės pusės sutampa, taigi $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ su visais $x, y \in \mathbb{H}$. O tai reiškia, kad operatorius T – savijungis. ■

14.11 teorema. *Jei $T \in S(\mathbb{H})$, tai*

$$||T|| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : ||x|| \leq 1\}.$$

Įrodymas. Sakykime, $T \in S(\mathbb{H})$. Pažymėkime

$$a = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : ||x|| \leq 1\}.$$

Pritaikę Švarco nelygybę, gauname

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq ||Tx|| \cdot ||x|| \leq ||T|| \cdot ||x||^2 \qquad \text{su visais} \;\; x \in \mathbb{H}, \tag{14.8}$$

todėl $a \leq ||T||$. Pastebėkime, kad

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq a||x||^2 \qquad \text{su visais} \;\; x \in \mathbb{H} \tag{14.9}$$

ir

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\Re\langle Tx, y\rangle \qquad \text{su visais} \;\; x, y \in \mathbb{H}. \tag{14.10}$$

Iš (14.8)–(14.10) formulių ir lygiagretainio taisyklės gauname

$$\begin{aligned} &4|\Re\langle Tx, y\rangle| \leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \\ &\leq a(||x+y||^2 + ||x-y||^2) \\ &= 2a(||x||^2 + ||y||^2). \end{aligned} \tag{14.11}$$

Tarkime, $x \in \mathbb{H}$, $||x|| = 1, Tx \neq 0$, ir pažymėkime $y = ||Tx||^{-1}Tx$. Įstatę į (14.11) formulę, gauname

$$||Tx|| = \Re\langle Tx, ||Tx||^{-1}Tx\rangle \leq a(||x||^2 + 1)/2 \leq a.$$

Kadangi ši nelygybė teisinga ir kai $Tx = 0$, iš jos išplaukia $||T|| \leq a$. ■