12 paskaita

12.1 Hilberto erdvės tiesiniai tolydieji funkcionalai

Šiame skyrelyje rasime Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ tiesinio tolydžiojo funkcionalo bendrąją išraišką. Ją pritaikysime Radono-Nikodymo teoremos apie tankio funkciją įrodymui.

12.1 teorema. *Su kiekvienu $y \in \mathbb{H}$ funkcionalas F, apibrėžtas formule*

$$F(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in \mathbb{H}$$

yra tiesinis tolydus ir jo norma

$$||F|| = ||y||.$$

Įrodymas. Funkcionalo F tiesiškumas išplaukia iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo. Pagal Švarco nelygybę $|F(x)| \leq ||y|| \cdot ||x||$, taigi F tolydus ir $||F|| \leq ||y||$. Iš kitos pusės

$$||y||^2 = \langle y, y \rangle = |F(y)| \leq ||F|| \cdot ||y||,$$

todėl $||y|| \leq ||F||$. Vadinasi, $||F|| = ||y||$.

12.2 teorema. *Jei F – tiesinis tolydusis funkcionalas, apibrėžtas erdvėje $\mathbb{H}$, tai egzistuoja toks vienintelis elementas $y \in \mathbb{H}$, kad*

$$F(x) = \langle x, y \rangle \quad \textit{su visais} \ \ x \in \mathbb{H}.$$

Įrodymas. Jei $F = 0$, tai galime paimti $y = 0$. Toliau tarsime, kad $F \neq 0$. Pažymėkime $N = \{x \in \mathbb{H} : F(x) = 0\}$. Nesunku įrodyti, kad N – erdvės $\mathbb{H}$ poerdvis. Remiantis **??** teorema apie Hilberto erdvės ortogonalųjį dėstinį, $\mathbb{H} = N \oplus N^{\perp}$. Kadangi $N \neq \mathbb{H}$ (priešingu atveju $F = 0$), tai $N^{\perp} \neq \{0\}$. Tarkime, $z \in N^{\perp}$, $z \neq 0$. Pažymėkime $\lambda = F(z)$. Sakykime, $x \in \mathbb{H}$ ir $x = x' + x''$. Čia $x' \in N$, $x'' \in N^{\perp}$. Kadangi $x'' - \lambda^{-1}F(x'')z \in N^{\perp}$ ir

$$F(x'' - \lambda^{-1}F(x'')z) = 0,$$

tai $x'' - \lambda^{-1}F(x'')z = 0$, nes $N \cap N^{\perp} = \{0\}$. Pastebėkime taip pat, kad

$$\langle x, z\rangle = \lambda^{-1}F(x'')\langle z, z\rangle.$$

Vadinasi,

$$F(x) = F(x') + F(x'') = \lambda||z||^{-2}\langle x, z\rangle.$$

Iš čia išplaukia, kad $F(x) = \langle x, y\rangle$ su $y = \overline{\lambda}||z||^{-2}z$. Akivaizdu, kad elementas y vienintelis. ∎

Tarkime, $\mathbb{H}$ – realioji Hilberto erdvė. Remiantis ką tik įrodyta teorema, galime apibrėžti atvaizdį $J : H^* \to \mathbb{H}$, funkcionalui $F \in \mathbb{H}^*$ priskirdami pagal 12.2 teoremą jį atitinkantį elementą $y \in \mathbb{H}$, t.y.

$$F(x) = \langle x, JF\rangle \quad \text{su visais} \quad F \in \mathbb{H}^*, x \in \mathbb{H}.$$

Nesunku įrodyti, kad $J(F+G) = J(F) + J(G)$ ir $J(\alpha F) = \alpha J(G)$ su visais $F, G \in H^*, \alpha \in \mathbb{R}$, t. y. J - tiesinis atvaizdis. Be to, J yra bijekcija ir $||JF|| = ||F||$. Taigi įrodėme šį teiginį.

12.3 teorema. *Realiosios Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ jungtinė erdvė $\mathbb{H}^*$ izomorfiškai izometrinė pačiai erdvei $\mathbb{H}$.*

Toks pat teiginys teisingas ir kompleksinėms Hilberto erdvėms. Tik šįkart atvaizdis J – kompleksinis izomorfizmas – $J(\alpha f) = \overline{\alpha}J(f)$ su visais $f \in \mathbb{H}^*, \alpha \in \mathbb{C}$.

Remiantis šiais teiginiais, erdvės $\mathbb{H}$ ir $\mathbb{H}^*$ sutapatinamos.

12.2 Erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ tiesiniai tolydieji funkcionalai

Sakykime, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Šiame skyrelyje įrodysime teoremą apie bendrąją erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ tiesinio tolydžiojo funkcionalo išraišką, kurią 1909 metais surado F. Rysas.

12.1 apibrėžimas. *Baigtinė aibė $P \subset [a, b]$, kuriai priklauso a ir b, vadinama intervalo $[a, b]$ skaidiniu. Jei P yra intervalo $[a, b]$ skaidinys, tai rašysime $P = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$, suprasdami, kad*

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b.$$

12.2 apibrėžimas. *Sakykime, f, α – realiosios funkcijos, apibrėžtos intervale $[a, b]$. Sakoma, kad f yra α-integruojama, jei egzistuoja toks realusis skaičius I, su kuriuo išpildyta sąlyga: kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad*

$$\Big| I - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1}))\Big| < \varepsilon, \tag{12.1}$$

imant bet kurį tokį intervalo $[a, b]$ skaidinį $P = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$, kuriam $\max_{1 \le k \le n}[s_k - s_{k-1}] < \delta$ ir bet kuriuos skaičius $t_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, ..., n$.

Akivaizdu, kad α-integruojamą funkciją f atitinka vienintelis skaičius I, tenkinantis (12.1) sąlygą. Šis skaičius toliau žymimas $\int_a^b f d\alpha$ arba $\int_a^b f(t) d\alpha(t)$ ir vadinamas Rymano-Stiltjeso integralu.

12.1 teiginys. *Jei α – aprėžtosios variacijos funkcija intervale $[a, b]$, tai kiekviena funkcija $f \in \mathcal{C}[a, b]$ yra α-integruojama ir teisinga ši nelygybė:*

$$\Big| \int_a^b f(t) d\alpha(t) \Big| \le \sup_{a \le t \le b} |f(t)| V_a^b(\alpha). \tag{12.2}$$

Įrodymas. Imdami bet kurį intervalo $[a, b]$ skaidinį $P = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$ ir bet kuriuos $t_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, ..., n$, pažymėkime

$$S(f, \alpha; \{s_k\}, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})).$$

Tegu $\varepsilon > 0$. Kadangi F – tolygiai tolydi intervale $[a, b]$, tai egzistuoja toks $\delta > 0$, kad

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \quad \text{kai} \ \ |t - s| < \delta.$$

Toliau įvertiname

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1}))\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)| \cdot |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})| \le$$

$$\max_{a \le t \le b} |f(t)| \sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})| \le \max_{a \le t \le b} |f(t)| V_a^b(\alpha).$$

Perėję šioje nelygybėje prie ribos, kai $n \to \infty$ ir $\max_{1 \le k \le n}(s_k - s_{k-1}) \to 0$ .... ∎

12.4 teorema. (Ryso.) *Jei f^* – erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ tiesinis tolydusis funkcionalas, tai egzistuoja tokia aprėžtosios variacijos intervale $[a,b]$ funkcija α, kad*

$$f^*(g) = \int_a^b g(t)d\alpha(t) \quad \textit{su visais} \quad g \in \mathcal{C}[a,b]$$

ir, be to,

$$||f^*|| = V_a^b(\alpha).$$

Įrodymas. Fiksuokime $f^* \in \mathcal{C}^*[a,b]$. Erdvė $\mathcal{C}[a,b]$ yra erdvės $\mathcal{B}[a,b]$ poerdvis. Todėl, remiantis Hano-Banacho teorema, egzistuoja toks erdvės $\mathcal{B}[a,b]$ tiesinis tolydusis funkcionalas F, kad $F(g) = f^*(g)$ su visais $g \in \mathcal{C}[a,b]$ ir $||F|| = ||f^*||$.

Sakykime, funkcija $\chi_a \equiv 0$ ir, imdami $a < s \leq b$, apibrėžkime

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai } a \leq t < s; \\ 0, & \text{kai } s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad $\chi_s \in \mathcal{B}[a,b]$, kai $a \leq s \leq b$. Apibrėžkime

$$\alpha(s) = F(\chi_s), \quad s \in [a,b]. \tag{12.3}$$

Įrodysime, kad taip apibrėžta funkcija $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tenkina teoremos sąlygas.

Sakykime, $\{s_0, s_1, ..., s_n\}$ – intervalo $[a,b]$ skaidinys ir $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – realieji skaičiai. Akivaizdu, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\chi_{s_k}(t) - \chi_{s_{k-1}}(t)) = \lambda_j,$$

kai $s_{j-1} < t \leq s_j$, $j = 1, 2, ..., n$. Vadinasi,

$$\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\chi_{s_k} - \chi_{s_{k-1}})\Big|\Big| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\}. \tag{12.4}$$

Atskiru atveju, imdami $\lambda_k = \operatorname{sign}(\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1}))$, iš (12.3) ir (12.4) formulių gauname

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\big(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})\big) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\big(F(\chi_{s_k}) - F(\chi_{s_{k-1}})\big) = F\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\big(\chi_{s_k} - \chi_{s_{k-1}}\big)\Big) \leq$$
$$||F|| \cdot \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\big(\chi_{s_k} - \chi_{s_{k-1}}\big)\Big\| = ||f^*||.$$

Iš šių nelygybių išeina, kad α yra aprėžtosios variacijos ir

$$V_a^b(\alpha) \leq ||f^*||.$$

Imkime $g \in \mathcal{C}[a,b]$ ir $\varepsilon > 0$. Kadangi funkcija g yra tolygiai tolydi, tai egzistuoja toks $\delta > 0$, kad nelygybė

$$|g(s) - g(t)| < \varepsilon \tag{12.5}$$

teisinga, kai $s, t \in [a,b]$ ir $|s-t| < \delta$. Sakykime, $\{s_0, s_1, ..., s_n\}$ – toks intervalo $[a,b]$ skaidinys, kad $s_k - s_{k-1} < \delta$ su visais $k = 1, ..., n$. Imkime $t_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, ..., n$, ir apibrėžkime funkciją

$$f = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)(\chi_{s_k} - \chi_{s_{k-1}}). \tag{12.6}$$

Akivaizdu, kad $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Tarkime, $t \in (a,b]$. Tuomet $s_{k-1} < t \leq s_k$ su kuriuo nors $k = 1, ..., n$. Iš (12.5) ir (12.6) formulių išplaukia, kad

$$|f(t) - g(t)| = |g(t_k) - g(t)| < \varepsilon.$$

Pastebėję, kad $f(a) = g(t_1)$, gauname

$$|f(a) - g(a)| = |g(t_1) - g(a)| < \varepsilon. \tag{12.7}$$

Vadinasi, $||g - f|| < \varepsilon$. Iš čia išplaukia

$$|F(g) - F(f)| \leq ||F|| \cdot ||g - f|| \leq \varepsilon ||f^*||. \tag{12.8}$$

Remiantis funkcijos α apibrėžimu,

$$F(f) = F\Big(\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\chi_{s_k} - \chi_{s_{k-1}}\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(F(\chi_{s_k}) - F(\chi_{s_{k-1}})\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})\big).$$

Kadangi $F(g) = f^*(g)$, iš (12.8) gauname, kad

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})\big) - f^*(g)\Big| \le \varepsilon ||f^*||.$$

Remdamiesi pastarąja nelygybe ir 12.2 apibrėžimu matome, kad

$$f^*(g) = \int_a^b g(t)d\alpha(t).$$

Lieka įrodyti, kad $V_a^b(\alpha) = ||f^*||$. Remiantis Rymano-Styltjeso integralo apibrėžimu (žr. 12.2 apibrėžimą), kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks intervalo $[a, b]$ skaidinys $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, kad

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})\big) - f^*(g)\Big| \le \varepsilon.$$

Todėl

$$\begin{aligned}
|f^*(g)| &\le \varepsilon + \Big|\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})\big)\Big| \\
&\le \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |g(t_k)| \cdot |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})| \\
&\le \varepsilon + ||g|| \sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})| \\
&\le \varepsilon + ||g|| V(\alpha).
\end{aligned}$$

Iš pastarojo įverčio gauname, kad $|f^*(g)| \le ||g||V(\alpha)$. Todėl ir $||f^*|| \le V(\alpha)$. Priešinga nelygybė įrodyta anksčiau. ∎

Ką tik įrodytoje Ryso teoremoje nieko nesakoma apie funkcijos α vienatį. Norėdami tai išsiaiškinti, tarkime, egzistuoja dvi tokios aprėžtosios variacijos funkcijos $\alpha_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ ir $\alpha_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, kad

$$f^*(f) = \int_a^b f(t)d\alpha_i(t), \quad i = 1, 2,$$

su visais $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Pažymėję $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ turime,

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t) = 0, \quad \text{su visais} \quad f \in \mathcal{C}[a, b]. \tag{12.9}$$

Kada taip yra? Kad atsakytume į šį klausimą, prisiminkime keletą faktų apie baigtinės variacijos funkcijas. Pirmiausia teisinga, kad kiekviena baigtinės variacijos funkcija turi ne daugiau kaip skaitų skaičių trūkio taškų. Antra – kiekviename trūkio taške t egzistuoja ribos iš dešinės ir iš kairės, tai yra, visi trūkio taškai yra pirmosios rūšies. Tegu $t_0 \in (a, b)$ yra funkcijos α tolydumo taškas. Imdami $\delta > 0$ pakankamai mažą, apibrėžkime tolydžiąją funkciją h taip: $h(t) = 1$, kai $t \in [a, t_0]$, $h(t) = 0$, kai $t \in [t_0 + \delta, b]$ ir h yra tiesinė intervale $[t_0, t_0 + \delta]$. Tuomet

$$\int_a^b h(t)d\alpha(t) = \alpha(t_0) - \alpha(a) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} h(t)d\alpha(t).$$

Iš (12.9) išplaukia

$$|\alpha(t_0) - \alpha(a)| \leq V_{t_0}^{t_0+\delta}(\alpha).$$

Kadangi $V_{t_0}^{t_0+\delta}(g) \to 0$, kai $\delta \to 0$ ir g tolydi funkcija, gauname $\alpha(t_0) = \alpha(a)$ kiekviename funkcijos α tolydumo taške t_0. Taigi jei teisinga lygybė (12.9), tai

$$\alpha(a) = \alpha(c) = \alpha(b) \text{ kiekviename tolydumo taške } c.$$

Be to, ta sąlyga yra ir pakankama.

Su kiekviena baigtinės variacijos funkcija α apibrėžkime funkciją

$$\widehat{\alpha}(t) = \alpha(t) - \begin{cases} \alpha(a), & t = a \\ \alpha(a) + \alpha(t) - \alpha(t+), & a < t < b \\ \alpha(a), & t = b. \end{cases}$$

Funkcija $\widehat{\alpha}$ yra baigtinės variacijos ir tenkina sąlygas

$$\widehat{\alpha}(a) = 0; \tag{12.10}$$

$$\widehat{\alpha}(t) = \widehat{\alpha}(t+). \tag{12.11}$$

Funkciją, kuriai teisingos (12.10) ir (12.11) sąlygos vadinsime normalizuota. Dabar Ryso teoremą galime pagerinti taip.

12.5 teorema. *Jei f^* – erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ tiesinis tolydusis funkcionalas, tai egzistuoja tokia vienintelė normalizuota aprėžtosios variacijos intervale funkcija $\widehat{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}$, kad*

$$f^*(g) = \int_a^b g(t)d\widehat{\alpha}(t) \quad \textit{su visais } g \in \mathcal{C}[a, b]$$

ir, be to,

$$||f^*|| = V_a^b(\widehat{\alpha}).$$

12.3 L_p erdvių tiesiniai tolydieji funkcionalai

Tegu $(S, \mathcal{S}, \mu)$ – erdvė su matu, skaičius $1 \le p < \infty$, o jo jungtinis skaičius q tenkina sąryšį $1/p + 1/q = 1$ ($q = \infty$, kai $p = 1$). Šiame skyrelyje rasime bendrąją erdvės $L_p(\mu) = L_p(S, \mathcal{S}, \mu)$ tiesinio tolydaus funkcionalo išraišką ir įrodysime, kad jungtinė erdvė $L_p^*(\mu)$ yra izometriškai izomorfinė erdvei $L_q(\mu)$.

12.6 teorema. *Tegu $1 < q \le \infty$. Su kiekviena funkcija $g \in L_q(\mu)$, funkcionalas*

$$f^*(f) = \int_S f(t)g(t)\mu(dt) \tag{12.12}$$

apibrėžtas erdvėje $L_p(\mu)$ yra tiesinis tolydus ir jo norma

$$||f^*|| = ||g||_{L_q(\mu)}. \tag{12.13}$$

Įrodymas. Teoremą įrodysime tik baigtinio mato μ atveju. Bendrasis, σ-baigtinio mato atvejis, nagrinėjamas analogiškai. Pirmiausia įrodykime, kad (12.12) formule aprašomas funkcionalas yra tiesinis tolydus ir jo norma tenkina (12.13). Tiesiškumas akivaizdus, nes

$$f^*(\alpha f + \beta g) = \int_S (\alpha f + \beta g)(t)\mu(dt) = \int_S [\alpha f(t) + \beta g(t)]\mu(dt) =$$
$$\alpha \int_S f(t)\mu(dt) + \beta \int_S g(t)\mu(dt) = \alpha f^*(f) + \beta f^*(g).$$

Jei $p > 1$, pritaikę integralinę Hiolderio nelygybę, nesunkiai išvedame

$$|f^*(f)| \le ||f||_{L_p} \cdot ||g||_{L_q}.$$

Jei $p = 1$, tai

$$|f^*(f)| \le ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_\infty}.$$

Taigi, funkcionalas f^* tolydus ir $||f^*|| \le ||g||_{L_q}$.

Toliau tarkime, $p > 1$. Apibrėžkime funkciją

$$f_0(t) = \mathrm{sign}(g(t)) \cdot |g(t)|^{q-1} ||g||_{L_q}^{-q/p}, \quad t \in S.$$

Kadangi $pq - p = q$, tai

$$\int_S |f_0(t)|^p \mu(dt) = \int_S |g(t)|^{pq-q} \mu(dt) ||g||_{L_q}^{-q} = 1.$$

Taigi, $f_0 \in L_p$ ir $||f_0|| = 1$. Todėl

$$||f^*|| \geq |f^*(f_0)| = \Big| \int_S f_0(t)g(t)\mu(dt) \Big|$$
$$= \int_S |g(t)|^q \mu(dt) \cdot ||g||^{-q/p} = ||g||_{L_q(\mu)}.$$

Taigi (12.13) įrodyta, kai $p > 1$. Tarkime, $p = 1$. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tegu aibė $A_\varepsilon \in \mathcal{S}$ yra tokia, kad $\mu(A_\varepsilon) > 0$ ir $|g(t)| > ||g||_{L_\infty(\mu)} - \varepsilon$ su visais $t \in A_\varepsilon$. Apibrėžkime funkciją

$$f_0(t) = \begin{cases} (\mu(A_\varepsilon))^{-1}\mathrm{sign} g(t), & \text{kai } t \in A_\varepsilon; \\ 0, & \text{kai } t \notin A_\varepsilon. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad $f_0 \in L_1(\mu)$ ir $||f_0|| = 1$. Be to,

$$||f^*|| \geq |f^*(f_0)| = \Big| \int_S f_0(t)g(t)\mu(dt) \Big| = (\mu(A_\varepsilon))^{-1} \int_{A_\varepsilon} |g(t)|\mu(dt) \geq ||g||_{L_\infty} - \varepsilon.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ pasirenkamas laisvai, tai $||f^*|| \geq ||g||_{L_\infty}$. Priešinga nelygybė buvo įrodyta kartu su atveju $p > 1$. Teorema pilnai įrodyta. ∎

12.7 teorema. *Tegu $1 \leq p < \infty$. Kiekvieną tiesinį tolydųjį funkcionalą $f^* : L_p(S, \mathcal{S}, \mu) \to \mathbb{R}$ atitinka tokia funkcija $g \in L_q(S, \mathcal{S}, \mu)$, kad*

$$f^*(f) = \int_S f(t)g(t)\mu(dt) \quad \textit{su visais } f \in L_p. \tag{12.14}$$

Įrodymas. Su kiekvienu $A \in \mathcal{S}$ apibrėžkime

$$\nu(A) = f^*(\chi_A).$$

Taip apibrėžta aibių funkcija yra matas. Tikrai, funkcijos ν baigtinumas ir adytivumas išplaukia iš funkcionalo f^* tolydumo ir tiesiškumo. Tarkime, (A_n) poromis nesikertančių aibių iš $\mathcal{S}$ seka, $F_n = \cup_{k=1}^n A_k$, $n = 1, 2, \ldots$ ir $A = \cup_k A_k$. Tuomet aibės A indikatorinė funkcija χ_A yra sekos χ_{A_n} riba erdvėje L_p. Kadangi funkcionalas f^* tolydus, tai $\nu(A) = \lim_n \nu(A_n)$. Taigi, ν yra matas. Be to, tas matas yra absoliučiai tolydus mato μ atžvilgiu. Pagal Radono - Nikodymo **??** teoremą, egzistuoja tokia integruojama funkcija g, su kuria

$$\nu(A) = \int_A g(t)\mu(dt), \quad \text{su visais } A \in \mathcal{S}.$$

Kitaip tariant,

$$f^*(\chi_A) = \nu(A) = \int_S \chi_A(t)g(t)\mu(dt).$$

Iš čia išplaukia, kad

$$f^*(f) = \int_S f(t)g(t)\nu(dt)$$

su bet kuria laiptine funkcija f. Dabar tarkime, f – aprėžta mati funkcija. Tuomet egzistuoja tokia laiptinių funkcijų seka (f_n), kuri tolygiai konverguoja prie f. Todėl

$$f^*(f) = \lim_n f^*(f_n) = \lim_n \int_S f_n(t)g(t)\mu(dt) = \int_S f(t)g(t)\mu(dt).$$

Pagaliau, tegu $f \in L_p(\mu)$. Apibrėžkime

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & \text{jei } \ f(t) > n \\ f(t), & \text{jei } \ |f(t)| \leq n \\ -n, & \text{jei } \ f(t) < -n. \end{cases}$$

Seka (f_n) konverguoja erdvėje $L_p(\mu)$. Todėl $f^*(f) = \lim_n f^*(f_n)$. Be to, $(f_n g)$ konverguoja prie fg ir $(|f_n g|)$ yra aprėžta ir konverguoja prie $|fg|$. Taigi

$$\int_S f(t)g(t)\mu(dt) = \lim_n \int_S f_n(t)g(t)\mu(dt) = \lim_n f^*(f_n) = f^*(f).$$

Liko įrodyti, kad $g \in L_q(\mu)$. Tuo tikslu, imdami $f \in L_p(\mu)$, nagrinėkime seką

$$f_n(t) = \begin{cases} |f(t)|\text{sign} g(t), & \text{jei } \ |f(t)| \leq n \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Akivaizdu, kad $||f_n|| \leq ||f||$. Taigi,

$$f^*(f_n) \leq ||f^*|| \cdot ||f_n|| \leq ||f^*|| \cdot ||f||.$$

Bet $(|f_n g|)$ konverguoja prie $|fg|$, ir

$$\int_S |f(t)g(t)|\mu(dt) = \lim_n \int_S |f_n(t)g(t)|\mu(dt) =$$

$$\liminf_n \int_S f_n(t)g(t)\mu(dt) = \liminf |f^*(f_n)| \leq ||f^*||||f||.$$

Taigi, $\int_S f(t)g(t)\mu(dt) < \infty$ su kiekviena funkcija $f \in L_p$. Lieka tai pritaikyti teoremos 12.6 įrodyme apibrėžtai funkcijai f_0. ■

Iš teoremų 12.6 ir 12.7 išvadameši rezultatą.

12.8 teorema. *Tegu $1 \leq p < \infty$.Erdvės $L_p(\mu)$ jungtinė erdvė $L_p^*(\mu)$ izometriškai izomorfinė erdvei $L_q(\mu)$. Be to, atvaizdis $T : L_p^*(\mu) \to L_q(\mu)$, $Tf^* = g$, kai g nusakytas 12.7 teorema, yra izometrinis izomorfizmas.*

Skaitinių sekų erdvės ℓ_p yra atskiras $L_p(\mu)$ erdvių atvejis (tereikia paimti $S = \{1, 2, \dots\}$ ir μ taip vadinamą skaičiuojantį matą, $\mu(\{k\}) = 1$, $k = 1, 2, \dots T$.) Todėl iš suformuluotų teoremų išvedame šiuos teiginius.

12.9 teorema. *Tegu $1 \leq p < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Su kiekvienu $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_q$, funkcionalas*

$$\mathbf{f}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{12.15}$$

apibrėžtas visiems $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_p$ yra tiesinis tolydus ir jo norma

$$||f^*|| = ||y||_{\ell_q}. \tag{12.16}$$

Ir atvirkščiai, kiekvieną tiesinį tolydų funkcionalą $f^* : \ell_p \to \mathbb{R}$ atitinka toks $\boldsymbol{y} \in \ell_q$, kad

$$f^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \text{su visais } \ \boldsymbol{x} \in \ell_p. \tag{12.17}$$

Todėl erdvės ℓ_p jungtinė erdvė ℓ_p^* izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_q. Be to, atvaizdis $T : \ell_p^* \to \ell_q$, $Tf^* = \boldsymbol{y}$, kai $\boldsymbol{y}$ nusakytas (12.17) lygybe, yra izometrinis izomorfizmas.

12.4 Refleksyviosios Banacho erdvės

Normuotosios tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ jungtinė erdvė $\mathbb{E}^*$ yra Banacho, todėl galime kalbėti apie jos jungtinę erdvę $(\mathbb{E}^*)^*$. Pastaroji žymima $\mathbb{E}^{**}$ ir vadinama *antrąja erdvės $\mathbb{E}$ jungtine erdve.*

12.10 teorema. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – normuotoji tiesinė erdvė. Imdami $x \in \mathbb{E}$, apibrėžkime atvaizdį $\hat{x} : \mathbb{E}^* \to \mathbb{R}$,*

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x),$$

kai $x^* \in \mathbb{E}^*$. Atvaizdis $\hat{x}$ yra tiesinis tolydusis funkcionalas, apibrėžtas erdvėje E^*, o atvaizdis $J : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**}$, $J(x) = \hat{x}$ – izometrinis izomorfizmas tarp $\mathbb{E}$ ir $J(\mathbb{E})$.

Įrodymas. Jei $x \in \mathbb{E}$, x_1^*, $x_2^* \in \mathbb{E}^*$ ir α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ tai

$$\begin{aligned}&\hat{x}(\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*) = (\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*)(x) = \alpha_1 x_1^*(x) + \alpha_2 x_2^*(x)\\&= \alpha_1 \hat{x}(x_1^*) + \alpha_2 \hat{x}(x_2^*).\end{aligned}$$

Iš šių lygybių išplaukia, kad $\hat{x}$ – tiesinis erdvės $\mathbb{E}^*$ funkcionalas. Remiantis **??** išvada,

$$\begin{aligned}&||x|| = \sup\{|x^*(x)| : \ x^* \in \mathbb{E}^*, \ ||x^*|| \le 1\}\\&= \sup\{|\hat{x}(x^*)| : \ x^* \in \mathbb{E}^*, \ ||x^*|| \le 1\}.\end{aligned}$$

Remiantis tomis lygybėmis, $\hat{x}$ – aprėžtasis tiesinis funkcionalas ir $||\hat{x}|| = ||x||$.

Jei $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, tai

$$\begin{aligned}&J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x^*) = x^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \hat{x}_1(x^*) + \alpha_2 \hat{x}_2(x^*)\\&= (\alpha_1 \hat{x}_1 + \alpha_2 \hat{x}_2)(x^*).\end{aligned}$$

Vadinasi, $J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2)$. Iš čia išplaukia, kad atvaizdis J tiesinis, o iš lygybės $||x|| = ||\hat{x}||$ išplaukia, kad atvaizdis J yra izometrija. ■

12.3 apibrėžimas. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė. Tiesinė izometrija $x \to \hat{x}$ vadinama kanoniniu erdvės $\mathbb{E}$ atvaizdžiu į antrąją jungtinę erdvę $\mathbb{E}^{**}$.*

Kanoninis atvaizdis yra bijekcija tarp $\mathbb{E}$ ir aibės $\hat{\mathbb{E}} = \{\hat{x} = J(x) : x \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{E}^{**}$. Akivaizdu, kad $\hat{\mathbb{E}} \ne \mathbb{E}^{**}$, jei $\mathbb{E}$ nėra Banacho erdvė. Tačiau žemiau pateikiamas pavyzdys rodo, kad, netgi tuo atveju, kai $\mathbb{E}$ yra Banacho erdvė, gali atsitikti taip, kad $\mathbb{E}^{**} \ne \hat{\mathbb{E}}$.

12.1 pavyzdys. Iš teoremos **??** žinome, kad egzistuoja tiesinė izometrija $T : c_0^* \to \ell_1$, be to $T(c_0^*) = \ell_1$.

Žymėsime

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_\infty$ ir $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_1$. Remiantis atvaizdžio T apibrėžimu,

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, Tx^* \rangle,$$

kai $\boldsymbol{x} \in c_0$ ir $\boldsymbol{x}^* \in c_0^*$. Jei $\boldsymbol{x} \in c_0$, tai, imdami bet kurį $\boldsymbol{x}^* \in c_0^*$, gauname

$$\hat{\boldsymbol{x}}(x^*) = x^*(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, Tx^* \rangle. \tag{12.18}$$

Parinkime $\boldsymbol{y} \in \ell_\infty \backslash c_0$ ir apibrėžkime

$$\boldsymbol{y}^{**}(\boldsymbol{x}^*) = \langle \boldsymbol{y}, T\boldsymbol{x}^* \rangle, \tag{12.19}$$

kai $\boldsymbol{x}^* \in c_0^*$. Nesunku įrodyti (žr. ?? pavyzdį), kad $\boldsymbol{y}^{**} \in c_0^{**}$. Tarkime, $\boldsymbol{y}^{**} = \hat{\boldsymbol{x}}$ kuriam nors $\boldsymbol{x} \in c_0$. Pasinaudoję (12.18) ir (12.19), turime

$$\langle \boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}^* \rangle = \langle \boldsymbol{y}, T\boldsymbol{x}^* \rangle$$

su visais $\boldsymbol{x}^* \in c_0^*$.

Prisiminę, kad $T(c_0^*) = l_1$, gauname lygybes $\langle \boldsymbol{x}, e_n \rangle = \langle \boldsymbol{y}, e_n \rangle$ su visais $n = 1, 2, ...$ Čia $e_n = (\delta_{mn})_{m \geq 1}$. Išeitų, kad $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, o tai neteisinga. Vadinasi, $\boldsymbol{y}^{**} \in c_0^{**}$, bet $\boldsymbol{y}^{**} \notin \hat{c}_0$.

12.4 apibrėžimas. *Normuota erdvė $\mathbb{E}$ vadinama refleksyviąja, jei kanoninis atvaizdis $J : x \to \hat{x}$ vaizduoja $\mathbb{E}$ į $\mathbb{E}^{**}$, t.y. jei $J(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**}$.*

Akivaizdu, kad refleksyvioji normuota erdvė būtinai Banacho. Be to, 12.1 pavyzdys rodo, kad egzistuoja nerefleksyvios Banacho erdvės.

12.11 teorema. *Banacho erdvė ℓ_p yra refleksyvi, kai $1 < p < \infty$.*

Įrodymas. Sakykime, $1 < p < \infty$ ir $q = p/(p-1)$. Rašysime

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_p$, o $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_q$. Remiantis **??** teorema, egzistuoja izometrija $T_p : \ell_q \to \ell_p^*$, kad $T_p(\ell_q) = \ell_p^*$ ir

$$(T_p\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

su visais $\boldsymbol{x} \in \ell_p$ ir $\boldsymbol{y} \in \ell_q$. Taip pat egzistuoja izometrija $T_q : \ell_p \in \ell_q^*$, kad $T_q(\ell_p) = \ell_q^*$ ir

$$(T_q\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

su visais $\boldsymbol{x} \in \ell_p$ ir $\boldsymbol{y} \in \ell_q$.

Dabar tarkime, $\boldsymbol{x}^{**} \in \ell_p^{**}$ ir $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{x}^{**} \circ T_p$, $\boldsymbol{y}^* : \ell_q \to \mathbb{R}$, t.y., $\boldsymbol{y}^* \in \ell_q^*$, todėl egzistuoja vienintelis elementas $\boldsymbol{x} \in \ell_p$, su kuriuo $\boldsymbol{y}^* = T_q\boldsymbol{x}$. Jeigu $\boldsymbol{x}^* \in \ell_p^*$, tai $\boldsymbol{x}^* = T_p\boldsymbol{y}$ su kuriuo nors $\boldsymbol{y} \in \ell_q$. Vadinasi,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{**}(\boldsymbol{x}^*) &= \boldsymbol{x}^{**}(T_p y) = (\boldsymbol{x}^{**} \circ T_p)(\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{y}) = (T_q\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= (T_p\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*).\end{aligned}$$

Gavome $\boldsymbol{x}^{**} = \hat{\boldsymbol{x}}$. Tai ir įrodo, kad erdvė ℓ_p yra refleksyvi. ∎

Būtina pabrėžti, kad erdvė $\mathbb{E}$ yra refleksyvi tik tokiu atveju, kai erdvės $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{E}^{**}$ izometrinės kanoninio atvaizdžio $x \to \hat{x}$ atžvilgiu.[1]

Kaip jau minėjome (žr. **??** skyrelį), kiekvieną tiesinę normuotą erdvę $\mathbb{E}$ galima papildyti iki Banacho erdvės, t. y. egzistuoja tokia Banacho erdvė $\mathbb{F}$ ir toks jos tiesinis poaibis $\mathbb{F}_0$, kad

i) aibė $\mathbb{F}_0$ yra visur tiršta $[\mathbb{F}_0] = \mathbb{F}$;

ii) aibė $\mathbb{F}_0$ su indukuota norma yra izometriškai izomorfinė $\mathbb{E}$.

Dabar nesunkiai galime šį teiginį įrodyti. Tegu $J : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**}$ – kanoninis atvaizdis. Paimkime $\mathbb{F} = [J(\mathbb{E})]$ – aibės $J(\mathbb{E})$ uždarinį erdvėje $\mathbb{E}^{**}$. Kadangi $\mathbb{E}^{**}$ – Banacho erdvė, tai $\mathbb{F}$ taip pat Banacho. Imdami $\mathbb{F}_0 = J(\mathbb{E})$ ir aibėje $\mathbb{F}_0$ nagrinėdami indukuotąją normą, pagal 12.10 teoremą matome, kad normuotos erdvės $\mathbb{F}_0$ ir $\mathbb{E}$ yra izometriškai izomorfinės. Taigi $\mathbb{F}$ yra erdvės $\mathbb{E}$ pildinys.

[1] 1951 metais R. C. James sukonstravo Banacho erdvę $\mathbb{E}$, kuri yra izometrinė antrajai jungtinei erdvei $\mathbb{E}^{**}$, bet nėra refleksyvi, nes atvaizdis, kurį galima sukonstruoti tarp $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{E}^{**}$ nėra kanoninis.