10 paskaita

10.1 Ortonormuotosios sistemos

Šiame skyrelyje nagrinėsime begalinio matavimo erdvės su skaliarine daugyba ortonormuotąsias sekas. Kiekviena tokia seka yra savotiška ortogonalioji koordinačių sistema, kurios pagalba erdvės elementus galime aprašyti koordinatėmis. Išsiaiškinsime, kurios iš ortonormuotųjų sekų sudaro Šauderio bazę. Be to, įrodysime, kad separabilioje Hilberto erdvėje visados egzistuoja Šauderio bazė, sudaryta iš ortogonalių elementų.

10.1.1 Sąvokos

Tegu $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė su skaliarine daugyba $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ir elementų norma $||x|| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

10.1 apibrėžimas. *Netuščia erdvės $\mathbb{E}$ nenulinių elementų sistema $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ vadinama ortogonaliąja, jei $x_\alpha \perp x_\beta$, kai $\alpha \neq \beta$. Jei, be to, $\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = 1$ su visais $\alpha \in I$, tai sistema $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ vadinama ortonormuotąja.*

Skaiti ortogonalioji (atitinkamai ortonormuotoji) sistema vadinama ortogonaliąja (atitinkamai ortonormuotąja) seka.

10.1 lema. *Bet kuri erdvės $\mathbb{E}$ ortonormuotoji sistema $A = \{x_\alpha, \alpha \in I\}$ yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Prisiminę **??** apibrėžimą, turime parodyti, kad bet koks baigtinis aibės A elementų rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas. Paimkime baigtinį rinkinį $\{x_1, ..., x_n\} \subset A$. Jei skaliarai $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ yra tokie, kad

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

tai, pritaikę skaliarinės daugybos (**??**) taisyklę gauname, kad

$$0 = \langle \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, x_m \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_m \rangle + \cdots \lambda_n \langle x_n, x_m \rangle = \lambda_m$$

su visais $m = 1, ..., n$. Taigi bet kuris aibės A baigtinis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. ■

10.1 teiginys. *Separabiliosios erdvės su skaliarine daugyba ortogonalioji sistema* $(x_\alpha, \alpha \in I)$ *negali būti daugiau negu skaiti.*

Įrodymas. Nesiaurindami bendrumo galime manyti, kad sistema $(x_\alpha, \alpha \in I)$ yra ir normuota. Jei $\alpha \neq \beta$, tai

$$||x_\alpha - x_\beta||^2 = \langle x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle = ||x_\alpha||^2 + ||x_\beta||^2 = 2.$$

Paimkime nesikertančių uždarųjų rutulių sistemą $\{B_{1/2}(x_\alpha), \alpha \in I\}$. Kadangi $\mathbb{E}$ separabili, tai egzistuoja visur tiršta skaiti aibė $\{y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{E}$. Jei sistema $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ visur tiršta, tai kiekviename rutulyje $\{B_{1/2}(x_\alpha)\}$ yra bent po vieną jos elementą. O tai reiškia, kad rutulių, o tuo pačiu ir jų centrų $\{x_\alpha\}$ sistema yra ne daugiau kaip skaiti. ■

10.2 apibrėžimas. *Erdvės* $\mathbb{E}$ *ortogonalioji sistema* $\{x_\alpha,\ \alpha \in I\}$ *vadinama pilnąja, jei jos generuotas poerdvis*[1] *sutampa su visa erdve.*

Pritaikę **??** teiginį, įrodome šią pilnos sistemos savybę.

10.2 teiginys. *Ortogonalioji sistema* $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ *yra pilna tada ir tik tada, kai jos tiesinio apvalko uždarinys sutampa su visa erdve, t.y.*

$$[\mathrm{tap}(\{x_\alpha, \alpha \in I\})] = \mathbb{E}.$$

Šis Hilberto erdvės ortonormuotos sistemos pilnumo kriterijus yra labai naudingas.

10.1 teorema. *Hilberto erdvės* $\mathbb{H}$ *ortonormuotoji sistema* $(\psi_\alpha, \alpha \in I)$ *yra pilna tada ir tik tada, kai neegzistuoja nenulinis erdvės* $\mathbb{H}$ *elementas, ortogonalus visiems* $\psi_\alpha, \alpha \in I$.

Įrodymas. *Būtinumas.* Sakykime, $(\psi_\alpha, \alpha \in I)$ – pilna ortonormuotoji sistema. Tai reiškia, kad $[\mathrm{tap}(\psi_\alpha)] = \mathbb{H}$. Jei $x \perp \psi_\alpha$ su visais $\alpha \in I$, tai pasinaudoję skaliarinės daugybos tolydumu gauname, kad $x \perp y$ su visais $y \in \mathbb{H}$.

[1] mažiausias erdvės $\mathbb{E}$ poerdvis, kuriam priklauso $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$.

Tačiau tik nulinis elementas yra statmenas visiems erdvės elementams. Taigi $x = 0$.
Pakankamumas. Tarkime, priešingai, kad sistema $(\psi_\alpha, \alpha \in I)$ nėra pilna, t.y. jos generuotas poerdvis $\mathbb{H}_1$ nesutampa su $\mathbb{H}$. Imkime $x \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{H}_1$ ir, pasinaudoję **??** teorema, užrašykime

$$x = y + z$$

kai $y \in \mathbb{H}_1$, $z \perp \mathbb{H}_1$ ir $z \neq 0$ (priešingu atveju $x \in \mathbb{H}_1$). Turime nenulinį elementą z, statmeną visiems $\psi_\alpha, \alpha \in I$. Gauta prieštara rodo, kad padarytoji prielaida buvo neteisinga. ■

Ortogonaliosios sistemos $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ pilnumas leidžia kiekvieną erdvės $\mathbb{E}$ elementą pasirinktu tikslumu aproksimuoti tiesine elementų x_α kombinacija. Tai yra, jei $x \in \mathbb{E}$ ir $\varepsilon > 0$, tai egzistuoja tokia tiesinė kombinacija

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{\alpha_i}, \quad \text{kad} \quad ||x - \tilde{x}|| < \varepsilon.$$

10.1 pavyzdys. Imkime erdvės $L_{2,s}(a, b)$ funkcijų sistemą $\{f_t, t \in [a, b]\}$,

$$f_t(s) = \delta_{ts}, \quad s \in [a, b]$$

su kiekvienu $t \in [a, b]$ (žr. **??** pavyzdį). Nesunku įsitikinti, kad tai ortonormuotoji sistema, t.y., $||f_t|| = 1$, su kiekvienu $t \in [a, b]$ ir $\langle f_t, f_v \rangle = 0$, jei $t \neq v$. Ši sistema pilna, nes kiekvieną erdvės $L_{2,s}(a, b)$ elementą galime kokiu norime tikslumu aproksimuoti baigtinėmis tiesinėmis ortonormuotų funkcijų f_t kombinacijomis. Iš tikrųjų, tegu f - bet kuris erdvės $L_{2,s}(a, b)$ elementas, o $t_k, k \geq 1$ - taškai, kuriuose funkcija f nelygi nuliui. Pritaikę skaliarinės daugybos (**??**) ir (**??**) taisykles, nesunkiai išvedame

$$\begin{aligned} ||f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, f_{t_k} \rangle f_{t_k}||^2 &= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle f, f_{t_k} \rangle^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f^2(t_k) - \sum_{k=1}^{n} f^2(t_k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f^2(t_k). \end{aligned}$$

Dešinėje pusėje stovi konverguojančios eilutės liekana, todėl, pasirinkę n pakankamai didelį, galime pasiekti, kad ši liekana būtų kiek norimai maža. Taigi, sistema $\{f_t, t \in [a, b]\}$ yra pilna.

10.1.2 Ortogonalizacijos procedūra

Erdvėms su skaliarine daugyba svarbesnės yra ortogonaliosios sekos. Mat jas galime interpretuoti kaip savotišką ortogonaliąją koordinačių sistemą. Ortogonaliosios sekos dažnai konstruojamos iš tiesiškai nepriklausomų elementų. Tam egzituoja bent keletas būdų. Vienas jų – Gramo-Šmidto ortogonalizacijos procesas, kuris naudojamas įrodant šią teoremą[2].

10.2 teorema. *Tegu $x_1, x_2, \ldots$ – tiesiškai nepriklausomų erdvės $\mathbb{E}$ elementų seka. Egzistuoja tokia erdvės $\mathbb{E}$ elementų seka $y_1, y_2, \ldots,$ kuri pasižymi šiomis savybėmis:*

(a) *seka (y_n) yra ortonormuota;*

(b) *su kiekvienu $n \geq 1$ elementas y_n yra tiesinė elementų $x_1, \ldots, x_n$ kombinacija, t.y. egzistuoja tokie realūs skaičiai $a_{n1}, \cdots, a_{nn}$, kad*

$$y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n, \; a_{nn} \neq 0 \tag{10.1}$$

(c) *su kiekvienu $n \geq 1$, x_n yra tiesinė elementų $y_1, \ldots, y_n$ kombinacija, t.y. egzistuoja tokie realūs skaičiai $b_{n1}, \cdots, b_{nn}$, kad*

$$x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n, \quad b_{nn} \neq 0. \tag{10.2}$$

Be to, šios trys sąlygos sekos (y_n) elementus nusako ženklo tikslumu.

Įrodymas. Seką $y_1, y_2, ...$ konstruosime matematinės indukcijos pagalba. Elementą y_1 parinkti lengva: lygybėje $y_1 = a_{11}x_1$ skaičių a_{11} randame iš sąlygos $||y_1|| = 1$. Taigi

$$a_{11} = (b_{11})^{-1} = \pm||x_1||^{-1}.$$

Elementą y_2 sukonstruosime per du žingsnius. Pirmiausia iš x_2 atimkime jo projekciją į poerdvį $E_1 = \text{tap}\{y_1\}$. Gautas elementas

$$z_2 = x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1.$$

yra ortogonalus poerdviui E_1. Kadangi vektoriai $(x_k, k \in \mathbb{N})$ tiesiškai nepriklausomi, tai $x_2 \notin E_1$. Taigi $z_2 \neq 0$ ir apibrėžiame $y_2 = \pm z_2/||z_2||$. Aprašytą

[2] Iš tikrųjų įrodyme naudojamas Šmidto pasiūlytas ortogonalizacijos procesas. Gramo įrodymas kitoks (apibrėžiant Gramo determinantus)

procesą tęsiame ir sakykime, kad elementus $y_1, y_2, ..., y_m \in \mathbb{E}$ sukonstravome taip, kad aibė $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ – ortonormuota ir teisingi (10.1) bei (10.2) sąryšiai, kai $n = 1, ..., m$. Pažymėkime

$$z_{m+1} = x_{m+1} - \langle x_{m+1}, y_1\rangle y_1 - \langle x_{m+1}, y_2\rangle y_2 - \cdots - \langle x_{m+1}, y_m\rangle y_m.$$

Nesunku įsitikinti, kad $\langle z_{m+1}, y_n\rangle = 0$, kai $n = 1, 2, ..., m$. Be to, iš tiesinio aibės $\{x_1, ..., x_{m+1}\}$ nepriklausomumo ir (10.1) sąryšio gauname, kad $z_{m+1} \neq 0$. Pažymėkime $y_{m+1} = \pm z_{m+1}||z_{m+1}||^{-1}$. Nesunku įsitikinti, kad aibė $\{y_1, y_2, ..., y_{m+1}\}$ ortonormuota ir teisingi (10.1) bei (10.2) sąryšiai. ∎

10.3 teiginys. *Kiekvieną erdvės $\mathbb{E}$ tiesiškai nepriklausomų elementų seką atitinka tą patį poerdvį generuojanti ortonormuotoji seka.*

Įrodymas. Tegu (x_n) – erdvės $\mathbb{E}$ tiesikai nepriklausomų elementų seka, $E(x_n)$ – jos generuotas poerdvis. Remiantis **??** teiginiu, $E(x_n) = [\mathrm{tap}(x_n)]$. Jei (y_n) – Gramo-Šmidto ortogonalizacijos būdu sukonstruota ortonormuotoji seka, tai pagal konstrukciją $\mathrm{tap}(x_n) = \mathrm{tap}(y_n)$. Kadangi tiesiniai apvalkai sutampa, tai sutampa ir jų uždariniai, tai yra $[\mathrm{tap}(x_n)] = [\mathrm{tap}(y_n)]$. Taigi sutampa ir sekų (x_n) bei (y_n) generuoti poerdviai. ∎

10.1 išvada. *Jei $\mathbb{E}$ – n-matė tiesinė erdvė, tai joje egzistuoja bent viena ortonormuotoji aibė sudaryta iš n elementų ir bet kuri tokia aibė yra pilna.*

Įrodymas. Jei $\dim(\mathbb{E}) = n$, tai egzistuoja n tiesiškai nepriklausomų elementų, sakykime, $x_1, \ldots, x_n$, kurių tiesinis darinys $\mathrm{tap}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{E}$. Jei $y_1, \ldots, y_n$ – Gramo-Šmidto ortogonalizacijos būdu iš $x_1, \ldots, x_n$ gauta ortonormuotoji aibė, tai $\mathrm{tap}(y_1, \ldots, y_n) = \mathrm{tap}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{E}$. ∎

10.4 teiginys. *Jei $\dim(\mathbb{E}) = \infty$, tai erdvėje $\mathbb{E}$ egzistuoja bent viena begalinė ortonormuotoji aibė.*

Įrodymas. Begalinės dimensijos erdvėje egzistuoja begalo daug tiesiškai nepriklausomų elementų. Bet kuriai tokiai šeimai pritaikę Gramo-Šmidto ortogonalizacijos procesą, gausime begalinę ortonormuotą aibę. ∎

10.1.3 Furjė eilutės

Jau minėjome, kad erdvėse su skaliarine daugyba ortogonalias sekas galime interpretuoti kaip savotišką ortogonaliąją koordinačių sistemą. Šiame skyrelyje išsiaiškinsime, kada tokia interpretacija turi prasmę.

Tarkime, $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ erdvės $\mathbb{E}$ ortonormuotoji seka. Jei elementas $x \in \mathbb{E}$ yra eilutės $\sum_k \alpha_k \psi_k$ suma, tai yra,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$$

tai būtinai $\alpha_k = \langle x, \psi_k \rangle, k \in \mathbb{N}$. Tikrai, remiantis skaliarinės sandaugos tolydumu ir skaliarinės daugybos (**??**) taisykle, su kiekvienu $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\langle x, \psi_k \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j, \psi_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle \psi_j, \psi_k \rangle \\ &= \alpha_k.\end{aligned}$$

Tačiau ne visada eilutės $\sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$ suma sutampa su x (suraskite pavyzdį). Taigi prasmingi yra šie du apibrėžimai.

10.3 apibrėžimas. *Skaičiai $c_k = c_k(x) = \langle x, \psi_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, vadinami elemento $x \in \mathbb{E}$ Furjė koeficientais sistemos $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ atžvilgiu, o eilutė*

$$\sum_k c_k \psi_k$$

– elemento x Furjė eilute.

10.4 apibrėžimas. *Ortonormuotoji seka $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ vadinama erdvės $\mathbb{E}$ ortonormuotąja baze, jei kiekvienas $x \in \mathbb{E}$ yra savo Furjė eilutės suma, t.y.*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \psi_k. \tag{10.3}$$

10.2 pavyzdys. Erdvės ℓ_2 seka $(\boldsymbol{e}_k, k \in \mathbb{N})$ yra ortonormuota bazė. Tikrai, jau žinome, kad $(\boldsymbol{e}_k, k \in \mathbb{N})$ yra erdvės ℓ_2 Šauderio bazė. Lieka pastebėti, kad $||\boldsymbol{e}_k|| = 1$ su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$ ir $\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$, jei $k \neq j$.

Taigi ortonormuota bazė ir sudaro erdvės koordinačių sistemą, o Furjė koeficientai yra elemento koordinatės tos sistemos atžvilgiu. Kada ortonormuota seka yra erdvės bazė ir kada tokia bazė apskritai egzistuoja – klausimai, į kuriuos netrukus rasime atsakymus. Tam ištirsime Furjė eilučių konvergavimą. Pirmiausia įrodysime svarbias Furjė koeficientų savybes.

10.5 teiginys. *Su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$ eilutė $\sum_k |c_k(x)|^2$ konverguoja ir teisinga Beselio nelygybė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \leq ||x||^2. \tag{10.4}$$

Jei L_n yra erdvės $\mathbb{E}$ poerdvis, generuotas pirmųjų n elementų $\psi_1, \ldots \psi_n$, tai su bet kuriuo $x \in \mathbb{E}$

$$d_n = \rho(x, L_n) = \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k\Big\| = \Big(||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{10.5}$$

Įrodymas. Įrodykime (10.5). Kadangi poerdvio L_n elementai yra pavidalo $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k$, su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tai

$$d_n = \inf \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k\Big\|,$$

čia tikslusis apatinis rėžis imamas pagal visus galimus skaliarų $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rinkinius. Įrodysime, kad tikslųjį apatinį rėžį realizuoja Furjė koeficientai $(c_1, \ldots, c_n)$. Pažymėję $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k$ ir, pasinaudoję sistemos (ψ_k) ortonormuotumu bei skaliarinės daugybos (**??**), (**??**) taisyklėmis, turime

$$\begin{aligned}
\langle S_n, S_n \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \Big\rangle = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \langle \psi_k, \psi_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2, \\
\langle x, S_n \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k c_k, \\
\langle S_n, x \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{c}_k.
\end{aligned}$$

Pasinaudoję gautomis išraiškomis, suskaičiuojame

$$\begin{aligned}
||x - S_n||^2 &= \langle x - S_n, x - S_n \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, S_n \rangle - \langle S_n, x \rangle + \langle S_n, S_n \rangle \\
&= ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k c_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{c}_k + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \\
&= ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - c_k|^2, \qquad (10.6)
\end{aligned}$$

nes $|\alpha_k - c_k|^2 = (\alpha_k - c_k)(\overline{\alpha}_k - \overline{c}_k) = |\alpha_k|^2 - \overline{\alpha}_k c_k - \alpha_k \overline{c}_k + |c_k|^2$. Iš čia nesunku matyti, kad dydis $||x - S_n||^2$ bus mažiausias, kai $\alpha_k = c_k$ su visais $k = 1, \dots, n$, t.y., (10.5) formulės yra teisingos.

Pritaikę (10.6) formulę, kai $\alpha_k = c_k$, turime

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \qquad (10.7)$$

Kadangi bet kurio elemento norma yra neneigiama, iš (10.7) išplaukia, kad su bet kuriuo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq ||x||^2.$$

Šios nelygybės dešinė pusė nepriklauso nuo n, todėl eilutė $\sum_k |c_k|^2$ konverguoja ir teisinga Beselio (10.4) nelygybė. Teiginys pilnai įrodytas. ∎

Dabar jau pasiruošę atsakyti į klausimą apie Furjė eilučių konvergavimą.

10.3 teorema. *Elemento $x \in \mathbb{E}$ Furjė eilutė konverguoja visada, o*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$$

tada ir tik tada, kai teisinga vadinamoji Parsevalio lygybė

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \qquad (10.8)$$

Įrodymas. Rezultatas nesunkiai išvedamas iš 10.5 teiginio. ∎

Įrodyta teorema daro prasmingu šį apibrėžimą.

10.5 apibrėžimas. *Sakysime, kad erdvės $\mathbb{E}$ ortonormuotoji seka (ψ_k) yra uždara, jei kiekvienam tos erdvės elementui galioja Parsevalio lygybė.*

Sugretinę šį apibrėžimą su 10.4 apibrėžimu ir ką tik įrodyta 10.3 teorema, padarome šią išvadą.

10.6 teiginys. *Erdvės $\mathbb{E}$ ortonormuota seka $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ yra ortonormuota bazė tada ir tik tada, kai ji yra uždara.*

10.1.4 Separabiliosios Hilberto erdvės

Ortonormuotosioms sistemoms turime dvi sąvokas – pilnumą, apibrėžtą bet kokioms, t.y., nebūtinai skaičioms sistemoms ir uždarumą, apibrėžtą ortonormuotoms sekoms. Separabilioms erdvėms šios abi savokos sutampa.

10.4 teorema. *Jei erdvė $\mathbb{E}$ separabili, tai kiekviena pilna ortonormuotoji seka yra uždara ir atvirkščiai.*

Įrodymas. Tegu $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ – pilna ortonormuotoji seka. Tada kiekvienas erdvės $\mathbb{E}$ elementas x gali būti kaip norint tiksliai aproksimuotas tiesine kombinacija $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$. Tai yra, kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka koks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \Big\| < \varepsilon, \qquad \text{kai} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

Kita vertus žinome, kad vietoj $\alpha_k, k \geq 1$ paėmę elemento x Furjė koeficientus $c_k, k \geq 1$, gausime tik tikslesnę aproksimaciją, t.y.

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \Big\| \leq \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \Big\|.$$

Iš čia išvedame, kad Furjė eilutė $\sum_k c_k \phi_k$ konverguoja į elementą x. Savo ruožtu 10.3 teorema garantuoja Parsevalio lygybę. Taigi seka $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ yra uždara.

Dabar tarkime, kad ortonormuotoji seka $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ – uždara. Tada kiekvieno erdvės $\mathbb{E}$ elemento x Furjė eilutės dalinių sumų seka konverguoja į x. Bet tai reiškia, kad aibė sudaryta iš sistemos $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ elementų tiesinių darinių yra visur tiršta, t.y., $[\text{tap}(\phi_k)] = \mathbb{E}$. Remiantis 10.2 teiginiu, seka $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ yra pilna. ■

Kadangi ortonormuota bazė yra ir Šauderio bazė, tai ji gali egzistuoti tik separabilioms erdvėms (žr. **??** teoremą). Priešingai nei Banacho erdvėms, separabilioms Hilberto erdvėms ortonormuota bazė visada egzistuoja.

10.5 teorema. *Kiekvienoje separabiliojoje Hilberto erdvėje egzistuoja skaiti ortonormuota bazė.*

Įrodymas. Jei $\mathbb{H}$ – separabilioji Hilberto erdvė, tai egzistuoja skaiti visur tiršta aibė $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{H}$. Sakykime, $e_1 = x_k$ – pirmasis nelygus nuliui jos elementas. Imkime seką $(x_{k+j}, j = 1, 2, ...)$ ir tarkime, kad $e_2 = x_l$ - pirmasis toks šios sekos elementas, kad e_1 ir e_2 tiesiškai nepriklausomi. Toliau, imdami seką $(x_{l+j}, j = 1, 2, ...)$, rasime tokį elementą e_3, kad elementai e_1, e_2, e_3 - tiesiškai nepriklausomi. Tęsdami šį procesą, gausime tiesiškai nepriklausomą aibę $\{e_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{H}$. Be to, šios aibės tiesinis darinys, pažymėkime jį L, visur tirštas, nes sutampa su aibės $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ tiesiniu dariniu. Aibei $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ pritaikę Gramo-Šmidto ortogonalizacijos procesą, gauname ortonormuotąją seką $\{f_k, k \in \mathbb{N}\}$, kurios tiesinis apvalkas yra visur tiršta aibė, nes sutampa su L. ■

Toliau įrodysime, kad visos separabiliosios Hilberto erdvės izometriškai izomorfinės. Tai reiškia, kad tarp bet kurių dviejų separabiliųjų Hilberto erdvių $\mathbb{H}$ ir $\mathbb{H}_1$ galime sukonstruoti abipus vienareikšmį atvaizdį, kuris išlaiko tiesines operacijas (tiesinių erdvių izomorfizmas) ir skaliarinę sandaugą (tai užtikrina Hilberto erdvių, kaip metrinių erdvių izometriškumą), t. y., jei $x, y \in \mathbb{H}$, $x_1, y_1 \in \mathbb{H}_1$ ir

$$x \leftrightarrow x_1, \qquad y \leftrightarrow y_1,$$

tai

$$x + y \leftrightarrow x_1 + y_1, \qquad \alpha x \leftrightarrow \alpha x_1 \text{ ir } \langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle.$$

Norėdami pasiekti tikslą, turime atsakyti į šį klausimą. Kada skaliarų seka (a_n) yra kokio nors elemento $x \in \mathbb{E}$ Furjė koeficientų seka? Iš Beselio nelygybės matome, kad tam būtinas eilutės $\sum_k a_k^2$ konvergavimas. Pasirodo

Hilberto erdvėms ši salyga yra ir pakankama. Tai tvirtina Ryso-Fišerio teorema.

10.6 teorema. (Ryso-Fišerio.) *Tegu* $(\phi_k, k \in \mathbb{N})$ *– ortonormuotoji Hilberto erdvės* $\mathbb{H}$ *seka, o skaliarai* $a_1, a_2, \ldots,$ *tokie, kad* $\sum_k |a_k|^2 < \infty$*. Tada egzistuoja toks elementas* $x \in \mathbb{H}$*, kurio Furjė koeficientai sutampa su duotais skaičiais ir galioja Parsevalio lygybė, t.y.,*

$$a_k = \langle x, \phi_k \rangle, \quad \textit{su visais} \;\; k \in \mathbb{N} \quad \textit{ir} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = ||x||^2.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k.$$

Pasinaudoję sekos $(\phi_k, k \in I)$ ortonormuotumu, turime

$$||x_{n+m} - x_n||^2 = ||\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}\phi_{n+k}||^2 = \sum_{k=1}^{m} a_{n+k}^2.$$

Ši lygybė rodo, kad (x_n) - Koši seka. Bet $\mathbb{H}$ - pilnoji erdvė, todėl seka (x_n) konverguoja į kurį nors elementą $x \in \mathbb{H}$. Parodysime, kad tai ir yra ieškomasis elementas. Galime užrašyti

$$\langle x, \phi_k \rangle = \langle x_n, \phi_k \rangle + \langle x - x_n, \phi_k \rangle, \tag{10.9}$$

ir jei $n \geq k$, tai pirmasis dėmuo lygus c_k, o antrasis artėja į nulį, nes

$$|\langle x - x_n, \phi_k \rangle| \leq ||x - x_n||||\phi_k||.$$

Kadangi (10.9) lygybės kairė pusė nepriklauso nuo n, perėję prie ribos kai $n \to \infty$, gausime

$$a_k = \langle x, \phi_k \rangle.$$

Kadangi

$$||x - x_n||^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \right\rangle =$$

$$\langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

ir $||x - x_n|| \to 0$, kai $n \to \infty$, tai $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = ||x||^2$. ∎

10.7 teorema. *Kiekviena reali separabilioji Hilberto erdvė izometriškai izomorfinė Hilberto erdvei ℓ_2.*

Įrodymas. Tarkime, $\mathbb{H}$ – reali separabilioji Hilberto erdvė. Remiantis 10.5 teorema, erdvėje $\mathbb{H}$ egzistuoja skaičioji ortonormuota bazė, sakykime, $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Kiekvieną $x \in \mathbb{H}$ užrašę Furjė eilute $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, čia $c_k = \langle x, e_k \rangle, k \in \mathbb{N}$, apibrėžkime atvaizdį $J : \mathbb{H} \to \ell_2$:

$$J(x) = (c_k).$$

Remiantis Parsevalio lygybe, $(c_k) \in \ell_2$, todėl atvaizdis J apibrėžtas korektiškai. Pagal Ryso-Fišerio teoremą, kiekvienam $(c_k) \in \ell_2$ egzistuoja toks $x \in \mathbb{H}$, kurio Furjė koeficientai sutampa su $c_k, k \in \mathbb{N}$. Todėl atvaizdis J abipus vienareikšmis. Nesunku įsitikinti, kad J – izomorfizmas. Lieka patikrinti, kad atvaizdis J išlaiko skaliarinę sandaugą. Tegu

$$J(y) = (d_k),\ d_k = \langle y, e_k \rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dar kartą pasinaudoję Parsevalio lygybe, galime užrašyti

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \qquad \langle y, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

ir

$$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2.$$

Iš pastarųjų lygybių išvedame

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

Teorema įrodyta. ■

10.1.5 Ortonormuotųjų bazių pavyzdžiai

Pereitame skyriuje įrodėme, kad Haaro funkcijų šeima $\{\chi_r, r \in D^*\}$ (žr. (??) ir (??)) yra kiekvienos iš erdvių $L_p(0,1), p \geq 1$ Šauderio bazė (?? teorema), taigi ir Hilberto erdvės $L_2(0,1)$. Paliekame skaitytojui pačiam įsitikinti, kad Haaro funkcijos yra ortogonalios. Jų norma randama labai paprastai:

$$||\chi_r||^2 = \int_0^1 \chi_r^2(t)dt = 2^{-j},$$

kai $r \in D_j$. Pažymėkime $\chi_r^*(t) = 2^{j/2}\chi_r(t), t \in (0,1)$, kai $r \in D_j$ ir tegu $\chi_0^* = \chi_0$.

10.8 teorema. *Funkcijų šeima $\{\chi_r^*, r \in D^*\}$ yra erdvės $L_2(0,1)$ ortonormuota bazė.*

Toliau nagrinėkime erdvę $L_2(0,2\pi)$ ir funkcijų šeimą

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}, \quad t \in (0,2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ji dažnai vadinama trigonometrine.

10.9 teorema. *Trigonometrinė šeima $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ yra erdvės $L_2(0,2\pi)$ ortonormuota bazė.*

Įrodymas. Nesunku patikrinti, kad $||\psi_k|| = 1$ ir $\langle\psi_k, \psi_j\rangle = 0$, kai $k \neq j, k, j \in \mathbb{Z}$. Įrodysime trigonometrinės šeimos pilnumą. Pasinaudosime 10.1 teorema. Tarkime, egzistuoja tokia funkcija $f \in L_2(0,2\pi)$, kad

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|dt \neq 0,$$

tačiau

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10.10}$$

Integruodami dalimis nesunkiai įsitikiname, kad funkcija $F(t) = \int_0^t f(s)ds,\ t \in (0,2\pi)$ su bet kuria konstanta C tenkina lygčių sistemą

$$\int_0^{2\pi} [F(t) - C]e^{-ikt}dt = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10.11}$$

Konstantą C parinkime taip, kad į (10.11) sistemą galetume įtraukti ir lygtį su $k = 0$. Kadangi funkcija $\phi(t) = F(t) - C,\ \ t \in (0, 2\pi)$ yra tolydi, remiantis gerai žinoma Vejerštraso teorema (žr. [?]), kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks trigonometrinis polinomas

$$\phi_\varepsilon(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{itk},$$

kad

$$\max_{t \in [0,2\pi]} |\phi(t) - \phi_\varepsilon(t)| < \varepsilon.$$

Pritaikę (10.11) sąryšius, turime

$$\sum_{-n}^{n} a_k \int_0^{2\pi} (F(t) - C) e^{-ikt} dt = 0.$$

Prisiminę, be to, kad iš $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$ išplaukia $\int_0^{2\pi} \overline{g(t)} dt - 0$ bet kuriai kompleksinei funkcijai g, išvedame išvedame

$$\int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \overline{\phi(t)} [\phi(t) - \phi_\varepsilon(t)] dt \leq$$
$$\varepsilon \int_0^{2\pi} |\phi(t)| dt \leq \varepsilon \sqrt{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 dt \Big)^{1/2}.$$

Taigi

$$\int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 dt \leq 2\pi\varepsilon^2.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas skaičius, tai pastaroji nelygybė teisinga tik tuomet, kai $\phi(t) = 0$ su visais $t \in (0, 2\pi)$. Tai, savo ruožtu, reiškia, kad $F(t) = C$ su visais $t \in (0, 2\pi)$ ir $f(t) = 0$ beveik visiems $t \in (0, 2\pi)$. Remiantis 10.1 teorema, trigonometrinė sistema yra pilna. ∎

Toliau nagrinėkime realiąją Hilberto erdvę $L_2(\mu) = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, kai μ - tikimybinis matas, kuriam visų eilių momentai yra baigtiniai, t.y.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \mu(dt) < \infty \ \text{ su visais } \ n \in \mathbb{N}. \tag{10.12}$$

Tai reiškia, kad bet kurios eilės polinomas priklauso erdvei $L_2(\mu)$. Tegu p_n žymi n-tos eilės polinomą, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tarkime, polinomų šeima

$(p_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ yra ortonormuota. Tokią šeimą visada galime sukonstruoti pasinaudoję Gramo-Šmidto ortogonalizacijos procedūra (10.2 teorema) iš tiesiškai nepriklausomų funkcijų – elementariųjų polinomų $f_n, n = 0, 1, \dots,\ f_n(t) = t^n, t \in \mathbb{R}$.

Labai svarbu žinoti, kada erdvės $L_2(\mu)$ ortonormuotų polinomų seka $\{p_n, n = 0, 1, \dots\}$ yra pilna. Įrodysime pakankamą, lengvai tikrinamą sąlygą.

10.10 teorema. *Tarkime, kad matas μ tenkina sąlygą : egzistuoja toks $a > 0$, su kuriuo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a|x|}\mu(dx) < \infty. \tag{10.13}$$

Tada erdvės $L_2(\mu)$ ortonormuotųjų polinomų seka $\{p_n, n \geq 0\}$ yra pilna.

Įrodymas. Pirmiausia pastebėkime, kad (10.13) sąlyga yra stipresnė už (10.12) ir garantuoje, jog bet kurios eilės polinomas priklauso erdvei $L_2(\mu)$.

Teoremos įrodymui pasinaudosime 10.1 teorema. Tarkime, $f \in L_2(\mu)$ ir su visais $n = 0, 1, \dots$

$$\langle f, p_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) p_n(t) \mu(dt) = 0. \tag{10.14}$$

Įrodysime, kad $f = 0$. Nesunku matyti, kad (10.14) sistema ekvivalenti šiai sistemai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) t^n \mu(dx) = 0,\ n = 0, 1, \dots \tag{10.15}$$

Tikrai, jei $p_0 = a_0$, tai būtinai $a_0 \neq 0$ (mat $||p_0|| = 1$), todėl (**??** teisinga, kai $n = 0$. Imdami $p_1(t) = a_{11} + a_{12}t$, $a_{12} \neq 0$ (nes p_1 yra pirmos eil4s polinomas), matome, kad iš (10.14) išplaukia (10.15), kai $n = 1$. Toliau lieka tęsti tuos pačius samprotavimus, iš eilės nagrinėjant polinomus p_2, p_3 ir t.t.

Iš (10.13) sąlygos gauname, kad funkcija $g(t) = \exp(a|t|/2), t \in \mathbb{R}$, priklauso erdvei $L_2(\mu)$. Todėl, pasinaudoję Švarco (**??**) nelygybe, turime

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{a|t|/2} \mu(dt) < \infty. \tag{10.16}$$

Nagrinėkime kompleksinių skaičių aibę

$$D = \{z \in \mathbb{C} : -a/2 < \Re z < a/2\}.$$

Kadangi su visais $z \in D$, $|e^{zt}| \leq e^{a|t|/2}$, todėl iš (10.16) gauname, kad su visais $z \in D$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{zt}|\mu(dt) < \infty.$$

Pažymėkime f^+ ir f^- atitinkamai teigiamąją ir neigiamąją funkcijos f dalis ir, imdami $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, apibrėžkime

$$\mu_1(A) = \int_A f^+(t)\mu(dt), \quad \mu_2(A) = \int_A f^-(t)\mu(dt).$$

Aišku, kad šiomis lygybėmis apibrėžti matai yra baigtiniai. Nagrinėkime jų Laplaso transformacijas

$$\phi_i(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\mu_i(dt), \quad z \in D, \quad i = 1, 2.$$

Kadangi su visais $\lambda \in (-a/2, a/2)$,

$$\Big|\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j t^j}{j!}\Big| \leq e^{a|t|/2},$$

tai, pasinaudoję Lebego teorema apie mažoruojamą konvergavimą ir (10.15) bei (10.16) sąryšiais, gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} f(t)\mu(dt) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} t^j f(t)\mu(dt) = 0.$$

Bet tai reiškia, kad su visais $\lambda \in (-a/2, a/2)$,

$$\phi_1(\lambda) = \phi_2(\lambda). \tag{10.17}$$

Dabar parodysime, kad srityje D abi funkcijos ϕ_1, ϕ_2 yra analizinės. Nesunku matyti, kad iš (10.16) nelygybės išplaukia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||t|e^{\theta|t|}\mu(dt) < \infty, \tag{10.18}$$

jei tik $0 \leq \theta < a/2$. Pažymėkime $\Re z = \xi$. Tada

$$\Big|\frac{e^{(z+h)t} - e^{zt}}{h}\Big| \leq |t|e^{(|\xi|+|h|)|t|}.$$

Jei $z \in D$, tai $|\Re z| + |h| < a/2$ su visais pakankamai mažais $|h|$. Todėl dar kartą pritaikę Lebego teoremą apie mažoruojamą konvergavimą, iš (10.18) gauname, kad su visais $z \in D$ egzistuoja riba

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi_i(z+h) - \phi_i(z)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{zt} \mu_i(dt).$$

O tai ir reiškia, kad funkcijos ϕ_1 ir ϕ_2 yra analizinės. Tada iš (10.17) gauname, kad $\phi_1(z) = \phi_2(z)$ su visais $z \in D$. Paėmę $z = is,\ s \in \mathbb{R}$, gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \mu_1(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \mu_2(dt).$$

Iš pastarosios lygybės ir gerai žinomo analizėje fakto, kad tarp matų ir jų Furjė transformacijų yra abipus vienareikšmiška atitiktis, išplaukia, kad $\mu_1 = \mu_2$. Prisiminę teigiamos ir neigiamos funkcijos dalių apibrėžimus, turime

$$\int_A f(t)\mu(dt) = 0$$

su visomis Borelio aibėmis $A \subset \mathbb{R}$. Ši lygybė reiškia kad $f(t) = 0$ beveik visiems $t \in \mathbb{R}$ mato μ atžvilgiu, ką ir reikėjo įrodyti. ∎

10.3 pavyzdys. Nagrinėkime erdvę $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, kai μ yra standartinis Gauso matas:

$$\mu(-\infty, x] = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt, \quad \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Polonomus $H_n, n = 0, 1, \ldots$ apibrėžkime taip:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right) \\ &= \frac{(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\psi(x)}{\psi(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Jie vadinami Ermito polinomais. Pirmieji atrodo taip:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots$$

10.7 teiginys. *Erdvės $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, kai μ yra standartinis Gauso matas, polinomų seka $(h_n, n = 0, 1, \dots)$ yra ortonormuota bazė.*

Įrodymas. Pažymėkime $\rho(t, x) := \exp(-(t^2 - 2tx)/2),\ \ t, x \in \mathbb{R}$. Pasinaudoję Teiloro eilute, turime

$$\exp(-(x-t)^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big(e^{-x^2/2} \Big).$$

Taigi

$$\rho(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \tag{10.19}$$

su visais $x, t \in \mathbb{R}$. Be to, su visais $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, u) \rho(s, u) \mu(du) = e^{ts}.$$

Įstatę funkcijos ρ (10.19) išraišką ir sulyginę koeficientus prie $t^k s^l$ abiejose gautos lygybės pusėse matome, kad

$$\Big\langle \frac{H_k}{\sqrt{k!}}, \frac{H_l}{\sqrt{l!}} \Big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_k(x)}{\sqrt{k!}} \frac{H_l(x)}{\sqrt{l!}} \mu(dx) = \delta_{kl}.$$

Taigi seka $(h_n, n = 0, 1, \dots)$ yra ortonormuota. Iš 10.10 teoremos išplaukia jos pilnumas. ∎

Imkime funkciją $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq 0$ ir $\varphi \in L_1(a, b)$, čia $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Nagrinėkime erdvę $L_{2,\varphi}(a, b)$, sudarytą iš tokių mačių funkcijų $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, kurioms yra baigtinis Lebego integralas $\int_a^b x^2(t)\varphi(t)dt$. Kaip jau įprasta, funkcijas sutampančias beveik visur, laikysime lygiomis. Erdvės $L_{2,\varphi}(a, b)$ skaliarinę daugybą apibrėžkime taip:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \varphi(t) dt \quad f, g \in L_{,\varphi}(a, b).$$

Paliekame skaitytojui pačiam įsitikinti, kad taip gauta erdvė $L_{2,\varphi}(a, b)$ yra Hilberto. Skaitytojui paliekame įrodyti šią 10.10 teoremos išvadą.

10.11 teorema. *Jei egzistuoja toks $a > 0$, su kuriuo*

$$\int_a^b e^{a|x|}\varphi(x)(dx) < \infty,$$

tai erdvės $L_{2,\varphi}(a,b)$ ortonormuotųjų polinomų seka $\{p_n, n \geq 0\}$ yra pilna.

10.4 pavyzdys. Erdvėje $L_2(-1,1) = L_{2,\varphi}(-1,1)$, kai $\varphi(t) = 1, t \in (-1,1)$, nagrinėkime vadinamuosius Ležandro polinomus

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{(2n)!!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n], \quad t \in (-1,1), \quad n = 0,1,\ldots.$$

Keli pirmieji Ležandro polinomai yra

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{2}},\\
p_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\\
p_2(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3t^2-1),\\
p_3(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}\,(10t^3-6t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

10.8 teiginys. *Ležandro polinomai yra erdvės $L_2(-1,1)$ ortonormuota bazė.*

Įrodymas. Paliekame skaitytojui vietoj pratimo patikrinti, kad Ležandro polinomų šeima $(p_n, n = 0,1,\ldots)$ yra ortonormuota. Jos pilnumas išplaukia iš 10.11 teoremos.

Daugiau ortonormuotų polinomų bazių pateikta **??**, **??**, **??** pratimuose.