ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Vilnius
2008

TURINYS

5 SKYRIUS

6 SKYRIUS

7 SKYRIUS

1 SKYRIUS

PAGRINDINĖS SĄVOKOS

1.1 APIBRĖŽIMAI IR ŽYMENYS

Sprendžiant gamtos ir technikos mokslų uždavinius naudojami įvairūs matematiniai modeliai. Dažniausiai jie aprašomi viena arba keliomis lygtimis, siejančiomis nepriklausomus kintamuosius, ieškomąją funkciją ir jos išvestines. Tokios lygtys yra vadinamos *diferencialinėmis lygtimis*. Jeigu diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, tai tokią lygtį vadiname *paprastąja diferencialine lygtimi*. Priešingu atveju diferencialinė lygtis vadinama *dalinių išvestinių lygtimi*. Lygtis vadinama n-osios eilės lygtimi, jeigu į ją įeina ieškomos funkcijos n-osios eilės išvestinė ir neįeina aukštesnių eilių išvestinės. Pavyzdžiui lygtis

$$y' = y^2, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

yra pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis, o lygtis

$$y'' + 3y' + xy = 0$$

yra antrosios eilės paprastoji diferencialinė lygtis. Čia $y = y(x)$ – ieškoma funkcija, o x – nepriklausomas kintamasis[1]. Lygtis

$$\sqrt{x}u_x + \sqrt{y}u_y + \sqrt{z}u_z = 0$$

yra pirmos eilės dalinių išvestinių lygtis. Čia $u = u(x, y, z)$ – ieškoma funkcija, o x, y, z – nepriklausomi kintamieji.

Jeigu į paprastąją diferencialinę lygtį įeina ieškomos funkcijos n-oji išvestinė ir neįeina aukštesnių eilių išvestinės, tai tokia lygtis vadinama n-os eilės paprastąja diferencialine lygtimi. Bendruoju atveju n-os eilės paprastąją diferencialinę lygtį galima užrašyti taip:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0; \tag{1.1}$$

čia F žinoma, tolydi savo argumentų funcija, apibrėžta kokioje nors srityje $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Kartais (1.1) lygtį galima išspręsti aukščiausios išvestinės atžvilgiu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}); \tag{1.2}$$

čia f žinoma, tolydi savo argumentų funcija, apibrėžta kokioje nors srityje $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Tokia lygtis vadinama *normaliąja diferencialine lygtimi.*

[1] Paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje kartais ieškoma funkcija žymima raide x, nepriklausomas kintamasis – t, o išvestinė $dx/dt = \dot{x}$

Tegu $n = 1$. Tada (1.1) lygtis yra pirmosios eilės paprastoji diferencialinė lygtis

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.3}$$

neišreikšta išvestinės atžvilgiu, o (1.2) lygtis

$$y' = f(x, y) \tag{1.4}$$

pirmosios eilės normalioji diferencialinė lygtis. Pastarąją lygtį kartais patogu nagrinėti simetrinėje formoje

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{1.5}$$

Tegu (1.1) lygtyje funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos ir visų jos išvestinių atžvilgiu. Tada tokia lygtis vadinama *tiesine* n-osios eilės lygtimi. Tiesinę n-os eilės lygtį galima užrašyti taip:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x); \tag{1.6}$$

čia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir f yra žinomos kintamojo x funkcijos. Nagrinėjant tiesinę n-os eilės lygtį patogu lygiagrečiai nagrinėti tiesinę homogeninę n-os eilės lygtį

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{1.7}$$

Kai $n = 1$ turime tiesines pirmosios eilės paprastasias diferencialines lygtis. Jas galima užrašyti taip:

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{1.8}$$

$$y' + a(x)y = 0; \tag{1.9}$$

čia a ir f yra žinomos kintamojo x funkcijos.

Paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje nagrinėjama ne tik viena lygtis, bet ir lygčių sistemos. Pirmosios eilės lygčių sistemą išreikštą išvestinių atžvilgiu galima užrašyti taip:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \vdots & & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n); \end{array} \right. \tag{1.10}$$

čia $f_1, \ldots, f_n$ yra žinomos savo argumento funkcijos. Tokia sistema vadinama *normaliąja* paprastųjų diferencialinių lygčių sistema. Apibrėžkime vektorius stulpelius

$$y = \mathrm{colon}(y_1, \ldots, y_n), \quad f = \mathrm{colon}(f_1, \ldots, f_n).$$

Tada pastarąją sistemą galima užrašyti vektorinėje formoje

$$y' = f(x, y). \tag{1.11}$$

P a s t a b a. Daugeliu atveju įvairias aukštesnės eilės sistemas ir lygtis galima suvesti į pirmos eilės normaliąją diferencialinių lygčių sistemą. Pavyzdžiui, antros eilės n lygčių sistemą

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n)$$

keitiniu $y' = v$, $v = \mathrm{colon}(v_1, \dots, v_n)$ galima suvesti į pirmos eilės normaliąją $2n$ lygčių sistemą

$$\begin{cases} v' = f(x, y, v), \\ y' = v. \end{cases}$$

Trečios eilės lygtį

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

keitiniu $y' = u, u' = v$ galima suvesti į pirmos eilės normaliąją trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} v' = f(x, y, u, v), \\ y' = u, \\ u' = v. \end{cases}$$

Jeigu (1.10) sistemoje funkcijos $f_1, \dots, f_n$ yra tiesinės kintamųjų $y_1, \dots, y_n$ atžvilgiu, tai tokia sistema vadinama *pirmosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistema.* Bendruoju atveju pirmosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n & = & f_1(x), \\ \vdots & & \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n & = & f_n(x). \end{cases}$$

arba matriciniu pavidalu

$$y' + A(x)y = f(x);$$

čia $y = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n), f = \mathrm{colon}(f_1, \dots, f_n)$ – vektoriai stulpeliai, o $A = \{a_{ij}\}$ – $n \times n$ eilės matrica.

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – aprėžta sritis, $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ – žinoma funkcija, $u = u(x_1, \dots, x_n)$ – ieškoma funkcija, $u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ – funkcijos u pirmosios eilės dalinės išvestinės. Lygtis, kuri sieja nepriklausomus kintamuosius $x = (x_1, \dots, x_n)$, ieškomąją funkciją u ir jos pirmos eilės dalines išvestines u_{x_1}, $u_{x_2}, \dots, u_{x_n}$ vadinama *pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi.* Bendruoju atveju pirmos eilės dalinių išvestinių lygtį galima užrašyti taip:

$$F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.12}$$

Reiškinys kairėje lygties pusėje turi priklausyti nuo ieškomos funkcijos pirmosios eilės dalinių išvestinių. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial F(x, t, p)}{\partial p_i}\Big)^2 \neq 0, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

Jeigu funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos u dalinių išvestinių atžvilgiu, tai (1.12) lygtis vadinama *kvazitiesine* pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi. Tiksliau lygtis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)u_{x_i} = f(x,u), \tag{1.13}$$

kurioje bent vienas iš koeficientų a_i nelygus nuliui, vadinama kvazitiesine pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi. Jeigu funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos u ir jos dalinių išvestinių atžvilgiu, tai (1.12) lygtis vadinama *tiesine pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi.* Tiesinę pirmos eilės dalinių išvestinių lygtį galima užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x). \tag{1.14}$$

Jeigu šioje lygtyje žinoma funkcija f yra lygi nuliui, tai tokia lygtis vadinama *tiesine homogenine lygtimi.* Dviejų nepriklausomų kintamųjų x, y atveju (1.12) - (1.14) lygtis galima užrašyti taip:

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.15}$$

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y = f(x,y,u), \tag{1.16}$$

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y + a(x,y)u = f(x,y). \tag{1.17}$$

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – aprėžta sritis, $u = u(x)$ – ieškoma funkcija, apibrėžta srityje Ω, $u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ – funkcijos u pirmos eilės dalinės išvestinės, $u_{x_i x_j}$, $i, j = 1, 2 \dots, n$ – funkcijos u antros eilės dalinės išvestinės. Lygtis, kuri sieja nepriklausomus kintamuosius x, ieškomąją funkciją u ir jos pirmos bei nors vieną antros eilės dalines išvestines vadinama *antrosios eilės dalinių išvestinių lygtimi.* Bedruoju atveju antosios eilės dalinių išvestinių lygtį galima užrašyti taip:

$$F(x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},u_{x_1x_1},\dots,u_{x_ix_j},\dots,u_{x_nx_n}) = 0; \tag{1.18}$$

čia F - žinoma savo argumentų funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n^2} \Big(\frac{\partial F(x,t,p,q)}{\partial q_i}\Big)^2 \neq 0, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^{n^2} \setminus 0$$

Jeigu funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos u ir visų jos dalinių išvestinių atžvilgiu, tai (1.18) lygtis vadinama *tiesine lygtimi*. Tiksliau, lygtis

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \tag{1.19}$$

kurioje bent vienas iš koeficientų $a_{ij} \neq 0$, vadinama tiesine antrosios eilės dalinių išvestinių lygtimi. Jeigu koeficientai a_{ij}, a_i ir a nepriklauso nuo kintamojo x, tai (1.19) lygtis vadinama *tiesine antrosios eilės dalinių išvestinių lygtimi su pastoviais koeficientais.*

Tarkime, (1.19) lygtyje funkcijos u antros eilės išvestinės yra tolydžios. Tada ją galima suvesti į lygtį, kurios koeficientai prie antros eilės išvestinių tenkina sąlygą

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad (1.19) lygtyje koeficientus a_{ij} galima pakeisti koeficientais

$$\widetilde{a}_{ij}(x) = \frac{1}{2}(a_{ij}(x) + a_{ji}(x)).$$

Todėl toliau nagrinėdami tiesines antros eilės lygtis, matricą, sudarytą iš koeficientų prie antros eilės išvestinių, laikysime simetrine. Jeigu (1.19) lygtyje funkcija $f \equiv 0$, tai tokia lygtis vadinama *homogenine lygtimi.*

P a s t a b a. Nagrinėjant antrosios eilės dalinių išvestinių lygtis kartais patogu išskirti kokį nors nepriklausomą kintamąjį (pavyzdžiui, laiką arba temperatūrą). Tokį kintamąjį žymėsime raide t, o ieškomos funkcijos $u = u(x, t)$ išvestines kintamojo t atžvilgiu u_t ir u_{tt}.

Daugelis fizikos ir mechanikos uždavinių aprašomi dalinių išvestinių lygtimis. Dažnai tai tiesinės antros eilės dalinių išvestinių lygtys. Paprasčiausios iš jų yra Puasono (Laplaso)

$$-\Delta u = f(x), \quad (\Delta u = 0),$$

šilumos laidumo

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

ir bangavimo

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

lygtys. Čia

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

yra n-matis Laplaso operatorius.

1.2 GRONUOLO LEMA

Įrodant įvairius teiginius diferencialinių lygčių teorijoje dažnai yra naudojama

1.1 **lema** (Gronuolo). *Tarkime, funkcijos y, f yra neneigiamos ir tolydžios intervale $\langle a, b\rangle$,*[1] *skaičius $\lambda > 0$ ir yra teisinga nelygybė*

$$y(x) \leq f(x) + \lambda\Big|\int\limits_{x_0}^{x} y(s)\,ds\Big|, \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle. \tag{1.20}$$

Tada

$$y(x) \leq f(x) + \lambda\Big|\int\limits_{x_0}^{x} e^{\lambda|x-s|} f(s)\,ds\Big|, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle. \tag{1.21}$$

◁ Tegu $x \geq x_0$ ir

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} y(s)\,ds.$$

Tada (1.20) nelygybę galime perrašyti taip:

$$y(x) \leq f(x) + \lambda Y(x), \tag{1.22}$$

arba

$$Y'(x) \leq f(x) + \lambda Y(x).$$

Padauginę pastarąją nelygybę iš $e^{-\lambda(x-x_0)}$ perrašysime ją taip:

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{-\lambda(x-x_0)}Y(x)\Big) \leq f(x)e^{-\lambda(x-x_0)}.$$

Integruodami šią nelygybę pagal kintamąjį x nuo x_0 iki x, gausime

$$e^{-\lambda(x-x_0)}Y(x) \leq \int\limits_{x_0}^{x} f(s)e^{-\lambda(s-x_0)}\,ds.$$

Taigi

$$Y(x) \leq \int\limits_{x_0}^{x} f(s)e^{-\lambda(s-x)}\,ds.$$

Iš šios nelygybės ir (1.22) išplaukia (1.21) nelygybė, kurioje $x \geq x_0$. Atvejis, kai $x \leq x_0$ yra nagrinėjamas analogiškai. ▷

I š v a d a. Tegu yra patenkintos 1.1 lemos sąlygos ir funkcija $f(x) = c, c$ – konstanta. Tada

$$y(x) \leq ce^{\lambda|x-x_0|}.$$

[1] Čia ženklas $\langle$ apibrėžia vieną iš skliaustų (, [, o ženklas $\rangle$ – vieną iš skliaustų),]. Tuo atveju, kai $\langle a, b\rangle = (a, b)$ skaičius a gali įgyti reikšmę $-\infty$, o skaičius b -reikšmę $+\infty$.

1.3 KAI KURIE MATEMATINĖS ANALIZĖS TEIGINIAI

Tegu Q yra kompaktas[1] erdvėje $\mathbb{R}^n$ ir $A \subset \mathrm{C}(Q)$.

Apibrėžimas. Sakysime, aibė A yra tolygiai aprėžta erdvėje $\mathrm{C}(Q)$ jeigu egzistuoja toks skaičius $M > 0$, kad

$$|\psi(x)| \leq M, \quad \forall x \in Q, \forall \psi \in A.$$

Apibrėžimas. Sakysime, aibė A yra vienodai tolydi erdvėje $\mathrm{C}(Q)$, jeigu $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad

$$|\psi(x) - \psi(\tilde{x})| \leq \varepsilon, \quad \forall x, \tilde{x} \in Q : |x - \tilde{x}| \leq \delta, \forall \psi \in A.$$

1.1 teorema (Arcelo–Askoli). *Uždara aibė $A \subset \mathrm{C}(Q)$ yra kompaktas erdėje $\mathrm{C}(Q)$ tada ir tik tada, kai ji yra tolygiai aprėžta ir vienodai tolydi.*

Išvada. Iš tolygiai aprėžtos ir vienodai tolydžios sekos $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{C}(Q)$ galima išskirti tolygiai konverguojantį posekį.

Tegu funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ yra integruojama. Įrodysime nelygybę

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \sqrt{n}\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$\lhd$ Iš tikrųjų

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| = \Big(\sum_{i=1}^n \Big(\int_a^b f_i(x)\,dx\Big)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^n \Big(\int_a^b |f_i(x)|\,dx\Big)^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\Big(\int_a^b |f(x)|\,dx\Big)^2 \sum_{i=1}^n 1\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\int_a^b |f(x)|\,dx. \rhd$$

Tegu $G \subset \mathbb{R}^m$ yra iškila sritis, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{C}^1(G)$. Tada

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda} f(\lambda x + (1-\lambda)y)\,d\lambda$$

Pažymėje $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ perrašysime šią formulę taip:

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_i} f(z(\lambda))\,d\lambda \cdot (x_i - y_i). \tag{1.23}$$

[1] Priminsime, kad aibė Q yra kompaktas erdvėje $\mathbb{R}^n$, jeigu ji yra aprėžta ir uždara.

Pastaroji formulė yra vadinama *baigtinių pokyčių* formule. Ją galima perrašyti dar ir taip:

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_i} f(\lambda x + (1-\lambda)y)(x_i - y_i), \quad \lambda \in (0,1). \tag{1.24}$$

Norint to įsitikinti pakanka apibrėžti vieno realaus kintamojo funkciją

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y), \quad \lambda \in [0,1]$$

ir pasinauduoti Lagranžo formule

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda), \quad \lambda \in (0,1).$$

Apibrėžimas. Tegu G yra kokia nors aibė erdvėje $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ir funkcija $f : G \to \mathbb{R}^m$. Sakysime, aibėje G funkcija $f = f(x,y), x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^n$ tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu su Lipšico konstanta $L > 0$ ir rašysime $f \in \mathrm{Lip}_y(G)$, jeigu

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (x,y),(x,\tilde{y}) \in G.$$

Apibrėžimas. Tegu G yra kokia nors sritis erdvėje $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ir funkcija $f : G \to \mathbb{R}^m$. Sakysime, srityje G funkcija $f = f(x,y)$ lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu ir rašysime $f \in \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$, jeigu kiekvienam taškui $(x,y) \in G$ egzistuoja šio taško aplinka $U \subset G$ ir Lipšico konstanta $L = L(U) > 0$ tokia, kad

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (x,y),(x,\tilde{y}) \in U.$$

Pastaba. Funkcija $f = (f_1, \ldots, f_m)$ tenkina Lipšico sąlygą (lokaliai arba globaliai), tada ir tik tada, kai šią sąlygą tenkina ir kiekviena jos komponentė $f_i, i = 1, \ldots, m$.

1.2 lema. *Tarkime, srityje G funkcija f kintamųjų $y = (y_1, \ldots, y_n)$ atžvilgiu yra diferencijuojama. Tada $f \in \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$.*

$\lhd$ Kiekvienam taškui $(x,y) \in G$ galima nurodyti tokią jo aplinką $U \subset G$, kad $\overline{U} \subset G$. Šioje aplinkoje išvestinės $f_{iy_j}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ yra tolydžios, kartu ir aprėžtos. Todėl egzistuoja tokia konstanta L, kad

$$\max_{(x,y)\in U} \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{iy_j}^2(x,y) \Big)^{1/2} \le L.$$

Remiantis baigtinių pokyčių formule galima įrodyti, kad

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (x,y),(x,\tilde{y}) \in U. \rhd$$

Jeigu srityje G funkcija $f = f(x,y)$ tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu globaliai, tai šio kintamojo atžvilgiu ji tenkina Lipšico sąlygą lokaliai. Atvirkščias teiginys yra neteisingas. Tačiau yra teisinga tokia lema.

1.3 lema. *Tarkime, funkcija $f \in \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$. Tada kiekviename kompakte $Q \subset G$ funkcija f tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu globaliai.*

$\triangleleft$ Tarkime priešingai, lemos teiginys yra neteisingas. Tada egzistuoja kompaktas $Q \subset G$, artėjančių į $+\infty$ teigiamų skaičių seka $\{L_k\}$ ir taškai (x^k, y^k), $(x^k, \tilde{y}^k) \in Q, k = 1, 2, \ldots$, tokie kad

$$|f(x^k, y^k) - f(x^k, \tilde{y}^k)| > L_k|\tilde{y}^k - y^k|. \tag{1.25}$$

Kadangi Q yra kompaktas, tai iš sekų $\{(x^k, y^k)\}$, $\{(x^k, \tilde{y}^k)\}$ galima išskirti konverguojančius posekius $\{(x^{k_i}, y^{k_i})\}$, $\{(x^{k_i}, \tilde{y}^{k_i})\}$. Tegu

$$(x^{k_i}, y^{k_i}) \to (x^0, y^0), \quad (x^{x_i}, \tilde{y}^{k_i}) \to (x^0, \tilde{y}^0),$$

kai $k_i \to \infty$. Jeigu $y^0 = \tilde{y}^0$, tai egzistuoja tokia taško (x^0, y^0) aplinka $U \subset G$, kad

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

Dideliems k_i taškai $(x^{k_i}, y^{k_i}), (x^{k_i}, \tilde{y}^{k_i}) \in U$. Todėl jie turi tenkinti pastarąją nelygybę. Jeigu $y^0 \ne \tilde{y}^0$, tai pakankamai mažoje taško $(x^0, y^0, \tilde{y}^0)$ aplinkoje funkcija

$$F(x, y, \tilde{y}) = \frac{|f(x, y) - f(x, \tilde{y})|}{|y - \tilde{y}|}$$

yra aprėžta (nes f – tolydi funkcija). Abiem atvejais gautos išvados prieštarauja (1.25) nelygybei su didelėmis indeksų k_i reikšmėmis. Taigi įrodymo pradžioje padaryta prielaida yra neteisinga. $\triangleright$

A p i b r ė ž i m a s. Tegu X yra kokia nors netuščia aibė ir $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ vienareikšmė funkcija, tenkinanti sąlygas:

1. $\rho(x, y) \ge 0, \ \forall x, y \in X$ ir $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \ \forall x, y \in X$.
3. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z), \ \forall x, y, z \in X$.

Tada pora (X, ρ) yra vadinama *metrine erdve*, o funkcija ρ – erdvės X *metrika* arba *atstumo funkcija*.

P a v y z d y s. Tolydžių funkcijų aibė $\mathrm{C}[a, b]$ su metrika

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| := \|f - g\|_C, \quad f, g \in \mathrm{C}[a, b]$$

yra metrinė erdvė. Akivaizdu, kad taip apibrėžta atstumo funkcija ρ tenkina visas metrinės erdvės apibrėžimo sąlygas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, seka $\{x_k\}$ metrinėje erdvėje (X, ρ) yra *Koši* seka (*fundamentalioji* seka), jeigu $\rho(x_k, x_m) \to 0$, kai $k, m \to \infty$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, metrinė erdvė (X, ρ) yra *pilna*, jeigu kiekviena Koši seka $\{x_k\} \subset X$ konverguoja, t.y. turi ribą ir ribinis elementas priklauso erdvei X.

Apibrėžimas. Tegu (X, ρ) – metrinė erdvė. Atvaizdį $T : X \to X$ vadinsime *sutraukiančiuoju*, jeigu egzistuoja toks skaičius $\lambda \in (0, 1)$, kad

$$\rho(Tx, Ty) < \lambda\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

1.2 teorema (Banacho apie nejudamąjį tašką). *Tegu (X, ρ) – pilnoji metrinė erdvė ir $T : X \to X$ – sutraukiantysis atvaizdis. Tada:*

1. *Erdvėje X egzistuoja vienintelis lygties*
$$x = Tx \tag{1.26}$$
sprendinys.

2. *Seka $\{x_k\}$, apibrėžta formulėmis*
$$x_{n+1} = Tx_n, \; n = 0, 1, 2 \ldots, \; x_0 \in X,$$
artėja į (1.26) lygties sprendinį x ir yra teisingas įvertis
$$\rho(x, x_n) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0, x_1).$$

$\triangleleft$ Tegu $x_0 \in X$. Apibrėžkime seką

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Iš įverčių

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(Tx_{n-1}, Tx_n) \le \lambda\rho(x_{n-1}, x_n)\\ &\le \lambda^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \cdots \le \lambda^n\rho(x_0, x_1),\end{aligned}$$

$$\rho(x_n, x_{n+k}) \le \sum_{r=0}^{k-1}\rho(x_{n+r}, x_{n+r+1}) \le$$

$$\sum_{r=0}^{k-1}\lambda^{n+r}\rho(x_0, x_1) \le \lambda^n(1-\lambda)^{-1}\rho(x_0, x_1) \tag{1.27}$$

išplaukia, kad seka $\{x_k\}$ yra Koši seka. Kadangi erdvė X yra pilna, tai seka $\{x_k\}$ konverguoja, t.y. egzistuoja elementas $x \in X$ toks, kad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{t.y. } \rho(x_n, x) \to 0, \text{ kai } n \to \infty.$$

Pagal prielaidą atvaizdis T yra sutraukiantysis. Todėl jis yra tolydus. Tačiau tada

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = Tx.$$

Taigi x yra (1.26) lygties sprendinys. Įrodysime, kad jis yra vienintelis. Tegu x ir y yra kokie nors du šios lygties sprendiniai. Tada atstumas tarp jų

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \le \lambda\rho(x, y).$$

Kadangi $\lambda \in (0,1)$, tai $\rho(x,y) = 0$. Taigi $x = y$ ir pirmasis teoremos teiginys įrodytas.

Norint įrodyti antrąjį teoremos teiginį pakanka (1.27) nelygybėje fiksuoti kokį nors n ir pereiti prie ribos, kai $k \to \infty$. $\triangleright$

Tegu Ω – aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o $u, v \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Tada yra teisinga Gryno formulė

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_{S} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big)\, dS.$$

1.4 KAI KURIE MATRICŲ TEORIJOS TEIGINIAI

Aibę matricų, su realiais arba kompleksiniais koeficientais, turinčių n eilučių ir m stulpelių, žymėsime $\mathbb{R}^{n,n}$. Tegu $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n,n}$ – kvadratinė n-os eilės matrica. Matrica

$$A = \mathrm{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

kurios elementai $a_{ij} = 0$, kai $i \neq j$, vadinama *diagonaliąja* matrica. Diagonalioji matrica, kurios elementai $a_{11} = \dots = a_{nn} = 1$, vadinama *vienetine*. Vienetinę matricą žymėsime raide E, t.y.

$$E = \mathrm{diag}\{1, \dots, 1\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica A, kurios pagrindinėje įstrižainėje yra matricos $A_i \in \mathbb{R}^{n_i,n_i}$, $i = 1,\dots,k$, o kiti elementai lygūs nuliui, vadinsime *kvazidiagonaliąja* matrica ir žymėsime

$$A = \mathrm{diag}\{A_1, \dots, A_k\} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Jeigu matrica

$$A = \mathrm{diag}\{A_1, \dots, A_k\}, \quad B = \mathrm{diag}\{B_1, \dots, B_k\}$$

ir matricos A_i eilė sutampa su matricos B_i eile $\forall i = 1, \dots, k$, tai

$$A + B = \mathrm{diag}\{A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k\},$$

$$AB = \mathrm{diag}\{A_1 B_1, \dots, A_k B_k\}.$$

Matricos $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sveiką teigiamą laipsnį galima apibrėžti rekurenčiąja formule

$$A^m = A^{m-1} A, \quad m \geq 2.$$

Jeigu $A = \mathrm{diag}\{A_1, \dots, A_k\}$, tai

$$A^m = \mathrm{diag}\{A_1^m, \dots, A_k^m\}.$$

Jeigu matrica A yra neišsigimusi, t.y. $\det A \neq 0$, tai egzistuoja jos atvirkštinė matrica A^{-1}. Atvirkštinę matricą galima rasti iš lygties $AX = E$. Atvirkštinės matricos determinantas $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Tai tiesiogiai išplaukia iš formulės

$$\det\{AB\} = \det A \det B,$$

paėmus $B = A^{-1}$. Matricos A sveikas neigiamas laipsnis apibrėžimas formule

$$A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

Jeigu kartu su matrica A yra neišsigimusi ir matrica B, tai

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E.$$

Jeigu matrica $A = \operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_k\}$, tai

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\{A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}\}.$$

Tegu $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sakysime, matrica B yra panaši į matricą A ir rašysime $B \sim A$, jeigu egzistuoja neišsigimusi matrica Q tokia, kad

$$B = Q^{-1}AQ.$$

Remiantis apibrėžimu lengvai galima įrodyti, kad panašumo sąryšis yra ekvivalentumo sąryšys, t.y.:

1. $A \sim A$
2. $B \sim A \Longleftrightarrow A \sim B$.
3. $A \sim B$, $B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Todėl svarbu ištirti bendras panašių matricų savybes ir kiekvienoje panašių matricų ekvivalentiškumo klasėje rasti atstovą su paprasčiausia matricą.

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Matricos A tikrinės reikšmės randamos iš lygties

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

Pastaroji lygtis vadinama *charakteristine lygtimi*, o polinomas

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + p_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(-\lambda) + p_n$$

charakteristiniu polinomu.

Tegu $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ – panašios matricos ir $B = Q^{-1}AQ$. Įrodysime, kad panašių matricų harakteristiniai polinomai yra lygūs. Tegu $B = Q^{-1}AQ$. Tada

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(Q^{-1}AQ - \lambda E) = \det(Q^{-1}(A - \lambda E)Q) =$$

$$\det Q^{-1} \det(A - \lambda E) \det Q = \det(A - \lambda E) = p_A(\lambda).$$

Taigi visų panašių matricų charakteristinių polinomų koeficientai prie vienodų λ laipsnių sutampa. Sulyginę koeficientus prie laisvojo nario, gausime

$$p_n = \det A = \det(Q^{-1}AQ) = \det B,$$

t.y. panašių matricų determinantai yra lygūs. Sulyginę koeficientus prie λ^{n-1}, gausime

$$\operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Sp} B,$$

t.y. panašių matricų pėdsakai yra lygūs. Be to, panašių matricų charakteristinių polinomų šaknys yra tos pačios ir turi tą patį kartotinumą.

Tegu $\lambda = a$ yra matricos A charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis. Tada charakteristinis polinomas $\det(A - \lambda E)$ dalinasi iš $(\lambda - a)^k$ be liekanos. Iš charakteristinės matricos $A - \lambda E$, išbraukiant vieną eilutę ir vieną stulpelį, sudarome visus galimus $n-1$ eilės determinantus. Tegu $(\lambda - a)^{k_1}$ yra visų šių determinantų bendras didžiausiais daliklis. Išbraukiant dvi eilutes ir du stulpelius, sudarome visus galimus $n-2$ eilės determinantus. Tegu $(\lambda - a)^{k_2}$ yra visų šių $n-2$ eilės determinantų bendras didžiausiais daliklis. Pratęsę tokias operacijas gausime seką teigamų skaičių $k_1, \dots, k_s$, $s \le k$. Remiantis determinanto apibrėžimu galima įrodyti, kad

$$k > k_1 > \cdots > k_s > 0.$$

Tegu $l_1 = k - k_1$, $l_2 = k_1 - k_2$, $\dots$ $l_s = k_{s-1} - k_s$, $l_{s+1} = k_s$. Taip apibrėžti skaičiai $l_i \ge 1$ ir jų suma lygi k. Reiškiniai

$$(\lambda - a)^{l_1}, \dots, (\lambda - a)^{l_s}, (\lambda - a)^{l_{s+1}}$$

vadinami matricos A elementariaisiais dalikliais (atitinkančiais charakteristinę šaknį $\lambda = a$). Analogiškai apibrėžiami elementarieji dalikliai atitinkantys kitas charakteristinio polinomo šaknis.

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad panašių matricų elementarieji dalikliai sutampa.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
Tada
$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)^3.$$
Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis. Taigi $k = 3$. Visi antros eilės determinantai, sudaryti iš matricos $A - \lambda E$, dalinasi iš $(\lambda - a)^2$, o pirmos eilės determinantai – iš $(\lambda - a)$. Todėl $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Kartu $l_1 = 3 - 2 = 1$, $l_2 = 2 - 1 = 1$, $l_3 = 1$ ir matrica A turi tris elementariuosius daliklius $\lambda - 1$, $\lambda - 1$, $\lambda - 1$.

2. Tegu
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
Tada
$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^3.$$
Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis, $k = 3$. Visi antros eilės determinantai, sudaryti iš matricos $A - \lambda E$, dalinasi iš $(\lambda - a)^2$. Todėl $k_1 = 2$. Tačiau vienas iš pirmos eilės determinantų nesidalina iš $(\lambda - a)$. Todėl $l_1 = 3 - 2 = 1$, $l_2 = k_1 = 2, k_2 = 0$. Taigi matrica A turi du elementariuosius daliklius $\lambda - a$, $(\lambda - a)^2$.

3. Tegu
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
Tada
$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^3.$$
Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis, $k = 3$. Matricos $A - \lambda E$ antros eilės determinantas
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1$$
nesidalina iš $(\lambda - a)$. Todėl $l_1 = 3, k_1 = 0$ ir $(\lambda - a)^3$ yra vienintelis elementarus daliklis.

4. Lengvai galima įsitikinti, kad k-os eilės matrica
$$J_k(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

turi tik vieną elementarųjį daliklį $(\lambda - a)^k$. Be to,

$$J_k(a) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$J_k(a) = aE_k + T_k;$$

čia E_k – vienetinė matrica, o T_k – matrica, kurios pirmoje (ne pagrindinėje) viršutinėje istrižainėje vienetukai, o kiti elementai lygūs nuliui.

Tiesinėje algebroje yra įrodoma teorema.

1.3 teorema (Žordano). *Kiekvienai matricai $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ egzistuoja neišsigimusi matrica Q tokia, kad*

$$A = Q^{-1}JQ, \quad J = \text{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\};$$

čia $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – matricos A charakteristinio polinomo šaknys (kai kurios iš jų arba net visos gali būti vienodos), $s_1 + \dots + s_m = n$.

Matrica J yra vadinama *Žordano matrica*, matricos $J_{s_i}(\lambda_i)$ – *Žordano langeliais*, $(\lambda - \lambda_i)^{s_i}$ – elementarieji dalikliai.

Išvada. Žordano matricos struktūrą nusako ne charakteristinio polinomo šaknys, o elementarieji dalikliai.

Tegu $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Tada

$$Q^{-1}(A+B)Q = Q^{-1}AQ + Q^{-1}BQ,$$

$$Q^{-1}(AB)Q = Q^{-1}AQQ^{-1}BQ.$$

Jeigu $A = B$, tai

$$Q^{-1}A^2Q = (Q^{-1}AQ)^2.$$

Kartu yra teisinga formulė

$$Q^{-1}A^mQ = (Q^{-1}AQ)^m, \quad m \geq 2.$$

Remiantis šiomis formulėmis lengvai galima įrodyti, kad

$$Q^{-1}p(A)Q = p(Q^{-1}AQ);$$

čia $p(A) = p_0A^m + p_1A^{m-1} + \dots + p_{m-1}A + p_mA^0$; $A^0 = E$.

Apibrėžimas. Tegu $A = \{a_{ij}\}$, $A_k = \{a_{ij}^k\} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k = 1, \dots, n$. Sakysime, seka A_k konverguoja į matricą A, kai $k \to \infty$ ir rašysime $A_k \to A$, jeigu $\forall\varepsilon > 0$ egzistuoja teigiamas skaičius N toks, kad

$$|a_{ij} - a_{ij}^k| < \varepsilon, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, k > N.$$

Tegu

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Jeigu seka S_k konverguoja į matricą $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, kai $k \to \infty$, tai sakysime, kad matricų eilutė

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

konverguoja ir juos suma lygi A. Priešingu atveju sakysime, kad eilutė diverguoja.

Tegu

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

laipsninė eilutė. Kiekvienai matricai $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ galime apibrėžti eilutę

$$S(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

1.4 teorema. *Tegu $A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_m\}$ – kvazidiagonalioji matrica ir eilutės $S(A_1), \ldots, S(A_m)$ konverguoja. Tada konverguoja eilutė $S(A)$ ir yra teisinga formulė*

$$S(A) = \operatorname{diag}\{S(A_1), \ldots, S(A_m)\}. \tag{1.28}$$

◁ Eilutės $S(A)$ dalinė suma

$$S_k(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (\operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_m\})^i =$$

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \operatorname{diag}\{A_1^i, \ldots, A_m^i\} = \operatorname{diag}\{\sum_{i=0}^{k} a_i A_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{k} a_i A_m^i\}.$$

Pagal teoremos sąlygą

$$S_k(A_r) = \sum_{i=0}^{k} a_i A_r^i \to S(A_r), \quad \forall r = 1, \ldots, m,$$

kai $k \to \infty$. Todėl

$$S_k(A) = \operatorname{diag}\{S_k(A_1), \ldots, S_k(A_m)\} \to \operatorname{diag}\{S(A_1), \ldots, S(A_m)\},$$

kai $k \to \infty$ ir yra teisinga (1.28) formulė. ▷

1.5 teorema. *Tegu A ir B panašios matricos, $A = Q^{-1}BQ$, ir eilutė $S(B)$ konverguoja. Tada konverguoja eilutė $S(A)$ ir yra teisinga formulė*

$$S(A) = Q^{-1} S(B) Q. \tag{1.29}$$

◃ Eilutės $S(A)$ dalinė suma

$$S_k(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (Q^{-1}BQ)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i Q^{-1} B^i Q = Q^{-1} \Big(\sum_{i=0}^{k} a_i B^i \Big) Q.$$

Pagal teoremos sąlygą

$$S_k(B) = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i \to S(B),$$

kai $k \to \infty$. Todėl

$$S_k(A) = Q^{-1} S_k(B) Q \to Q^{-1} S(B) Q,$$

kai $k \to \infty$ ir yra teisinga (1.29) formulė. ▹

1.6 teorema. *Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – matricos $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ charakteristinio polinomo šaknys (kai kurios iš jų arba net visos gali būti vienodos), ρ yra eilutės $S(z)$ konvergavimo spindulys, $J_{s_i}(\lambda_i)$ – Žordano matricos langelis (žr. 1.3 teoremą), $i = 1 \ldots, m$. Tada*

1. *Jeigu $|\lambda_i| < \rho$, tai eilutė $S(J_{s_i}(\lambda_i))$ konverguoja ir yra teisinga formulė*

$$S(J_{s_i}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} S(\lambda_i) & S'(\lambda_i) & \ldots & \frac{1}{(s_i-1)!} S^{(s_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & S(\lambda_i) & \ldots & \frac{1}{(s_i-2)!} S^{(s_i-2)}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & S(\lambda_i) \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Jeigu $|\lambda_i| > \rho$, tai eilutė $S(J_{s_i}(\lambda_i))$ diverguoja.

2. *Jeigu $|\lambda_i| < \rho$, $\forall i = 1, \ldots, m$, tai eilutė $S(A)$ konverguoja ir $S(\lambda_i)$ yra matricos $S(A)$ charakteristinio polinomo to paties kartotinumo šaknys.*

◃ Žordano langelį $J_{s_i}(\lambda_i)$ išskaidykime į dviejų matricų sumą

$$J_{s_i}(\lambda_i) = \lambda_i E_{s_i} + T_{s_i}$$

(žr. 4 pavyzdį). Matrica E_{s_i} yra vienetinė. Todėl $E_{s_i} T_{s_i} = T_{s_i} E_{s_i} = T_{s_i}$ ir yra teisinga formulė

$$J_{s_i}^r(\lambda_i) = (\lambda_i E_{s_i} + T_{s_i})^r = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \lambda_i^{r-j} T_{s_i}^j;$$

čia C_r^j – binominiai koeficientai. Jeigu $r \geq s_i$, tai $T_{s_i}^r = 0$ – nulinė matrica. Jeigu $r < s_i$, tai $T_{s_i}^r$ yra matrica, kurios r-je viršutinėje įstrižainėje visi elementai lygūs vienetui, o visi kiti elementai nuliai. Todėl

$$J_{s_i}^r(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i^r & C_r^1 \lambda_i^{r-1} & \ldots & C_r^{k-1} \lambda_i^{r-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^r & \ldots & C_r^{k-2} \lambda_i^{r-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i^r \end{pmatrix}.$$

Kartu dalinė suma

$$S_k(J_{s_i}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} S_k(\lambda_i) & S_k'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(s_i-1)!}S_k^{(s_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & S_k(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(s_i-2)!}S_k^{(s_i-2)}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_k(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Jeigu $|\lambda_i| < \rho$, $\forall i = 1, \dots, n$, tai $S_k(\lambda_i) \to S(\lambda_i)$, $S_k'(\lambda_i) \to S_k'(\lambda_i)$ ir t.t. Todėl

$$S_k(J_{s_i}(\lambda_i)) \to S(J_{s_i}(\lambda_i))$$

ir yra teisinga (1.30) formulė.

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Pagal 1.4 teoremą

$$S(J) = \mathrm{diag}\{S(J_{s_1}(\lambda_1), \dots, S(J_{s_m}(\lambda_m))\}.$$

Kiekviena iš matricų $S(J_{s_i}(\lambda_i)$ yra trikampė s_i eilės matrica, kurios pagrindinėje istrižainėje yra skaičiai $S(\lambda_i)$. Todėl skaičiai $S(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$ yra matricos $S(J)$ tikrinės s_i kartotinumo reikšmės. Pagal 1.4 teoremą $S(J) \sim S(A)$. Tačiau pagal 1.3 teoremą panašių matricų tikrinės reikšmės sutampa ir yra to paties kartotinumo. Todėl skaičiai $S(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$ yra ir matricos $S(A)$ tikrinės reikšmės s_i kartotinumo. ▷

I š v a d a. Tegu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos charakteristinio polinomo šaknys. Jeigu $|\lambda_i| < \rho$, $\forall i = 1, \dots, n$, tai eilutė $S(A)$ konverguoja ir yra teisinga formulė

$$S(A) = Q^{-1}\,\mathrm{diag}\{S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n)\}Q. \tag{1.31}$$

Jeigu $|\lambda_i| > \rho$ bent vienam indeksui i, tai eilutė $S(A)$ diverguoja.

1.5 EKSPONENTĖ. JOS SAVYBĖS

Akivaizdu, kad $\mathbb{R}^{n,n}$ yra tiesinė aibė. Normą joje galima apibrėžti taip:

$$\|A\| = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|;$$

čia a_{ij} yra matricos A elementai. Su taip apibrėžta norma aibė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra tiesinė erdvė. Priminsime, kad matricų suma ir daugyba iš realaus skaičiaus apibrėžiamos paelemenčiui, t.y. sudedant dvi matricas, yra sudedami atitinkami matricų elementai, o dauginant matricą iš realaus skaičiaus, visi jos elementai dauginami iš to paties skaičiaus. Todėl erdvę $\mathbb{R}^{n,n}$ galima sutapatinti su $\mathbb{R}^{n^2}$. Iš matricos normos apibrėžimo bei dviejų matricų sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\|AB\| \le n\|A\|\,\|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Įrodysime, kad erdvė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra pilna. Iš tikrųjų, tegu $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$ – Koši seka, t.y. $\forall \varepsilon > 0$, egzistuoja toks skaičius $N(\varepsilon)$, kad

$$\|A_m - A_k\| < \varepsilon, \quad \text{kai } m, k > N(\varepsilon).$$

Pagal normos apibrėžimą tai reiškia, kad

$$|a_{ij}^m - a_{ij}^k| < \varepsilon, \quad \text{kai } m, k > N(\varepsilon),\ \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Realiųjų skaičių erdvė $\mathbb{R}$ yra pilna. Todėl egzistuoja tokie realūs skaičiai a_{ij}, kad $a_{ij}^k \to a_{ij}$, kai $k \to \infty$. Tegu $A = \{a_{ij}\}$. Tada

$$\|A_m - A\| < \varepsilon, \quad \text{kai } m > N(\varepsilon).$$

Taigi $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ ir erdvė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra pilna.

Remiantis šia savybe galima įrodyti, kad iš matricų sudarytoms eilutėms išlieka teisingi funkcinių eilučių teorijos teiginiai. Atskiru atveju išlieka teisingas Vejerštraso požymis ir teorema apie eilučių diferencijavimą panariui:

1.7 teorema (Vejerštraso požymis). *Jeigu matricų eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x), \quad A_k : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^{n,n} \tag{1.32}$$

turi skaitinę mažorantę

$$\|A_k(x)\| \le \alpha_k, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle,\ k = 1, 2, \dots$$

ir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty,$$

tai matricų eilutė intervale $\langle a, b\rangle$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai.

1.8 teorema (apie eilučių diferencijavimą panariui). *Jeigu* (1.32) *eilutė konverguoja ir eilutė, sudaryta iš išvestinių*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A'_k(x),$$

konverguoja tolygiai, tai (1.32) *eilutę galima diferencijuoti panariui ir yra teisinga formulė*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(x).$$

P a s t a b a. Pagal apibrėžimą $A'(x) = \{a'_{ij}(x)\}$. Be to, jeigu matricos $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra diferencijuojamos, tai

$$\big(AB\big)' = A'B + AB'.$$

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Su $\forall m = 1, 2, \dots,$ galime apibrėžti baigtinę sumą

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^m}{m!} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Matricos A *eksponente* vadinsime eilutę

$$e^A = \lim_{m\to\infty} S_m(A) = E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

Parodysime, kad ši eilutė konverguoja.

Tegu $\|A\| \le \alpha < \infty$. Tada skaitinė eilutė

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^m}{m!} + \cdots$$

konverguoja ir yra mažoranta eilutei e^A. Pagal Vejerštraso požymį eilutė e^A konverguoja.

Įrodysime paprasčiausiais eksponentės e^A savybes. Tegu Q neišsigimusi matrica tokia, kad $A = QJQ^{-1}$, J – Žordano matrica. Tada

$$(QJQ^{-1})^2 = QJQ^{-1}QJQ^{-1} = QJ^2Q^{-1}.$$

Taikant matematinės indukcijos metodą, galima įrodyti, kad

$$(QJQ^{-1})^k = QJ^kQ^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Remiantis šiomis formulėmis bei eksponentės apibrėžimu, gauname

$$e^A = e^{QJQ^{-1}} = E + QJQ^{-1} + \frac{(QJQ^{-1})^2}{2!} + \dots + \frac{(QJQ^{-1})^k}{k!} + \dots =$$

$$= Q(E + J + \frac{J^2}{2!} + \dots + \frac{J^k}{k!} + \cdots)Q^{-1} = Qe^JQ^{-1}.$$

Taigi

$$e^A = Qe^J Q^{-1}. \tag{1.33}$$

Be to, yra teisinga formulė

$$\det e^A = \det Q \det e^J \det Q^{-1} = \det e^J. \tag{1.34}$$

Tarkime, matricos $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ komutuoja, t.y. $AB = BA$. Kadangi eilutės e^A ir e^B konverguoja absoliučiai, tai jas galima dauginti panariui:

$$e^A e^B = (E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots)(E + B + \frac{B^2}{2!} + \cdots + \frac{B^m}{m!} + \cdots) =$$

$$= E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots$$

Eilutė

$$e^{A+B} = E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A + B)^2 + \cdots =$$

$$= E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots,$$

nes $AB = BA$. Todėl tokioms matricoms yra teisinga formulė

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{1.35}$$

Jeigu šioje formulėje A pakeisime į xA, o B į sA, tai gausime formulę

$$e^{(x+s)A} = e^{xA} e^{sA}. \tag{1.36}$$

Panariui diferencijuodami eilutę e^{xA} gausime formalią eilutę

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = Ae^{xA} = e^{xA} A.$$

Kai $\|A\| \leq \alpha < \infty$, $|x| \leq M < \infty$, pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai. Pagal (1.8) teoremą eilutę e^{xA} galima diferencijuoti panariui ir yra teisinga formulė

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = Ae^{xA} = e^{xA} A. \tag{1.37}$$

Nustatysime ryšį tarp eksponentės e^A determinanto ir matricos A pėdsako $\operatorname{Sp} A$. Iš pradžių įrodysime tokią teoremą.

1.9 teorema. *Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ir $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Tada*

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Sp} A + O(\varepsilon^2).$$

$\triangleleft$ Tegu λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ yra matricos A tikrinės reikšmės. Tada $1 + \varepsilon\lambda_i$ yra matricos $E + \varepsilon A$ tikrinės reikšmės ir

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon\lambda_i) = 1 + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{Sp} A + O(\varepsilon^2). \triangleright$$

Matematinėje analizėje eksponentė apibrėžiama formule

$$e^\alpha = \lim_{k\to\infty}\Big(1 + \frac{\alpha}{k}\Big)^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ši formulė išlieka teisinga, jeigu skaičių $\alpha \in \mathbb{R}$ pakeisime matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Tiksliau

$$e^A = \lim_{k\to\infty}\Big(E + \frac{A}{k}\Big)^k, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Įrodysime, kad abu eksponentės apibrėžimai yra ekvivalentūs. Skirtumas

$$e^A - \Big(E + \frac{A}{m}\Big)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\Big)A^k, \quad C_m^k = 0,\ \forall k > m.$$

Eilutė šios lygybės dešinėje konverguoja, nes konverguoja abi eilutės kairėje lygybės pusėje (antroji yra polinomas). Be to,

$$\frac{1}{k!} \ge \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m\cdot m\cdot\dots\cdot m}\,\frac{1}{k!}.$$

Todėl eilutės dešinėje visi koeficientai yra neneigiami ir yra teisingas įvertis

$$\Big\|e^A - \Big(E + \frac{A}{m}\Big)^m\Big\| \le \sum_{k}\Big(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\Big)\alpha^k = e^\alpha - \Big(1 + \frac{\alpha}{m}\Big)^m \to 0,$$

kai $m \to \infty$; čia $\alpha = \|A\|$.

1.10 teorema. *Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Tada*

$$\det e^A = e^{\operatorname{Sp} A}.$$

$\triangleleft$ Remiantis antruoju eksponentės apibrėžimu ir 1.9 teorema

$$\det e^A = \det\Big(\lim_{k\to\infty}\Big(E + \frac{A}{k}\Big)^k\Big) = \lim_{k\to\infty}\det\Big(E + \frac{A}{k}\Big)^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\Big[\det\Big(E + \frac{A}{k}\Big)\Big]^k = \lim_{k\to\infty}\Big[1 + \frac{1}{k}\operatorname{Sp} A + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big]^k = e^{\operatorname{Sp} A}. \triangleright$$

Išvada. Matrica e^A yra neišsigimusi, t.y. $\det e^A > 0$.

Jeigu matrica A yra pakankamai paprasta, tai jos eksponentę galima suskaičiuoti remiantis tik apibrėžimu. Pavyzdžiui, tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tada

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

ir

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeigu matrica A yra diagonali, pavyzdžiui

$$A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

tai

$$e^A = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\}.$$

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra Žordano langelis, t.y.

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + T;$$

čia E – vienetinė matrica, o T – matrica, kurios pirmoje įstrižainėje virš pagrindinės yra vienetukai, o visi kiti elementai nuliai. Pastebėsime, kad matricos T laipsniai T^k, $k < n$ turi panašią struktūrą. Tiksliau matricos T^k, lyginant su matrica T^{k-1}, įstrižainė iš vienetukų yra pasislinkusi į dešinę per vieną elementą. Kai $k = n - 1$, gauname matricą, kurios viršutinis elementas dešinėje lygus vienetui, o visi kiti elementai lygūs nuliui. Jeigu $k \geq n$, tai matrica T^k yra nulinė. Todėl

$$e^{xA} = e^{\lambda x E} e^{xT} = e^{\lambda x} E e^{xT} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \ldots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ldots & \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & x \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bendruoju atveju eksponentę e^A galima ieškoti (1.33) formulės pagalba. Pavyzdžiui, tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tada charakteristinis polinomas $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 1$. Jo šaknys $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ yra skirtingos ir realios. Todėl Žordano matrica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricos A tikrines reikšmes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ atitinka tikriniai vektoriai $x = \mathrm{colon}(1, -1)$, $y = \mathrm{colon}(1, 1)$. Tegu Q yra matrica, sudaryta iš šių vektorių, t.y.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jos atvirkštinė matrica

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todėl

$$e^A = Qe^J Q^{-1}.$$

Žordano matricos J eksponentė

$$e^J = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$e^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}.$$

Logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei. Todėl funkciją $y = \ln x$, $x > 0$, galima apibrėžti formulės $x = e^y$ pagalba. Logaritminė funkcija kompleksinėje plokštumoje yra daugiareikšmė. Ji apibrėžiama taip:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z},\ z \neq 0.$$

Tegu $B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Matricą $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ vadinsime matricos $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *logaritmu* ir žymėsime $\mathrm{Ln}\, B$, jeigu $e^A = B$. Akivaizdu, kad ne kiekviena matrica turi logaritmą. Pagal 1.10 teoremą matrica e^A yra neišsigimusi. Todėl lygybė $e^A = B$ yra teisinga tik tuo atveju, kai matrica B yra neišsigimusi. Pasirodo, kad ši sąlyga yra ir pakankama. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

1.11 teorema. *Tegu $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra neišsigimusi matrica. Tada $\mathrm{Ln}\, B$ egzistuoja, t.y egzistuoja tokia matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, kad*

$$e^A = B.$$

2 SKYRIUS

PIRMOSIOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

2.1 PIRMOSIOS EILĖS PAPRASTOSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS IŠREIKŠTOS IŠVESTINĖS ATŽVILGIU

Tegu G yra sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathrm{C}(G)$. Nagrinėsime pirmosios eilės paprastąją diferencialinę lygtį

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ yra (2.1) lygties sprendinys, jeigu:

1. $\varphi \in \mathrm{C}^1\langle a, b\rangle$.

2. Taškas $(x, \varphi(x)) \in G$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

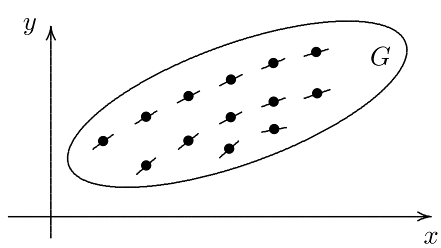
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

P a s t a b a. Iš funkcijos f tolydumo bei sprendinio φ apibrėžimo išplaukia, kad išvestinė φ' yra tolydi intervale $\langle a, b\rangle$ funkcija. Be to, sprendinio apibrėžimo sritis yra intervalas, t.y. jungioji aibė. Pavyzdžiui, funkcija $y = (c - x)^{-1}$, c – konstanta nėra lygties

$$y' = y^2 \tag{2.2}$$

sprendinys intervale $(-\infty, \infty)$, nes taške $x = c$ ji turi trūkį. Antra vertus, funkcija $y = (c - x)^{-1}$, apibrėžta intervale $(-\infty, c)$ arba intervale (c, ∞), yra šios lygties sprendinys.

Funkcija $y = \varphi(x)$ srityje G apibrėžia kreivę l. Kreivė l vadinama *integraline kreive*. Kiekvienam taškui $(x, y) \in G$ priskirkime tiesės atkarpą su krypties koeficientu $k = f(x, y)$, einančią per šį tašką. Tokių atkarpų visuma srityje G apibrėžia *krypčių lauką*, atitinkantį (2.1) lygtį (žr. 2.1 pav.).

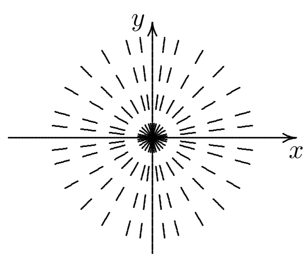


2.1 pav.

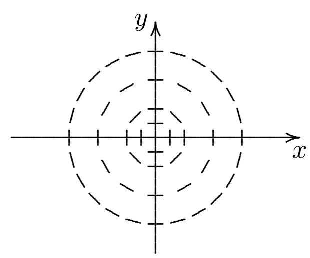
Pagal apibrėžimą kreivė $l \subset G$ yra integralinė tada ir tik tada, kai ji yra glodi ir jos liestinės krypties koeficientas kiekviename taške (x, y) sutampa su $f(x, y)$. Taigi (2.1) lygtis apibrėžia sąryšį tarp kiekvieno integralinės kreivės taško ir jos liestinės krypties koeficiento tame pačiame taške. Kartais šis sąryšis leidžia gauti kokybinį integralinių kreivių vaizdą tiesiogiai iš pačios lygties, jos tiksliai nesprendžiant. Norint apytiksliai nubrėžti inegralines kreives iš pradžių tikslinga rasti geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas yra pastovus. Ši geometrinė vieta taškų vadinama *izokline*. Izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi $f(x, y) = k$.

P a v y z d ž i a i:

1. Nagrinėsime lygtį
$$y' = y/x. \tag{2.3}$$
Kiekviename taške $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, išskyrus koordinačių pradžios tašką, ieškomos integralinės kreivės krypties koeficientas $k = y/x$. Izoklynės $y/x = k, x \neq 0$ apibrėžia pustieses, kurių krypties koeficientas yra k (žr. 2.2 pav.).



2.2 pav.



2.3 pav.

Todėl (2.3) lygties integralinės kreivės yra pustiesės
$$y = kx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

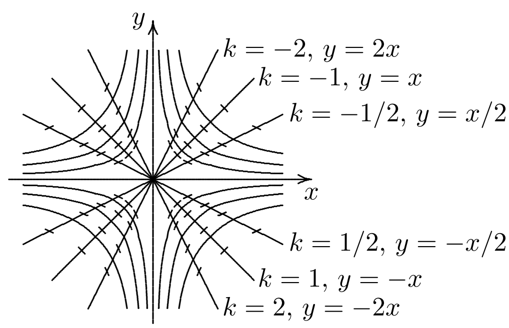
2. Nagrinėsime lygtį
$$y' = -x/y. \tag{2.4}$$
Kiekviename ieškomos integralinės kreivės taške, išskyrus koordinačių pradžios tašką, liestinės krypties koeficientas $k = -x/y$. Kadangi $(-x/y) \cdot (y/x) = -1$, tai krypčių laukas sukonstruotas pirmame pavyzdyje yra ortogonalus (2.4) lygties krypčių laukui (žr. 2.3 pav.). Kartu galime tvirtinti, kad (2.4) lygties integralinės kreivės yra pusapskritimiai
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0$$
su centru koordinačių pradžioje.

3. Nagrinėsime lygtį
$$y' = -y/x, \quad x \neq 0. \tag{2.5}$$

Iš pradžių rasime geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas turi tą patį krypties koeficientą k. Priminsime, kad taip apibrėžta aibė taškų vadinama izokline. Nagrinėjamu atveju izoklinės yra pustiesės

$$-y/x = k \Leftrightarrow y = -kx, \quad x \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 2.4 pav.).



2.4 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra hiperbolių šakos. Iš tikrųjų, perrašę (2.5) lygtį pavidalu

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

ir ją suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra hiperbolių, apibrėžtų lygtimi

$$y = c/x,\ x \neq 0,\ c \in \mathbb{R}$$

šakos.

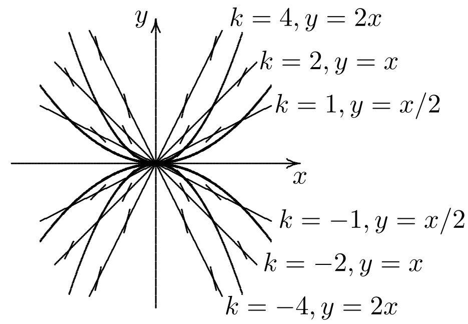
4. Nagrinėsime lygtį

$$y' = 2y/x. \tag{2.6}$$

Šiuo atveju izoklinės yra pustiesės

$$2y/x = k \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}kx, \quad x \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 2.5 pav.).



2.5 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra pusparabolės, išeinančios iš koordinačių pradžios. Iš tikrųjų, perrašę (2.6) lygtį pavidalu

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

ir ją suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra pusparabolės, apibrėžiamos lygtimi $y = Cx^2$.

5. Nagrinėsime lygtį

$$y' = -y/\operatorname{th} x, \quad x \neq 0; \tag{2.7}$$

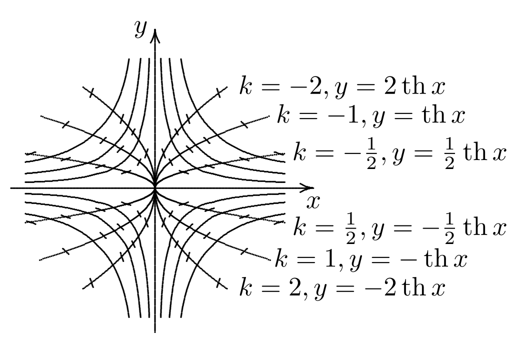
čia

$$\operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Šiuo atveju izoklinės yra kreivės, apibrėžtos lygtimi

$$-y/\operatorname{th} x = k \Leftrightarrow y = -k \operatorname{th} x, \quad x \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 2.6 pav.).



2.6 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra "hiperbolių" šakos. Iš tikrųjų, perrašę (2.7) lygtį pavidalu

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cosh x}{\sinh x}\,dx = -\frac{d(\sinh x)}{\sinh x} = -d\ln(\sinh x) + d\ln C$$

ir ją suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra hiperbolių, apibrėžtų lygtimi $y = C/\sinh x,\ \ x \neq 0$, šakos.

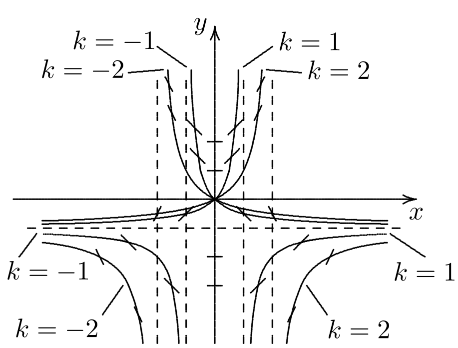
6. Nagrinėsime lygtį

$$y' = x + x/y, \quad y \neq 0. \tag{2.8}$$

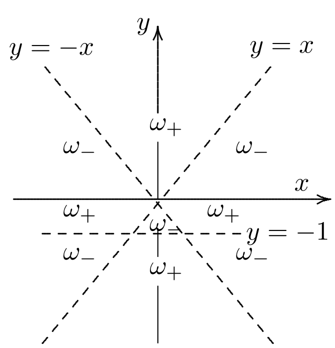
Šią lygtį atitinkančios izoklinės yra hiperbolės, apibrėžiamos lygtimi (žr. 2.7 pav.)

$$x + x/y = k \Leftrightarrow y = \frac{x}{k - x}.$$

Jų asimptotės yra tiesės $y = -1$ ir $x = k$.



2.7 pav.

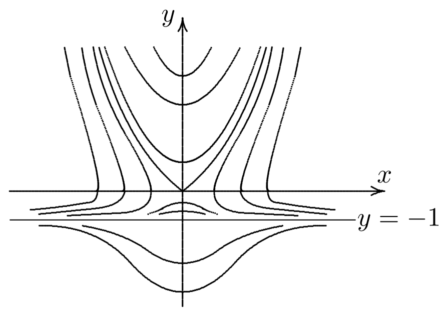


2.8 pav.

Rasime integralinių kreivių iškilumo ir įgaubtumo taškus. Iš matematinės analizės kurso žinome, kad iškilumo (įgaubtumo) taškai randami iš sąlygos $y'' < 0$, $(y'' > 0)$. Pasinaudoję (2.8) lygtimi, gausime

$$y'' = (y+1)(y-x)(y+x)y^{-3}.$$

Iš čia randame, kad plokštuma $\mathbb{R}^2$ dalinasi į sritis ω_- ir ω_+, kurių taškuose $y'' < 0$ ir $y'' > 0$ (žr. 2.8 pav.). Kadangi izoklinės $x + x/y = \pm k$ yra simetrinės y ašies atžvilgiu, tai integralinės kreivės taip pat yra simetrinės y ašies atžvilgiu. Apibendrinę visa tai gausime gana tikslų (2.8) lygties integralinių kreivių geometrinį vaizdą (žr. 2.9 pav.).



2.9 pav.

Perrašę (2.8) lygtį pavidalu

$$\frac{y\,dy}{y+1} = x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad dy - \frac{dy}{y+1} = x\,dx$$

ir ją suintegravę gausime, kad nagrinėjamos lygties integralines kreivės yra apibrėžiamos lygtimis

$$y - \ln|y+1| = x^2/2 + C, \quad y = -1;$$

čia C – laisva konstanta. Atkreipsime dėmesį į tai, kad gauti integralinių kreivių geometrinį vaizdą tiesiogiai iš šių lygčių nėra lengviau kaip iš pačios (2.8) lygties.

Iš šių pavyzdžių matome, kad diferencialinė lygtis turi be galo daug sprendinių. Bendru atveju šiuos sprendinius galima apibrėžti lygtimi

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

arba lygtimi išreikšta kintamojo y atžvilgiu

$$y = \varphi(x, C).$$

Kartais diferencialinės lygties sprendinį galima apibrėžti parametrinėmis lygtimis

$$x = \varphi(t, C), \quad y = \psi(t, C).$$

Pavyzdžiui, lygties

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

sprendinį galima apibrėžti parametrinėmis lygtimis

$$x = C\cos t, \quad y = C\sin t \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Norint iš jų išskirti kokį nors vieną reikia pareikalauti, kad sprendinys tenkintų kokią nors papildomą sąlygą. Dažniausiai tokia sąlyga apibrėžiama taip:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.9}$$

Ši sąlyga yra vadinama *pradine* arba *Koši* sąlyga. Jeigu (2.1) lygtį nagrinėsime kartu su (2.9) sąlyga, tai tokį uždavinį vadinsime *pradiniu* arba *Koši uždaviniu*.

Nagrinėjant (2.1),(2.9) Koši uždavinį patogu lygiagrečiai nagrinėti integralinę lygtį

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{2.10}$$

Apibrėžimas. Funkcija $y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$ yra (2.10) integralinės lygties sprendinys, jeigu

1. $\varphi \in \mathrm{C}\langle a, b\rangle$.
2. $(x, \varphi(x)) \in G, \forall x \in \langle a, b\rangle$.
3. $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Jeigu tolydi funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.10) integralinės lygties sprendinys, tai ji yra tolydžiai diferencijuojama, tenkina (2.1) lygtį ir (2.9) pradinę sąlygą. Atvirkštinis teiginis taip pat yra teisingas. Jeigu funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.1),(2.9) Koši uždavinio sprendinys, tai ji yra (2.10) integralinės lygties sprendinys.

2.2 EGZISTAVIMO IR VIENATIES TEOREMOS

Sprendinių egzistavimui ir jų vienaties problemai ilgą laiką nebuvo skiriama pakankamai dėmesio. Šiolaikinėje matematikoje požiūris į šią problemą iš esmės pasikeitė ir ji tapo viena iš pagrindinių matematikos problemų (priežastis buvo ta, kad vis dažniau atsirasdavo uždaviniai, kurių sprendimui be reikalo buvo švaistomos jėgos). Taigi buvo suprasta, kad, jeigu norime gauti gerą derlių, reikia žinoti kokią sėklą ir į kokią dirvą reikia sėti.

Tegu $f \in \mathrm{C}(G), G \subset \mathbb{R}^2$. Nagrinėsime lygtį

$$y' = f(x, y). \tag{2.11}$$

Apibrėžimas. Tegu $\varepsilon > 0$. Sakysime, funkcija $\varphi \in \mathrm{C}^1[a, b]$ yra (2.11) lygties ε sprendinys, jeigu:

1. $(x, \varphi(x)) \in G, \quad \forall x \in [a, b]$.
2. $|\varphi'(x) - f(x, \varphi(x))| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$.

Apibrėžimas. Tegu $\varepsilon > 0$. Sakysime, funkcija $\varphi \in \mathrm{C}[a, b]$ yra (2.11) lygties ε sprendinys, jeigu segmentą $[a, b]$ galima išskaidyti į baigtinį skaičių segmentų, kiekviename iš kurių funkcija φ yra diferencijuojama ir yra (2.11) lygties ε sprendinys.

Iš šių apibrėžimų neseka, kad ε sprendinys mažiems $\varepsilon > 0$ yra artimas tikrajam sprendiniui. Tačiau yra teisingas toks teiginys.

2.1 lema. *Tegu $\{\varepsilon_k\}$ — teigiamų skaičių seka, $\varepsilon_k \to 0$, kai $k \to \infty$, $\varphi_k \in \mathrm{C}[a, b]$ – (2.11) lygties ε_k sprendiniai segmente $[a, b]$ tokie, kad*

1. *$(x, \varphi_k(x)) \in Q \subset G \quad \forall x \in [a, b]$, čia Q — kompaktas.*
2. *$\varphi_k(x_0) = y_0$.*

Jeigu seka φ_k tolygiai konverguoja į funkciją φ segmente $[a, b]$, tai funkcija φ yra (2.11) lygties sprendinys ir $\varphi(x_0) = y_0$.

$\triangleleft$ Tegu

$$\Delta_k(x) = \varphi_k'(x) - f(x, \varphi_k(x)). \tag{2.12}$$

Pagal lemos prielaidą φ_k yra (2.11) lygties ε_k sprendinys segmente $[a, b]$. Todėl reiškinys $\Delta_k(x)$ yra apibrėžtas ir tolydus segmente $[a, b]$, išskyrus, gal būt, tik baigtinį šio segmento taškų skaičių. Be to

$$|\Delta_k(x)| \le \varepsilon_k, \quad \forall x \in [a, b].$$

Integruodami (2.12) formulę nuo x_0 iki $x \in [a, b]$, gausime

$$\varphi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Big[f(s, \varphi_k(s)) + \Delta_k(s) \Big] \, ds. \tag{2.13}$$

Kadangi funkcijų seka $\{\varphi_k\}$ tolygiai konverguoja į funkciją φ segmente $[a, b]$, tai $\varphi \in \mathbf{C}[a, b]$. Be to, $(x, \varphi(x)) \in Q, \forall x \in [a, b]$.

Srityje G funkcija f yra tolydi. Todėl kompakte $Q \subset G$ ji yra tolygiai tolydi. Tačiau tada

$$f(x, \varphi_k(x)) \rightrightarrows f(x, \varphi(x)), \quad x \in [a, b].$$

Be to,

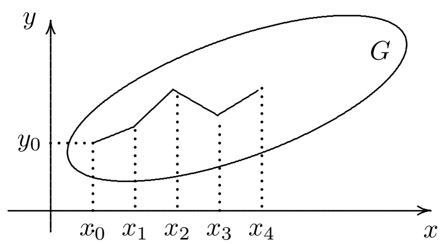
$$\Delta_k(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in [a, b].$$

Taigi (2.13) lygtyje galima pereiti prie ribos ir ribinė funkcija φ yra tolydus integralinės lygties

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$$

sprendinys. Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija φ tenkina pradinę sąlygą $\varphi(x_0) = y_0$ ir yra diferencijuojama segmente $[a, b]$. Tačiau tada ji yra (2.11) lygties sprendinys. $\triangleright$

Pereisime prie ε sprendinių konstravimo. Pateiksime vieną galimą jų konstrukciją. Tegu $(x_0, y_0) \in G$. Iš šio taško brėžiame atkarpą, kurios krypties koeficientas $k_0 = f(x_0, y_0)$ (žr. 2.10 pav.).



2.10 pav.

Tegu $(x_1, y_1), x_1 > x_0$ yra šios atkarpos kito kraštinio taško koordinatės. Jeigu $(x_1, y_1) \in G$, tai iš šio taško brėžiame atkarpą su krypties koeficientu $k_1 = f(x_1, y_1)$. Tegu $(x_2, y_2), x_2 > x_1$ yra šios atkarpos kito kraštinio taško koordinatės. Jeigu $(x_2, y_2) \in G$, tai konstrukciją tęsiame toliau. Analogiškai yra konstruojamos atkarpos ir į kairę nuo taško x_0. Taip apibrėžtos laužtės yra vadinamos *Oilerio laužtėmis*, o didžiausias skirtumas $|x_{k+1} - x_k|$ – Oilerio laužtės *išskaidimo rangu*.

2.2 lema. *Tegu $Q \subset G$ – kompaktas. Tada $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ toks, kad jeigu kokios nors Oilerio laužtės, einančios per tašką (x_0, y_0), apibrėžtos segmente $[a, b]$ ir gulinčios kompakte Q išskaidimo rangas yra mažesnis už δ, tai ši laužtė yra (2.11) lygties tolydus ε sprendinys segmente $[a, b]$.*

$\triangleleft$ Fisuojam skaičių $\varepsilon > 0$. Srityje G funkcija f yra tolydi. Tada kompakte $Q \subset G$ ji yra tolygiai tolydi. Todėl egzistuoja skaičius $\delta^* > 0$ toks, kad

$$|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon,$$

jeigu tik

$$|x - \tilde{x}| < \delta^*, \quad |y - \tilde{y}| < \delta^*, \quad \forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in Q.$$

Toliau nagrinėsime segmentą $[x_0, b]$. Segmento $[a, x_0]$ atveju įrodymas yra analogiškas. Tegu $x_0 < x_1 < \ldots < x_n, x_n = b$ yra segmento $[x_0, b]$ išskaidymas toks, kad didžiausias iš skirtumų $x_{k+1} - x_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$ neviršija

$$\delta = \min\{\delta^*, \delta^*/M\};$$

čia

$$M = \max_Q |f(x, y)|.$$

Šį išskaidymą atitinka Oilerio laužtė apibrėžta visame segmente $[x_0, b]$. Tarkime, ją galima apibrėžti lygtimi $y = \psi(x)$, $x \in [x_0, b]$. Pagal apibrėžimą Oilerio laužtė yra tolydi ir dalimis tiesinė. Įrodysime, kad ji yra (2.11) lygties tolydus ε sprendinys.

Tegu $x \in (x_k, x_{k+1})$. Tada

$$\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_k, \psi(x_k)) - f(x, \psi(x)).$$

Tačiau

$$|\psi(x) - \psi(x_k)| \le M|x - x_k| \le M\delta \le \delta^*,$$

jeigu tik $|x - x_k| < \delta$. Todėl tokioms δ reikšmėms

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| = |f(x_k, \psi(x_k)) - f(x, \psi(x))| < \varepsilon, \forall x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Kadangi skaičių k pasirinkome laisvai, tai pastaroji nelygybė yra teisinga $\forall x \in [x_0, b], x \ne x_k$ $\triangleright$

Tegu

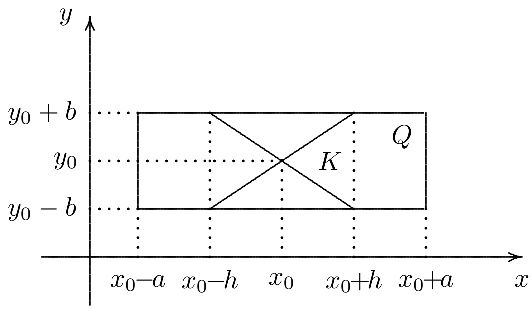
$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}, \quad Q \subset G$$

$$M = \max_Q |f(x, y)|, \quad h = \min\{a, b/M\}.$$

Atkarpa $[x_0 - h, x_0 + h]$ vadinama *Peano* atkarpa. Ši atkarpa apibrėžiama nevienareikšmiškai. Ją galima didinti arba mažinti priklausomai nuo stačiakampio Q pasirinkimo. Oilerio laužtę $y = \psi(x)$, einančią per tašką (x_0, y_0),) su bet kokiu išskaidimo rangu galima apibrėžti visoje Peano atkarpoje. Iš tikrųjų tegu

$$K = \{(x, y) : x \in [x_0 - h, x_0 + h], |y - y_0| < M|x - x_0|\}.$$

Tada laužtė einanti per šį tašką negali išeiti už K ribų (žr. 2.11 pav., kai $b/M < a$). Taigi ji yra apibrėžta visoje Peano atkarpoje.



2.11 pav.

2.1 teorema (Peano). *Tegu $(x_0, y_0) \in G$. Peano atkarpoje Koši uždavinio*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.14}$$

sprendinys egzistuoja.

$\triangleleft$ Tegu $\varepsilon_k \to 0, \varepsilon_k > 0, k = 1, 2, \dots$. Kiekvieną skaičių ε_k atitinka Oilerio laužtė tokia, kad Peano atkarpoje ji yra ε_k sprendinys (žr. 2.2 lemą). Be to, jeigu ji yra apibrėžta lygtimi $y = \varphi_k(x)$, tai $\varphi_k(x_0) = y_0, \forall k = 1, 2, \dots$.

Tegu $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Tada

$$|\varphi_k(x)| \le y_0 + b := A,$$

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(\tilde{x})| \le M|x - \tilde{x}| \le \varepsilon,$$

jeigu tik $|x - \tilde{x}| \le \delta = \varepsilon/M$. Taigi seka $\{\varphi_k\}$ yra tolygiai aprėžta ir vienodai tolydi. Todėl (žr. 1.1 teoremos išvada) iš jos galima išskirti tolygiai konverguojantį (Peano atkarpoje) posekį φ_{k_j}. Tegu φ yra šio posekio riba. Sukonstruotas posekis tenkina visas 2.1 lemos sąlygas. Todėl funkcija φ yra (2.14) Koši uždavinio sprendinys. $\triangleright$

2.2 teorema. *Tarkime, funkcijos f dalinė išvestinė f_y egzistuoja ir yra tolydi srityje G. Tada bet kokie du (2.11) lygties sprendiniai apibrėžti intervale $\langle a, b\rangle$ ir sutampantis kokiame nors taške $x_0 \in \langle a, b\rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b\rangle$.*

$\triangleleft$ Tegu φ_1, φ_2 – kokie nors du (2.11) lygties sprendiniai, sutampantis taške x_0, t.y.

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0.$$

Tada jų skirtumas

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} \big(f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\big)\, ds.$$

Tegu $Q \subset G$ – uždaras stačiakampis su centru taške (x_0, y_0), $U \subset \langle a, b\rangle$ – taško x_0 aplinka tokia maža, kad taškai $(x, \varphi_1(x)), (x, \varphi_2(x)) \in Q$, kai $x \in U$. Pagal Lagranžo teoremą, skirtumas

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \max_{(x,y)\in Q} \big|f_y(x, y)\big| \int\limits_{x_0}^{x} \big|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\big|\, ds.$$

Pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$r(x) \le \lambda \int\limits_{x_0}^{x} r(s)\, ds;$$

čia

$$r(x) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|, \quad \lambda = \max_{(x,y)\in Q} \big|f_y(x, y)\big|.$$

Pagal Gronuolo lemą (imame $f(x) = 0$)

$$r(x) \le \lambda \Big| \int\limits_{x_0}^{x} e^{\lambda|x-s|} f(s)\, ds \Big| = 0, \forall x \in U.$$

Tegu β yra didžiausias iš skaičių, kuriems atkarpoje $[x_0, \beta\rangle$ reiškinys $r(x) = 0$. Įrodysime, kad $\beta = b$. Tarkime, priešingai $\beta < b$.

Kadangi funkcija r yra tolydi, tai $r(x) = 0\, \forall x \in [x_0, \beta]$. Pakartoję teoremos įrodymą taške $(\beta, \varphi_1(\beta)) = (\beta, \varphi_2(\beta)) \in G$ gausime, kad pakankamai mažoje taško β aplinkoje $r(x) = 0$. Tačiau tai prieštarauja skaičiaus β apibrėžimui. Gauta prieštara įrodo, kad $\beta = b$ ir $r(x) = 0, \forall x \in [x_0, b)$. Analogiškai galima įrodyti, kad $r(x) = 0, \forall x \in (a, x_0]$. $\triangleright$

Pateiksime dar vieną (2.14) Koši uždavinio sprendinių egzistavimo vienaties teoremos įrodymą. Priminsime, kad diferencijuojama funkcija y yra (2.14) Koši uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra tolydus integralinės lygties

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \tag{2.15}$$

sprendinys (žr. (2.1) skyrelį). Pažymėję

$$Ty(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds,$$

pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$y = Ty. \tag{2.16}$$

Tarkime, funkcija f stačiakampyje

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\} \subset G$$

kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in Q;$$

čia a, b ir L – teigiami skaičiai.

2.3 teorema. *(Pikaro–Lindeliofo) Tegu aibė $X \subset \mathrm{C}[x_0 - h, x_0 + h]$ yra tokia, kad*

$$\rho(y, y_0) := \max_{|x - x_0| \leq h} |y(x) - y_0| \leq b, \quad \forall y \in X;$$

čia skaičius h tenkina nelygybes:

$$0 < h < a,\ hM < b,\ hL < 1,\ M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|.$$

1. *Tada aibėje X egzistuoja vienintelis (2.16) lygties sprendinys y. Be to, $y \in \mathrm{C}^1[x_0 - h, x_0 + h]$ ir yra (2.14) Koši uždavinio sprendinys.*
2. *Nuoseklieji artiniai*

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, ds, \quad y_0(x) = y_0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

segmente $[x_0 - h, x_0 + h]$ tolygiai konverguoja į sprendinį y.

◃ Pakanka patikrinti, kad operatorius T tenkina Banacho teoremos apie nejudamąjį tašką sąlygas (žr. 1.2 teoremą). Pagal teoremos prielaidą

$$\rho(Ty, y_0) \leq \max_{|x - x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right| \leq hM \leq b.$$

Todėl operatorius $T : X \to X$. Be to, $\forall y, \tilde{y} \in X$ yra teisingas įvertis

$$\rho(Ty, T\tilde{y}) \leq \max_{|x - x_0| \leq h} \int_{x_0}^{x} L|y(s) - \tilde{y}(s)|\, ds \leq \lambda \rho(y, \tilde{y});$$

čia $\lambda = hL < 1$. Taigi operatorius T yra sutraukiantysis. ▹

Apibrėžimas. Sakysime, sritis G yra *vienaties sritis* (2.11) lygčiai, jeigu bet kokie du jos sprendiniai apibrėžti intervale $\langle a, b \rangle$ ir sutampantis kokiame nors taške $x_0 \in \langle a, b \rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b \rangle$.

Jeigu funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G, tai (žr. 2.2 teoremą) sritis G yra vienaties sritis (2.11) lygčiai. Tačiau kartais ši savybė išlieka ir tuo atveju, kai funkcija f yra tik tolydi. Pavyzdžiui, jeigu lygtyje

$$y' = f(x)/g(y) \tag{2.17}$$

funkcija $f \in \mathbf{C}(a, b)$, $g \in \mathbf{C}(c, d)$ ir $g(y) \neq 0$, $\forall y \in (c, d)$, tai $\forall x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ ši lygtis turi vienintelį sprendinį tenkinantį pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$ (žr. 2.5 skyrelį). Taigi sritis

$$G = \{(x, y) : x \in (a, b),\, y \in (c, d)\}$$

yra vienaties sritis (2.17) lygčiai, nors dešinė šios lygties pusė yra tik tolydi.

Bendruoju atveju funkcijos f tolydumo nepakanka, kad sritis G būtų vienaties sritis (2.11) lygčiai. Pavyzdžiui lygties

$$y' = 3y^{2/3}$$

dešinė pusė yra tolydi visoje plokštumoje Oxy. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad funkcija

$$y = (x - C)^3, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

yra šios lygties sprendinys kiekvienai konstantai $C \in \mathbb{R}$. Be to, funkcija $y = 0$ taip pat yra šios lygties sprendinys. Taigi per kiekvieną x ašies tašką (t.y. kai $y = 0$) eina dvi integralinės kreivės.

Iš šio pavyzdžio matome, kad vienaties gali nebūti tuose plokštumos taškuose, kuriuose funkcijos f išvestinė $f_y = \infty$. Tačiau, jeigu kokiose nors ploštumos taškuose $f_y = \infty$, tai dar neriškia, kad vienaties nėra. Pavyzdžiui, per bet kurį pusplokštumės $y \geq 0$ tašką eina vienintelė lygties $y' = 2\sqrt{y} + 1$ integralinė kreivė, nors $(2\sqrt{y} + 1)'_y\big|_{y=0} = \infty$.

Ištirsime atvejį, kai sprendinio egzistavimą ir vienatį galima garantuoti visoje nagrinėjamoje srityje.

2.4 teorema. *Tarkime, funkcija f juostoje*

$$Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\, -\infty < y < \infty\}$$

yra tolydi ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in Q. \tag{2.18}$$

Tada $\forall (x_0, y_0) \in Q$ egzistuoja vienintelis aprėžtas Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.19}$$

sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas visame segmente $[a, b]$.

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame tašką $(x_0, y_0) \in Q$. Akivaizdu, kad x_0 yra arba segmento $[a, b]$ vidinis taškas, arba vienas iš jo kraštinių taškų. Išnagrinėsime atvejį, kai $x_0 \in (a, b)$. Kiti atvejai nagrinėjami analogiškai. Tegu

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

yra segmento $[x_0, b]$ išskaidymas į n lygių dalių:

$$\delta = x_k - x_{k-1} = \frac{b - x_0}{n}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Šį segmento $[x_0, b]$ išskaidymą atitinka Oilerio laužtė. Tarkime, kad ji yra apibrėžta lygtimi $y = \varphi_n(x)$. Nagrinėjamu atveju nereikia rūpintis, kad Oilerio laužtė nepaliktų juostos

$$Q^* = \{(x, y) : x_0 \le x \le b, -\infty < y < \infty, \}.$$

Todėl kiekviena Oilerio laužtė yra apibrėžta visame segmente $[x_0, b]$.

Pagal apibrėžimą Oilerio laužtė yra dalimis tiesinė funkcija. Tiksliau

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_n(x) & = & \varphi_n(x_0) + f(x_0, \varphi_n(x_0))(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_1], \\
\varphi_n(x) & = & \varphi_n(x_1) + f(x_1, \varphi_n(x_1))(x - x_1), \quad x \in [x_1, x_2], \\
\varphi_n(x) & = & \varphi_n(x_2) + f(x_2, \varphi_n(x_2))(x - x_2), \quad x \in [x_2, x_3], \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n(x) & = & \varphi_n(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, \varphi_n(x_{n-1}))(x - x_{n-1}), \ x \in [x_{n-1}, x_n].
\end{array}$$

Kadangi funkcija f yra tolydi ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą, tai

$$|f(x, y)| \le |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0)| \le$$

$$L|y - y_0| + M_0 \le L|y| + L|y_0| + M_0, \quad M_0 = \max_{x \in [x_0, b]} |f(x, y_0)|.$$

Pananaudoję šią nelygybę, įvertinsime funkcijos φ_n reikšmę taške x_k per funkcijos φ_n reikšmę taške x_{k-1}

$$|\varphi_n(x_k)| \le |\varphi_n(x_{k-1})| + \delta L|\varphi_n(x_{k-1})| + \delta(L|y_0| + M_0).$$

Pažymėkime $M_1 = L|y_0| + M_0$. Tada matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad

$$|\varphi_n(x_k)| \le |y_0|(1 + \delta L)^k + \delta M_1 \sum_{s=0}^{k-1} (1 + \delta L)^s := S_k(n).$$

Skaičių seka $\{S_k(n)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ yra didėjanti (žr. skaičiaus e apibrėžimą). Todėl

$$|\varphi_n(x_k)| \le S_n(n), \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Be to, skaičių seka $S_n(n)$, $n = 1, 2, \cdots$ taip pat yra didėjanti ir

$$S_n(n) = |y_0|(1 + \delta L)^n + \delta M_1 \sum_{s=0}^{n-1} (1 + \delta L)^s =$$

$$|y_0|(1 + \delta L)^n + M_1 \frac{(1 + \delta L)^n - 1}{L}.$$

Kadangi

$$\lim_{n \to \infty} \Big(1 + \delta L\Big)^n = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{b - x_0}{n} L\Big)^n = e^{L(b - x_0)},$$

tai

$$|\varphi_n(x_k)| \le S_n(n) < \lim_{n \to \infty} S_n(n) < \big(|y_0| + M_1/L\big) e^{L(b - x_0)}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Iš šių įverčių išplaukia, kad kiekviena funkcija φ_n yra tolygiai aprėžta. Be to, ji yra vienodai tolydi (patikrinkite). Toodėl segmente $[x_0, b]$ ji tolygiai konverguoja į ribinę funkciją φ^* ir funkcija φ^* yra vienintelis (2.19) Koši uždavinio sprendinys segmente $[x_0, b]$. Ribinei funkcijai išlieka teisingas įvertis

$$|\varphi^*(x)| \le \big(|y_0| + M_1/L\big)e^{L(x-x_0)}.$$

Taigi funkcija φ^* yra aprėžta.

Analogiškai įrodoma, kad egzistuoja vienintelis aprėžtas (2.19) Koši uždavinio sprendinys φ_* segmente $[a, x_0]$. Tačiau tada funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^*(x), & x \in [a, x_0], \\ \varphi_*(x), & x \in [x_0, b] \end{cases}$$

yra vienintelis aprėžtas (2.19) Koši uždavinio sprendinys segmente $[a, b]$ ir

$$|\varphi(x)| \le \big(|y_0| + M_1/L\big)e^{L|x-x_0|}.\triangleright$$

I š v a d a. Iš teoremos įrodymo išplaukia, kad visi teoremos teiginiai, išskyrus sprendinio aprėžtumą, išlieka teisingi ir juostoje

$$Q = \{(x, y) : a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$

o funkcija f tenkina (2.18) Lipšico sąlygą, kurioje konstanta L pakeista teigiama funkcija $L \in \mathrm{C}(a, b)$.

P a v y z d y s. Tarkime, funkcijos p ir $q \in \mathrm{C}(a, b)$. Tiesinės lygties

$$y' = p(x)y + q(x)$$

atveju funkcija $f(x, y) = p(x)y + q(x)$. Jos dalinė išvestinė $f_y = p(x)$. Todėl galime imti $L(x) = |p(x)|$. Pagal 2.4 teoremos išvadą $\forall(x_0, y_0)$, $x_0 \in (a, b)$ egzistuoja vienintelis Koši uždavinio

$$y' = p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

sprendinys, apibrėžtas visame intervale (a, b). Prie nurodytų sąlygų tiesinės lygties sprendinio egzistavimą ir vienatį (2.4) skyrelyje įrodysime tiesiogiai.

2.5 teorema. *Jeigu taško (x_0, y_0) aplinkoje funkcija f turi tolydžias k - tos eilės dalines išvestines, tai Koši uždavinio*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.20}$$

sprendinys $y = \varphi(x)$ turi, pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje, $k+1$ - os eilės tolydžią išvestinę.

$\triangleleft$ Tegu $y = \varphi(x)$ yra (2.20) Koši uždavinio sprendinys kokioje nors taško x_0 aplinkoje. Tai reiškia, kad šioje aplinkoje

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Jeigu $k = 0$, tai pagal teoremos sąlygą funkcija f yra tolydi. Todėl funkcija φ turi tolydžią išvestinę $f(x, \varphi(x))$.

Tarkime, $k = 1$, t.y. taško (x_0, y_0) aplinkoje funkcija f turi pirmos eilės tolydžias dalines išvestines f_x ir f_y. Tada dešinė lygybės

$$\frac{\varphi'(x+\delta x) - \varphi'(x)}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x, \varphi(x)) - f(x, \varphi(x))}{\delta x} +$$

$$\frac{f(x+\delta x, \varphi(x+\delta x)) - f(x+\delta x, \varphi(x))}{\varphi(x+\delta x) - \varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+\delta x) - \varphi(x)}{\delta x}$$

pusė turi baigtinę ribą. Kartu ir kairė šios lygybės pusė turi baigtinę ribą ir jos sutampa. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad egzistuoja funkcijos φ antros eilės išvestinė ir

$$\varphi''(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot f(x, \varphi(x)).$$

Kadangi dešinė šios lygybės pusė yra tolydi funkcija tam tikroje taško x_0 aplinkoje, tai šioje aplinkoje funkcijos φ antros eilės išvestinė yra tolydi.

Tegu $k = 2$, t.y. taško (x_0, y_0) aplinkoje funkcija f turi antros eilės tolydžias dalines išvestines f_{xx}, f_{xy} ir f_{yy}. Analogiškai galima įrodyti, kad pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje funkcija φ turi trečios eilės tolydžią išvestinę ir

$$\varphi'''(x) = f_{xx}(x, \varphi(x)) + 2f_{xy}(x\varphi(x)) \cdot f(x, \varphi(x)) +$$

$$f_{yy}(x, \varphi(x)) \cdot f^2(x, \varphi(x)) + f_y(x\varphi(x))\big(f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot f(x, \varphi(x))\big).$$

Tęsdami tokius samprotavimus k - me žingsnyje įrodysime teoremą. $\triangleright$

2.3 SPRENDINIŲ PRATĘSIMAS

Tarkime, funkcija f yra tolydi srityje $G \subset \mathbb{R}^2$. Nagrinėsime lygtį

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G. \tag{2.21}$$

Apibrėžimas. Tegu $y = \varphi(x), x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ir $y = \psi(x), x \in \langle a, b \rangle$ yra (2.21) lygties sprendiniai. Be to, tegu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$ ir

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Tada sakysime, kad sprendinys $y = \psi(x)$ yra sprendinio $y = \varphi(x)$ *pratęsimas.*

Tarkime, $y = \varphi_1(x)$, $x \in \langle a, b]$ yra (2.21) lygties sprendinys. Tada jį galima pratęsti į dešinę. Iš tikrųjų pagal sprendinio apibrėžimą taškas $(b, \varphi_1(b)) \in G$. Todėl pakankamai mažoje šio taško aplinkoje egzistuoja Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad y(b) = \varphi_1(b)$$

sprendinys $y = \varphi_2(x)$, $x \in [b, b + \varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$. Tegu

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \langle a, b]; \\ \varphi_2(x), & x \in [b, b + \varepsilon\rangle. \end{cases}$$

Lengvai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija yra integralinės lygties

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \int\limits_b^x f(s, \varphi(s))\, ds, \quad x \in \langle a, b + \varepsilon\rangle$$

sprendinys, kartu ir (2.21) diferencialinės lygties sprendinys. Taigi sprendinį $y = \varphi_1(x)$ galima pratęsti į dešinę.

Apibrėžimas. Jeigu $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ yra (2.21) lygties sprendinys ir jį negalima pratęsti nei į kairę nei į dešinę, tai toks sprendinys vadinamas *pilnuoju* (nepratęsiamu), o intervalas (α, β) – *maksimaliu* sprendinio egzistavimo intervalu.

2.6 teorema. *Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G ir (x_0, y_0) – laisvai pasirinktas taškas srityje G. Tada Koši uždavinio*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.22}$$

pilnasis sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas maksimaliame intervale (a, b) egzistuoja ir yra vienintelis. Be to, taškas $x_0 \in (a, b)$ ir kai $x \to a + 0$, arba kai $x \to b - 0$ taškas $(x, \varphi(x))$ artėja į ∂G.

$\triangleleft$ Be įrodymo. $\triangleright$

Pastaba. Tegu funkcija f juostoje

$$Q = \{(x, y) : x \in [a, b],\, y \in \mathbb{R}^1\}$$

yra tolydi ir

$$|f_y(x,y)| \leq L, \quad \forall (x,y) \in Q.$$

Tada (žr. 2.4 teoremą) $\forall (x_0, y_0) \in Q$ egzistuoja vienintelis aprėžtas (2.22) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame segmente $[a, b]$. Be to, jeigu

$$Q = \{(x, y) : x \in (a, b),\ y \in \mathbb{R}^1\}$$

ir funkcija f tenkina sąlygą

$$|f_y(x,y)| \leq L(x), \quad L \in \mathbf{C}(a,b),\ \forall (x,y) \in Q,$$

tai $\forall (x_0, y_0) \in Q$ egzistuoja vienintelis (2.22) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame intervale (a, b). Įrodant 2.4 teoremą iš esmės buvo panauduota nelygybė

$$|f(x,y)| \leq L|y| + L|y_0| + \max_{x \in [a,b]} |f(x, y_0)|.$$

Ši nelygybė garantuoja, kad funkcija f, kintamojo y atžvilgiu, auga ne greičiau už tiesinę funkciją. Jeigu funkcija f, kintamojo y atžvilgiu, auga greičiau už tiesinę, tai galima visiškai kita situacija. Tiksliau gali atsitikti taip, kad sprendinys nėra apibrėžtas visame intervale (a, b), arba jis nėra aprėžtas.

P a v y z d y s. Nagrinėsime Koši uždavinį

$$y' = y^2, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.23}$$

Šios lygties dešinė pusė $f(x, y) = y^2$ yra apibrėžta visoje plokštumoje Oxy. Kiekvieno jos taško aplinkoje yra patenkintos 2.1 ir 2.2 teoremų sąlygos. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad kiekvieną sprendinį galima neribotai pratęsti tiek į kairę tiek į dešinę. Tačiau taip nėra. Šiuo atveju funkcija $f(x, y) = y^2$, kintamojo y atžvilgiu auga kaip kvadratinė funkcija. Todėl negalime tvirtinti, kad egzistuoja nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame intervale $(-\infty, +\infty)$. Iš tikrųjų (2.23) lygties sprendinys

$$y = \frac{1}{C - x}$$

nėra apibrėžtas $\forall x \in \mathbb{R}$. Taške $x = C$ jis turi trūkį. Jeigu $y_0 \neq 0$, tai iš Koši sąlygos randame, kad $C = x_0 + 1/y_0$, o funkcija

$$y = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x}$$

yra (2.23) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas intervale $(-\infty, x_0 + y_0^{-1})$. Taigi maksimalus sprendinio egzistavimo intervalas nesutampa su visa tiese. Be to, kai x artėja į intervalo $(-\infty, x_0 + y_0^{-1})$ kraštinius taškus, taškas $(x, y(x))$ artėja į begalybę.

2.4 BENDRASIS SPRENDINYS

Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje $G \subset \mathbb{R}^2$ ir taškas $(x_0, y_0) \in G$. Pagal 2.6 teoremą egzistuoja vienintelis pilnasis Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \tag{2.24}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.25}$$

sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, apibrėžtas maksimaliame intervale $I(x_0, y_0)$. Funkcija φ yra apibrėžta aibėje

$$D = \{(x, x_0, y_0) : x \in I(x_0, y_0),\ (x_0, y_0) \in G.\}$$

Galima įrodyti, kad aibė D yra sritis. Funkcija $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, apibrėžta srityje D, vadinama (2.24) lygties *bendruoju sprendiniu* Koši formoje. Ji apibrėžia visus (2.24) lygties sprendinius (apibrėžtus maksimaliame intervale).

Bendrasis sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ priklauso nuo dviejų parametrų x_0, y_0. Kiekvienai fiksuotai parametrų porai x_0, y_0, (taškas $(x_0, y_0) \in G$) jis apibrėžia integralinę kreivę. Jeigu taškas (x_1, y_1) priklauso šiai kreivei, tai funkcija $y = \varphi(x, x_1, y_1)$ apibrėžia tą patį sprendinį. Jeigu norime, kad skirtingas parametrų poras x_0, y_0 ir x_1, y_1 atitiktų skirtingos integralinės kreivės, reikia jas parinkti taip, kad taškai (x_0, y_0) ir (x_1, y_1) gulėtų kreivėje, kuri nei viename savo taške neliečia integralinių kreivių. Tarkime, šią kreivę galima apibrėžti lygtimis

$$x_0 = \alpha(t), \quad y_0 = \beta(t), \quad t \in (\tau, T).$$

Be to, tegu kiekvieną integralinę kreivę atitinka fiksuota parametro $t \in (\tau, T)$ reikšmė ir skirtingas parametrų t reikšmes atitinka skirtingos integralinės kreivės. Tada bendrasis (2.24) lygties sprendinys

$$y = \varphi(x, \alpha(t), \beta(t)) := \psi(x, t), \quad t \in (\tau, T)$$

priklausys nuo vieno laisvo parametro. Todėl dažnai yra nauduojamas kitas, ekvivalentus, bendrojo sprendinio apibrėžimas.

Apibrėžimas. Sakysime, tolydi funkcija $y = \varphi(x, C)$, apibrėžta kokioje nors srityje $V \subset \mathbb{R}^2$ yra (2.24) diferencialinės lygties *bendrasis sprendinys* srityje $G_0 \subset G$, jeigu sritis G_0 yra vienaties sritis ir

1. $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ lygtis
$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$
turi vienintelį sprendinį $C_0 = C(x_0, y_0)$.

2. Taškas $(x_0, C_0) \in V$ ir $y = \varphi(x, C_0)$ yra (2.24), (2.25) Koši uždavinio sprendinys.

P a s t a b a. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad funkcija $\varphi(x_0, C)$ yra monotononė C atžvilgiu taško C_0 aplinkoje.

A p i b r ė ž i m a s. Sprendinys, kurį gauname įstačius į (2.24) lygties bendrąjį sprendinį $y = \varphi(x, C)$ konkrečią parametro reikšmę $C = C_0$, vadinamas *atskiruoju* šios lygties sprendiniu.

A p i b r ė ž i m a s. Sprendinys, kurio kiekviename taške yra nepatenkinta sprendinio vienaties sąlyga yra vadinamas *ypatinguoju* sprendiniu.

P a s t a b a. Bendrasis sprendinys $y = \varphi(x, C)$ apibrėžia vienparametrinę nesikertančių integralinių kreivių šeimą. Todėl ypatingasis sprendinys negali būti gautas iš bendrojo sprendinio parinkus kokią nors konkrečią parametro C reikšmę. Be to, bendrasis sprendinys yra susijęs su vienaties sritimi G_0. Todėl srityje G_0 negali būti ypatingąjį sprendinį apibrėžiančios integralinės kreivės. Jeigu ypatingasis sprendinys egzistuoja, tai ji atitinkanti integralinė kreivė gali gulėti tik srities G_0 kraštiniuose taškuose. Tačiau tada nagrinėjama diferencialinė lygtis turi būti apibrėžta uždaroje srityje $\overline{G_0}$. Taigi ypatingi sprendiniai gali atsirasti tik tada, kai diferencialinės lygties dešinė pusė yra apibrėžta uždaroje srityje ir kai šios srities kontūras yra integralinė kreivė. Gali būti ir taip, kad sritis G_0 yra vienaties sritis, tačiau joje gali ir neegzistuoti bendrasis sprendinys.

P a v y z d ž i a i.

1. Nagrinėsime lygtį
$$y' = y^{2/3}. \tag{2.26}$$
Šios lygties dešinioji pusė $f(x, y) = y^{2/3}$ yra tolydi visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Jos išvestinė $f_y = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ yra tolydi visoje plokštumoje, išskyrus tiesę $y = 0$. Akivaizdu, kad $y = 0$ yra (2.26) lygties sprendinys. Jeigu $y \neq 0$, (2.26) lygtį galima perrašyti taip:
$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x + C \Longleftrightarrow y = (x/3 + C)^3.$$
Paskutinė lygtis apibrėžia nesikertančių kubinių parabolių šeimą pusplokštumėse $y > 0$ ir $y < 0$. Todėl kiekvienoje iš pusplokštumių ši lygtis apibrėžia bendrąjį sprendinį. Kiekvienai fiksuotai parametro C reikšmei kubinė parabolė liečia tiesę $y = 0$ taške $x = -3C$. Taigi sprendinys $y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ yra ypatingasis (2.26) lygties sprendinys.

2. Lygties
$$y' = y^2 \tag{2.27}$$
dešinioji pusė $f(x, y) = y^2$ yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę $f_y = 2y$ visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Tiesė $y = 0$ yra šios lygties integralinė kreivė. Bendrasis (2.27) lygties sprendinys Koši formoje (žr. 2.3 skyrelį)
$$y(x) = \frac{y_0}{(x_0 - x)y_0 + 1}.$$
Jo apibrėžimo sritis priklauso nuo taško (x_0, y_0) pasirinkimo. Jeigu tašką (x_0, y_0) slinkti tiese $y_0 = -x_0$, tai bendrąjį sprendinį galima apibrėžti

formule

$$y(x) = \frac{x_0}{(x - x_0)x_0 - 1}. \tag{2.28}$$

Akivaizdu, kad kiekvieną atskirą (2.27) lygties sprendinį galima apibrėžti (2.28) formule, tinkamai parinkus parametro x_0 reikšmę. Kai $x_0 = 0$ turime atskirąjį sprendinį $y = 0$. Be to, per kiekvieną tašką $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eina vienintelė (2.27) lygties integralinė kreivė. Todėl pastarasis sprendinys nėra ypatingas sprendinys. Antra vertus, suintegrave (2.27) lygtį gausime formulę

$$y(x) = \frac{1}{C - x},$$

kuri apibrėžia bendrąjį sprendinį pusplokštumėje $y > 0$ arba pusplokštumėje $y < 0$. Atskirasis sprendinys $y = 0$ gaunamas iš bendrojo sprendinio perejus prie ribos, kai $C \to \infty$.

Pastarasis pavyzdys rodo, kad yra nedidelis skirtumas tarp sprendinių šeimos priklausančios nuo parametro C ir bendrojo sprendinio, kaip visų atskirų sprendinių visumos. Pirmuoju atveju ne visada bendrąjį sprendinį galima apibrėžti visoje srityje G. Bendru atveju šis skirtumas dar labiau išriškėja. Todėl garantuoti bendrojo sprendinio egzistavimą visoje srityje negalima. Tačiau galima įrodyti lokalų bendrojo sprendinio egzistavimą.

2.7 teorema. *Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G ir $(x_0, y_0) \in G$ – laisvai pasirinktas taškas. Tada egzistuoja taško (x_0, y_0) aplinka, kurioje lygtis*

$$y' = f(x, y)$$

turi bendrą sprendinį $y = \psi(x, C)$.

◃ Laisvai pasirenkame tašką $(x_0, y_0) \in G$ ir tegu stačiakampis

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\} \subset G.$$

Tada egzistuoja Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ apibrėžtas Peano atkarpoje

$$|x - x_0| < h, \quad h = \min\{a, b/M\}, \quad M = \max_{(x,y)\in Q} |f(x, y)|.$$

Parinkime tašką (x_0, y_1) taip, kad $|y_1 - y_0| \leq b/2$ ir pažymėkime

$$Q_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_1| \leq b/2\}.$$

Akivaizdu, kad $Q_1 \subset Q$. Todėl galime tvirtinti, kad egzistuoja Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_1 \tag{2.29}$$

sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_1)$ apibrėžtas Peano atkarpoje

$$|x - x_0| < h_1, \; h_1 = \min\{a, b/2M\}.$$

Šių sprendinių visuma, kai $y_1 \in [y_0 - b/2, y_0 + b/2]$, apibrėžia integralinių kreivių šeimą, kuri užpildo juostą U (per kiekvieną juostos tašką eina lygiai viena integralinė kreivė). Juostos U vidinių taškų aibė ir yra ta ieškomoji taško (x_0, y_0) aplinka. Iš tikrųjų, bet kurį (2.29) Koši uždavinio sprendinį, kurio grafikas guli juostoje U, galima apibrėžti lygtimi

$$y = \varphi(x, x_0, C) = \psi(x, C), \quad C \in (y_0 - b/2, y_0 + b/2). \triangleright$$

Sudarant kokio nors uždavinio matematinį modelį, jį aprašantis parametrai apibrėžiami aytiksliai (kiekvienas matavimo procesas yra susijęs su paklaida). Todėl, jeigu norime, kad nagrinėjamas modelis aprašytų realų procesą, turime įsitikinti, kad maža parametrų paklaida garantuoja mažą sprendinio paklaidą.

2.8 teorema. *(Apie sprendinio tolydumą pradinių sąlygų atžvilgiu.) Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G, $(x_0, y_0) \in G$ ir $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ yra pilnasis Koši uždavinio*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale $I(x_0, y_0)$. Tada funkcija φ yra tolydi kintamųjų x_0, y_0 atžvilgiu.

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame segmentą $[a, b] \subset I(x_0, y_0)$ tokį, kad $x_0 \in (a, b)$. Aibė taškų

$$l_0(a, b) = \{(x, y) : x \in [a, b], \; y = \varphi(x, x_0, y_0)\}$$

yra dalis integralinės kreivės

$$l_0 = \{(x, y) : x \in I(x_0, y_0), \; y = \varphi(x, x_0, y_0)\}.$$

Kadangi funkcija φ yra tolydi kintamojo x atžvilgiu, tai aibė $l_0(a, b)$ yra uždara. Be to, $l_0(a, b) \subset G$. Todėl

$$\operatorname{dist}\{l_0, \partial G\} = d > 0.$$

Tegu

$$J = \{(x, y) : x \in [a, b], \; |y - \varphi(x, x_0, y_0)| \le d/2.\}$$

Skaičių $\delta > 0$ parinkime taip, kad taško (x_0, y_0) aplinka

$$U_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \subset J.$$

Aplinkoje $U_\delta(x_0, y_0)$ laisvai pasirenkame tašką (x_1, y_1). Tegu

$$y = \varphi(x, x_1, y_1)$$

yra Koši uždavinio

$$y' = f(x,y), \quad y(x_1) = y_1$$

pilnasis sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale $I(x_1,y_1)$ ir

$$l_1 = \{(x,y) : x \in I(x_1,y_1),\, y = \varphi(x,x_1,y_1)\}$$

yra integralinė kreivė, einanti per tašką (x_1,y_1). Akivaizdu, kad aibė

$$I(x_0,y_0) \cap I(x_1,y_1)$$

nėra tuščia. Įrodysime, kad

$$[a,b] \subset I(x_1,y_1),$$

jeigu tik skaičius δ yra pakankamai mažas.

Sprendiniai $\varphi(x,x_0,y_0)$ ir $\varphi(x,x_1,y_1)$ tenkina integralines tapatybes

$$\varphi(x,x_0,y_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\,ds, \quad x \in I(x_0,y_0).$$

$$\varphi(x,x_1,y_1) = y_1 + \int\limits_{x_1}^{x} f(s,\varphi(s,x_1,y_1))\,ds, \quad x \in I(x_1,y_1).$$

Bendroje šių sprendinių apibrėžimo srityje yra teisinga nelygybė

$$|\varphi(x,x_0,y_0) - \varphi(x,x_1,y_1)| \leq |y_1 - y_0| +$$

$$\Big|\int\limits_{x_1}^{x_0} f(s,\varphi(s,x_1,y_1))\,ds\Big| + \Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big(f(s,\varphi(s,x_1,y_1)) - f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\big)\,ds\Big|.$$

Tegu

$$M = \max_{(x,y)\in J} |f(x,y)|, \quad L = \max_{(x,y)\in J} |f_y(x,y)|.$$

Tada kiekviename taške x, kuriame integralinė kreivė $l_1 \subset J$ yra teisinga nelygybė

$$|\varphi(x,x_0,y_0) - \varphi(x,x_1,y_1)| \leq$$

$$|y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0| + L\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|\varphi(s,x_1,y_1) - \varphi(s,x_0,y_0)\big|\,ds\Big|.$$

Pritaikę šiai nelygybei Gronuolo lemą, gausime

$$|\varphi(x,x_0,y_0) - \varphi(x,x_1,y_1)| \leq \big(|y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0|\big)e^{L|x-x_0|} \leq$$

$$\sqrt{1+M^2}\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}\,e^{L(b-a)}$$

Tegu
$$\delta < e^{-L(b-a)}(1+M^2)^{-1/2}d/2.$$
Tada
$$|\varphi(x, x_0, y_0) - \varphi(x, x_1, y_1)| \leq \sqrt{1+M^2}e^{L(b-a)}\delta < d/2.$$
Taigi pakankamai mažoms δ reikšmėms integralinė kreivė l_1 negali kirsti juostos J iš viršaus ir iš apačios. Kadangi kreivė l_1 yra nepratęsiama, tai ji turi kirsti juostą J per atkarpas tiesėse $x = a$ ir $x = b$. Todėl galime tvirtinti, kad funkcija $y = \varphi(x, x_1, y_1)$ yra apibrėžta visame segmente $[a, b]$.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Jeigu
$$\delta < \min\{e^{-L(b-a)}(1+M^2)^{-1/2}d/2,\ e^{-L(b-a)}(1+M^2)^{-1/2}\varepsilon\},$$
tai
$$|\varphi(x, x_0, y_0) - \varphi(x, x_1, y_1)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$
Taigi funkcija φ yra tolydi parametrų x_0 ir y_0 atžvilgiu. $\triangleright$

Analogiškas teiginys išlieka teisingas ir tuo atveju, kai lygtis
$$y' = f(x, y, \varepsilon)$$
priklauso nuo parametro ε. Tiksliau, jeigu funkcija f yra tolydi (visų kintamųjų atžvilgių) ir tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu, tai bet koks šios lygties sprendinys tolygiai priklauso nuo parametro ε ir pradinių sąlygų x_0, y_0. Šio teiginio įrodymas susiveda į pagalbinės sistemos
$$\begin{cases} y' &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon' &= 0 \end{cases}$$
sprendinio tolydumą pradinių sąlygų atžvilgiu.

P a s t a b a. Jegu yra patenkintos (2.8) teoremos sąlygos, tai galima įrodyti, kad funkcija φ yra tolydi srityje D kartu su savo dalinėmis išvestinėmis φ_x, φ_{x_0} ir φ_{y_0}.

2.5 LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

Vienos iš paprasčiausių pirmos eilės diferencialinių lygčių yra lygtys su *atskiriamais kintamaisiais*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{2.30}$$

Tarkime, funkcija f yra tolydi segmente $[x_0 - a, x_0 + a]$, o funkcija g segmente $[y_0 - b, y_0 + b]$ ir

$$g(y) \neq 0, \quad \forall y \in [y_0 - b, y_0 + b].$$

Atskyrę kintamuosius perrašysime šią lygtį taip:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx. \tag{2.31}$$

Suintegravę abi šios lygties puses panariui, gausime jos bendrąjį integralą[1]

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Norint išskirti atskirąjį integralą (atskirąjį sprendinį), tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.32}$$

pakanka neapibrėžtinius integralus pakeisti apibrėžtiniais, t.y. perrašyti integralą taip:

$$G(y) := \int\limits_{y_0}^{y} g(s)\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt =: F(x). \tag{2.33}$$

Pagal prielaidą funkcijos G išvestinė $G'(y) = g(y) \neq 0$. Todėl egzistuoja funkcijos G atvirkštinė funkcija H. Tai reiškia, kad (2.33) lygtį galima išspręsti y atžvilgiu ir sprendinį užrašti pavidalu

$$y(x) = H\big(F(x)\big). \tag{2.34}$$

Taip apibrėžta funkcija y yra vienintelis (2.30), (2.32) Koši uždavinio sprendinys. Iš tikrųjų, diferencijuodami tapatybę $G\big(y(x)\big) = F(x)$ gauname

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \;\Rightarrow\; y'(x) = f(x)/g\big(y(x)\big).$$

Be to, $y(x_0) = H\big(F(x_0)\big) = H(0) = y_0$. Jeigu $z = z(x)$ yra koks nors kitas (2.30), (2.32) Koši uždavinio sprendinys, tai pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje $z'(x) = f(x)/g\big(z(x)\big)$, $g\big(z(x)\big) \neq 0$ ir $z(x_0) = y_0$. Todėl šioje aplinkoje

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} z'(t) g\big(z(t)\big)\,dt = \int\limits_{y_0}^{z(x)} g(s)\,ds = G(z(x))$$

[1] Suintegravus diferencialinę lygtį ne visada jos bendrąjį sprendinį galima užrašyti išreikštiniu pavidalu $y = \varphi(x, C)$. Jeigu sprendinys yra užrašomas neišreikštiniu pavidalu $\Phi(x, y) = C$, C – laisva konstanta, pastarąjį sąryšį vadiname *bendruoju integralu* (bendrąjį sprendinį). Griežtas bendrojo integralo apibrėžimas pateiktas 2.7 skyrelyje.

Iš čia gauname, kad $z(x) = H\big(F(x)\big) = y(x)$.

Kai funkcija $g(y) = 1$, tai lygties

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

bendrasis sprendinys

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds + C.$$

Atskirą sprendinį tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0,$$

patogu užrašyti taip:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds.$$

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime lygties

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

bendrąjį sprendinį. Atskyrę kintamuosius pastarąją lygtį perrašysime taip:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Integruodami abi šios lygties puses randame bendrąjį integralą

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C.$$

Išsprendę šią lygtį y atžvilgiu gauname bendrąjį sprendinį

$$y = \frac{c+x}{1-cx}, \quad c = \operatorname{tg} C.$$

Taigi nagrinėjamos lygties integralinės kreivės yra hiperbolių šeima, kurių asimptotės yra tiesės $x = 1/c$ ir $y = -1/c$.

2. Rasime lygties

$$y' = \sqrt{\frac{(1-k^2y^2)(1-y^2)}{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}$$

bendrąjį integralą. Atskyrę kintamuosius pastarąją lygtį perrašysime taip:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}.$$

Integruodami abi šios lygties puses rasime bendrąjį integralą per elipsinius integralus. Parodysime, kad bendrąjį sprendinį galima rasti nesiremiant elipsiniais integralais. Tarkime, ieškomas funkcijas galima apibrėžti parametrinėmis lygtimis $x = x(t)$, $y = y(t)$. Tada nagrinėjama lygtis yra ekvivalenti diferencialinių lygčių sistemai

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}, \ \frac{dy}{dt} = \sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}.$$

Atlikę elementarius skaičiavimus randame:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big) = 2k^2xy(y^2-x^2),$$

$$\Big(x\frac{dy}{dt}\Big)^2 - \Big(y\frac{dx}{dt}\Big)^2 = (x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Iš šių lygybių gauname formulę

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\Big(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\Big)}{\Big(x\dfrac{dy}{dt}\Big)^2 - \Big(y\dfrac{dx}{dt}\Big)^2} = -\frac{2k^2xy}{(1-k^2x^2y^2)},$$

kurią galime perrašyti taip:

$$\frac{d\Big(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\Big)}{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{2k^2xy(x\,dy + y\,dx)}{(1-k^2x^2y^2)}$$

arba

$$\frac{d\Big(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\Big)}{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}} = \frac{d(1-k^2x^2y^2)}{1-k^2x^2y^2}.$$

Integruodami abi lygybės puses randame

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C(1-k^2x^2y^2).$$

Įstatę į šią formulę išvestinių $\dfrac{dx}{dt}$ ir $\dfrac{dy}{dt}$ reikšmes gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą

$$x\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)} - y\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)} = C(1-k^2x^2y^2).$$

P a s t a b a. Pirmosios eilės (2.31) diferencialinę lygtį simetrinėje formoje galima užrašyti bendresniu pavidalu

$$P(x)Q(y)\,dx + R(x)S(y)\,dy = 0.$$

Šioje lygtyje kintamieji x ir y yra lygiateisiai. Sprendžiant šią lygtį iš pradžių tariame, kad koeficientai $R(x)$ ir $Q(y)$ yra nelygūs nuliui. Tada kintamieji atsiskiria

$$\frac{P(x)}{R(x)}\,dx + \frac{S(y)}{Q(y)}\,dy = 0$$

(abi lygties puses daliname iš $R(x)\cdot Q(y)$). Siuntegravę gautą lygtį randame jos bendrąjį integralą

$$\int \frac{P(x)}{R(x)}\,dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)}\,dy = 0.$$

Atskiriant kintamuosius galėjome prarasti sprendinius. Todėl reikia atskirai išspręsti lygtis $R(x) = 0$, $Q(y) = 0$. Jeigu $x = a$ arba $y = b$ yra šių lygčių sprendiniai, tai tiesės $x = a$ arba $y = b$ gali būti nagrinėjamos diferencialinės lygties integralinės kreivės. Kartais šios kreivės gali apibrėžti ypatingus sprendinius.

Pavyzdys. Nagrinėsime lygtį

$$y(1 + x)\,dx + x(1 - y)\,dy = 0.$$

Tarkime, $xy \neq 0$. Tada pastarąja lygtį, padalinę iš xy gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0.$$

Integruodami abi šios lygties puses randame bendrąjį integralą

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \quad \iff \quad \ln|xy| + x - y = C.$$

Jį atitinkantis integralas Koši formoje

$$xy = x_0y_0e^{y-y_0-(x-x_0)}. \tag{2.35}$$

Dalindami lygtį iš xy galėjome prarasti kai kuriuos sprendinius. Iš tikrųjų, funkcijos $x = 0$ ir $y = 0$ yra nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendiniai. Juos galima įjungti į sprendinių šeimą, kuri apibrėžiama (2.35) lygtimi. Be to, iš bendrojo integralo apibrėžimo Koši formoje matome, kad kai $x_0 = 0$, turime atskirą sprendinį $y = 0$, o kai $y_0 = 0$, turime atskirą sprendinį $x = 0$. Todėl sprendiniai $x = 0$ ir $y = 0$ nėra ypatingi sprendiniai.

Kai kurias pirmosios eilės paprastasias diferencialines lygtis galima suvesti į lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Pavyzdžiui, lygtis

$$y' = f(ax + by + l), \quad a, b, l \in \mathbb{R}$$

keitiniu $v = ax + by + l$ susiveda į lygtį

$$\frac{dv}{dx} = a + bf(v)$$

su atskiriamais kintamaisiais. Jeigu $a + bf(v) \neq 0$, tai integruodami ją randame bendrąjį integralą

$$\int \frac{dv}{a + bf(v)} = \int dx \ \Rightarrow\ F(v) = x + C.$$

Pakeitę čia v į $ax + by + l$ gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą. Jeigu $a + bf(v) = 0$ ir v_0 yra šios lygties sprendinys, tai turime dar sprendinį $v = v_0 \Rightarrow ax + by + l = v_0$.

Sakysime, funkcija f yra n-tojo laipsnio *homogeninė funkcija*, jeigu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pavyzdžiui, funkcija $f(x, y) = x^2 - xy$ yra antrojo laipsnio homogeninė funkcija, nes

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 - xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ yra homogeninė pirmojo laipsnio funkcija (netgi teigiamai homogeninė). Iš tikrųjų,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| f(x, y).$$

Sakysime, pirmos eilės diferencialinė lygtis

$$y' = f(x, y)$$

yra *homogeninė*[1], jeigu funkcija f yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija. Parodysime, kad pirmos eilės homogeninę lygtį galima suvesti į lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

Tegu f yra homogeninė nulinio laipsnio funkicja. Tada pagal apibrėžimą

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Imkime šioje formulėje $\lambda = 1/x$. Tada

$$f(x, y) = f(1, y/x) := \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

ir pirmos eilės homogeninė lygtis susiveda į lygtį

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{2.36}$$

Šioje lygtyje vitoje ieškomos funkijos y apibrėžkime naują ieškomą funkciją $u = y/x$. Tada $y = ux$, $y' = u'x + u$ ir naujos ieškomos funkcijos u atžvilgiu gauname lygtį

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \Leftrightarrow x\,du = (\varphi(u) - u)\,dx.$$

Ši lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Radę jos bendrą sprendinį (arba bendrą integralą) ir pakeitę jame u į y/x gausime nagrinėjamos homogeninės lygties bendrąjį sprendinį (bendrąjį integralą). Atkreipsime dėmesį dar į tai, kad pastarosios lygties sprendinys $x = 0$ nebūtinai yra (2.36) lygties sprendinys. Be to, ji dar gali turėti sprendinius, apibrėžtus lygtimi $\varphi(u) = u$.

P a v y z d ž i a i.

[1] Pirmosios eilės diferencialinė lygtis simetrinėje formoje

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

yra homogeninė, jeigu funkcijos P ir Q yra homogeninės to paties laipsnio funkcijos.

1. Rasime homogeninės lygties
$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$
bendrąjį integralą. Kadangi funkcija esanti dešinėje šios lygties pusėje yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija, tai pastarąją lygtį galima perrašyti taip:
$$y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2y/x}.$$
Vietoje ieškomosios funkcijos y apibrėžkime naują ieškomąją funkciją $u = y/x$. Tada funkcijos u atžvilgiu gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais
$$\frac{2u}{1+u^2}\,du = -\frac{dx}{x},$$
kurios bendrasis integralas
$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + \ln|C| \quad \Longleftrightarrow \quad x(1+u^2) = C.$$
Pakeitę paskutinėje lygtyje u į y/x gausime nagrinėjamos homogeninės lygties bendrąjį integralą
$$x^2 + y^2 = Cx,$$
kuris apibrėžia apskritimą su centru taške $(C/2, 0)$ ir spinduliu $|C|/2$ šeimą.

2. Rasime homogeninės lygties
$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$
bendrąjį integralą. Vietoje ieškomosios funkcijos y apibrėžkime naują ieškomąją funkciją $u = y/x$. Tada $y = ux$, $dy = x\,du + u\,dx$ ir pastaroji lygtis, kai $x \neq 0$, susiveda į lygtį su atskiriamais kintamaisiais
$$x^2\,du = x\sqrt{1+u^2}\,dx \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$
Jos bendrąjį integralą
$$\ln|x| = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + \ln|C|$$
galima perrašyti taip:
$$\frac{x}{C} = u + \sqrt{1+u^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{C}{x} = -u + \sqrt{1+u^2}.$$
Atėmę iš pirmosios lygties antąją randame
$$\frac{x}{C} - \frac{C}{x} = 2u \;\Rightarrow\; x^2 - C^2 = 2Cy.$$
Taigi nagrinėjamos lygties integralinės kreivės yra parabolių šeima. Kai $C = 0$ turime atskirąjį sprendinį $x = 0$.

Kai kurias pirmos eilės diferencialines lygtis galima suvesti į homogeninę lygtį. Pavyzdžiui, lygtis

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+c}{mx+ny+d}\Big), \quad a,b,c,m,n,d \in \mathbb{R},$$

susiveda į homogeninę lygtį

$$v' = f\Big(\frac{au+bv}{mu+nv}\Big), \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Reikia tik koordinačių pradžią perkelti į tiesių

$$ax+by+c=0, \quad mx+ny+d=0$$

susikirtimo tašką (x_0, y_0), t.y. atlikti keitinį

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0.$$

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$$

bendrąjį integralą. Tiesių

$$x+2y+1=0, \quad 2x+y-1=0$$

susikirtimo taškas $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Tegu $u = x-1, v = y+1$. Tada nagrinėjama lygtis susiveda į homogeninę lygtį

$$v' = \frac{u+2v}{2u+v}, \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Jos bendrasis integralas

$$(v-u)^3 = C(v+u).$$

Grįžę prie senų kintamųjų x ir y, gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą

$$(y-x+2)^3 = C(x+y).$$

Sakysime, funkcija f yra *kvazihomogeninė* (su svoriais α ir β), jeigu

$$f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x,y), \quad \forall \lambda > 0.$$

Sakysime, pirmosios eilės diferencialinė lygtis

$$y' = f(x,y)$$

yra *kvazihomogeninė* , jeigu funkcija f yra kvazihomogeninė. Kvazihomogeninė lygtis keitiniu $y = z^{\beta/\alpha}$ susiveda į homogeninę, o keitiniu $y = ux^{\beta/\alpha}$ – į lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

P a v y z d y s. Išspręsime lygtį

$$y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}.$$

Lygties dešinė pusė tenkins sąlygą

$$\frac{4\lambda^{6\alpha}x^6 - \lambda^{4\beta}y^4}{2\lambda^{4\alpha}x^4\lambda^{\beta}y} = \lambda^{\beta-\alpha}\frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y},$$

jeigu $6\alpha - 4\beta = 0$ ir $3\beta - 4\alpha = \beta - \alpha$, t.y., kai $2\beta = 3\alpha$. Taigi nagrinėjama lygtis yra kvazihomogeninė su svoriais α ir β, jeigu $2\beta = 3\alpha$. Keitiniu $y = z^{3/2}$ ji susiveda į homogeninę lygtį

$$z' = \frac{4x^6 - z^6}{3x^4 z^2}.$$

Apibrėžkime naują nežinomą funkciją $u = z/x$. Tada funkcijos u atžvilgiu gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{3u^2\,du}{4 - 3u^3 - u^6} = \frac{dx}{x}.$$

Jos bendrąjį integralą galima užrašyti taip:

$$\frac{u^3 - 1}{u^3 + 4}x^5 = C.$$

Grįžę prie senų kintamųjų x ir y gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą

$$\frac{y^2 - x^3}{y^2 + 4x^3}x^5 = C.$$

2.6 TIESINĖS PIRMOS EILĖS LYGTYS

Nagrinėsime tiesinę pirmos eilės lygtį

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2.37}$$

Šios lygties bendrąjį sprendinį rasime dviem skirtingais būdais. Iš pradžių jo ieškosime konstantų varijavimo metodu. Atmetę (2.37) lygtyje narį $f(x)$, gausime tiesinę homogeninę lygtį

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2.38}$$

Tai yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Perrašysime ją taip:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

Suintegravę šią lygtį gausime homogeninės lygties bendrajį sprendinį

$$\ln|y(x)| = -\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds + \ln|C| \;\Rightarrow\; y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}, \quad C \neq 0.$$

Akivaizdu, kad atskirasis sprendinys $y(x) = 0$, kurį mes praradome dalindami iš y, įeina į gautą formulę kai $C = 0$.

Homogeninės lygties sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.39}$$

patogu užrašyti taip:

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}. \tag{2.40}$$

Remiantis šios formulės išvedimu galime tvirtinti, kad (2.38) lygties sprendinys yra vienintelis, jeigu tik jis egzistuoja. Norint įrodyti sprendinio egzistavimą pakanka pareikalauti tokio funkcijos p glodumo, kad funkcija y, apibrėžta (2.40) formule, tenkintų visas diferencialinės lygties sprendinio apibrėžimo sąlygas. Akivaidu, kad funkcija y tenkins šias sąlygas, jeigu funkcija p bus tolydi.

Tegu y_1 ir y_2 yra kokie nors du (2.37) lygties sprendiniai. Tada jų skirtumas $y = y_1 - y_2$ yra (2.38) lygties sprendinys. Todėl bendrasis (2.37) lygties sprendinys yra lygus kokio nors atskiro šios lygties ir bendrojo (2.38) homogeninės lygties sprendinių sumai. Rasime atskirąjį (2.37) lygties sprendinį.

Konstantų varijavimo metodo esmė yra ta, kad rastame tiesinės homogeninės lygties sprendinyje konstantą C pakeičiame nežinoma funkciją $C(x)$ ir atskirajį nehomogeninės lygties sprendinį ieškome pavidalu

$$y_a = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (2.37), gausime lygtį

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \cdot (-p(x)) +$$

$$p(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} = f(x).$$

Suprastinę šioje lygtyje vienodus narius matome, kad funkcijos $C(x)$ atžvilgiu tai yra paprastoji pirmos eilės diferencialinė lygtis, kurią galima užrašyti taip:

$$C'(x) = f(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Šios lygties sprendinys

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt + C_1.$$

Atmetę čia kostantą C_1 randame atskirąjį (2.37) lygties sprendinį

$$y_a(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt.$$

Pridėję prie jo (2.38) homogeninės lygties bendrąjį sprendinį, gausime (2.37) nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt \tag{2.41}$$

Pareikalausime, kad taip apibrėžtas sprendinys tenkinantų (2.39) pradinę sąlygą. Tada laisvoji konstanta $C = y_0$ ir ieškomas (2.37),(2.39) Koši uždavinio sprendinys

$$y(x) = y_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(s)e^{\int\limits_{x_0}^{s} p(t)\,dt}\,ds. \tag{2.42}$$

Akivaizdu, kad ši formulė apibrėžia vienintelį sprendinį, jeigu tik jis egzistuoja. Tai tiesiogiai išplaukia iš jos išvedimo. Norint įrodyti sprendinio egzistavimą pakanka pareikalauti tokio funkcijų p ir f glodumo, kad funkcija y, apibrėžta (2.42) formule, tenkintų visas diferencialinės lygties sprendinio apibrėžimo sąlygas. Šios sąlygos bus patenkintos, jeigu pareikalausime, kad funkcijos p ir f yra tolydžios.

P a v y z d y s. Konstantų varijavimo metodu rasime tiesinės nehomogeninės lygties

$$y' + 2xy = 2x$$

bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinkančios tiesinės homogeninės lygties

$$y' + 2xy = 0 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

bendrasis sprendinys

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Atskirojo nehomogeninės lygties sprendinio ieškome pavidalu

$$y_a = C(x)e^{-x^2}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į nagrinėjamą lygtį, ieškomai funkcijai C gausime lygtį

$$C'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Šios lygties sprendinys

$$C(x) = \int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C_1.$$

Atmetę čia konstantą C_1 randame atskirąjį nagrinėjamos nehomogeninės lygties sprendinį

$$y = e^{x^2} \cdot e^{-x^2} = 1.$$

Taigi, bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys

$$y = Ce^{-x^2} + 1.$$

Dabar rasime (2.37) lygties bendrąjį sprendinį *Bernulio metodu*. Sprendinio ieškosime pavidalu $y = uv$, čia u ir v ieškomos kintamojo x funkcijos ir viena iš jų, pavyzdžiui v, nelygi nuliui. Įstatę taip apibrėžtos funkcijos y išraišką į (2.37) lygtį, gausime

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x).$$

Sugrupavę narius šią lygtį perrašome taip:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \tag{2.43}$$

Reikalaujame, kad reiškinys skliaustuose būtų lygus nuliui. Tada funkcijai v gauname tiesinę homogeninę pirmos eilės lygtį

$$v' + p(x)v = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$v(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Paėmę šioje formulėje $C = 1$, gausime šios homogeninės lygties atskirąjį sprendinį

$$v(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (2.43) lygtį, funkcijai u gausime pirmos eilės diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisiais, kurią galima užrašyti pavidalu

$$u'(x) = f(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Integruodami šią lygtį randame

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\,dt + C.$$

Taigi bendrąjį (2.37) lygties sprendinį galima užrašyti taip:

$$y(x) = u(x)v(x) = \Big(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt + C\Big)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Akivaizdu, kad Bernulio metodu rastas sprendinys sutampa su konstantų varijavimo metodu rastu sprendiniu (žr. (2.41) formule).

P a v y z d y s. Bernulio metodu rasime tiesinės nehomogeninė lygties

$$y' - y = x$$

bendrąjį sprendinį. Tegu $y = uv$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į lygtį, gausime

$$u'v + uv' - uv = x \Longleftrightarrow u'v + u(v' - v) = x.$$

Reiškinį skliaustuose prilyginę nuliui gausime lygtį $v' - v = 0$. Šios lygties atskirasis sprendinys $v = e^x$. Tada funkcija u turi tenkinti lygtį

$$u' = xe^{-x} \Longleftrightarrow u = \int xe^{-x}\,dx$$

Integruodami pastarąjį integralą dalimis, gauname

$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Taigi bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys

$$y = uv = (-xe^{-x} - e^{-x} + C)e^x = Ce^x - x - 1.$$

Tegu y_1, y_2 yra kokie nors du (2.37) lygties atskirieji sprendiniai. Tada bendrasis šios lygties sprendinys gali būti apibrėžtas bet kuria iš formulių:

$$y = y_1 + C_1 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}, \quad y = y_2 + C_2 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Eliminavę iš jų reškinį $e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$ randame

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{C_1}{C_2} := C. \tag{2.44}$$

Taigi, žinant kokius nors du (2.37) lygties atskiruosius sprendinius, visada galima rasti jos bendrąjį sprendinį.

P a s t a b a. Pirmosios eilės tiesinę diferencialinę lygtį galima suintegruoti ir integruojamojo daugiklio metodu (žr. 2.8 skyrelį). Iš tikrųjų, padauginę abi (2.37) lygties puses iš eksponentės $e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$ pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$\Big(y(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\Big)' = f(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

Integruodami abi šios lygties puses kintamuojo x atžvilgiu nuo x_0 iki x gausime formulę

$$y(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t) e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\, dt + C,$$

kuri (padalinus iš tos pačios eksponentės) sutampa su (2.41) formule.

Kai kurių netiesinių lygčių sprendimą galima suvesti į tiesinių lygčių sprendimą. Netiesinė lygtis

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \quad \text{ir} \quad \alpha \neq 1 \tag{2.45}$$

yra vadinama *Bernulio lygtimi*. Tarkime, $y \neq 0$. Padalinę abi lygties puses iš y^{α}, perrašysime ją taip:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{p(x)}{y^{\alpha-1}} = f(x) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\Big) + \frac{p(x)}{y^{\alpha-1}} = f(x).$$

Tegu $z = y^{1-\alpha}$ nauja nežinoma funkcija[1]. Tada Bernulio lygtis virsta tiesine lygtimi

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z(x) = f(x),$$

[1]Atkreipsime dėmesį į tai kad Bernulio lygtį kartais paprasčiau spręsti Bernulio metodu.

kurios bendrasis sprendinys

$$z(x) = e^{(\alpha-1)\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\Big(C + (1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{(1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt\Big).$$

Kartu Bernulio lygties bendrasis sprendinys

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\Big(C + (1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{(1-\alpha)\int\limits_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Kai $\alpha \in (0,1)$ Bernulio lygtis turi ypatingą sprendinį $y = 0$. Kai $\alpha > 1$ sprendinys $y = 0$ nėra ypatingas. Jis gaunamas iš bendrojo sprendinio, kai $C = \infty$.

P a v y z d y s. Išspręskime Bernulio lygtį

$$y' + \frac{y}{x} = y^2\frac{\ln x}{x}. \tag{2.46}$$

Akivaizdu, kad $y = 0$ yra šios lygties atskirasis sprendinys. Tegu $y \neq 0$. Apibrėžkime naują nežinomą funkciją $z = y^{-1}$. Tada $y = z^{-1}$, $y' = -z'/z^2$ ir funkcijos z atžvilgiu gauname tiesinę lygtį

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$z = \ln x + 1 + Cx.$$

Taigi nagrinėjamos Bernulio lygties bendrasis sprendinys

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Artindami čia C į ∞, gausime atskirąjį sprendinį $y = 0$. Išspręsime (2.46) lygtį Bernulio metodu. Tegu $y = uv$. Tada naujos nežinomos funkcijos u ir v turi tenkinti lygtį

$$u'v + u(v' + v/x) = u^2v^2\frac{\ln x}{x}.$$

Prilyginę nuliui reiškinį skliaustuose gauname tiesinę homogeninę lygtį $v' + v/x = 0$, kurios atskirasis sprendinys $v = 1/x$. Kartu funkcijai u gauname lygtį

$$u'\frac{1}{x} = u^2\frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

su atskiriamais kintamaisiais. Integruodami ją randame

$$-1/u = -\int \ln x\,d\big(1/x\big) = -\ln x/x - 1/x - C.$$

Taigi
$$u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Tegu M, N ir P yra homogeninės to paties laipsnio funkcijos. Tada diferencialinė lygtis

$$M(x,y)(x\,dy - y\,dx) = N(x,y)\,dy + P(x,y)\,dx$$

keitiniu $u = y/x$ susiveda į Bernulio lygtį

$$\frac{dx}{du} + x\mu(u) = q(u)x^2.$$

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį

$$xy(x\,dy - y\,dx) = y^2\,dy + xy\,dx.$$

Pažymėję $y/x = u$ gauname Bernulio lygtį

$$\frac{dx}{u} + \frac{u}{1+u^2}x = x^2\frac{1}{1+u^2}.$$

Šią lygtį išspręsime Bernulio metodu. Tegu $x = qp$. Čia q ir p yra ieškomos kintamojo u funkcijos. Tada $x' = q'p + qp'$ ir pastarąją lygtį galima perrašyti taip
$$q'p + q\Big(p' + \frac{u}{1+u^2}p\Big) = \frac{q^2p^2}{1+u^2}.$$
Prilyginę reiškinį skliaustuose nuliui, gausime lygtį

$$p' + \frac{u}{1+u^2}p = 0.$$

Šios lygties atskirasis sprendinys

$$p = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Tada funkcijai q gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{q'}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{q^2}{(1+u^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dq}{q^2} = \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Suintegravę abi šios lygties puses gauname bendrąjį integralą

$$-\frac{1}{q} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + C.$$

Iš šios lygties randame
$$q = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u + C\sqrt{1+u^2}}.$$

Taigi
$$x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\Big(-\frac{\sqrt{1+u^2}}{u+C\sqrt{1+u^2}}\Big) = \frac{-1}{u+C\sqrt{1+u^2}}.$$
Grįžę prie senų kintamųjų x ir y gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą
$$y + C\sqrt{y^2+x^2} = -1.$$

P a v y z d y s. Išspręskime lygtį
$$x^2y' + yx + x = 2(y+1)^2.$$
Keitiniu $y+1=u$ pastaroji lygtis susiveda į lygtį
$$x^2u' + xu = 2u^2 \;\Leftrightarrow\; \Big(\frac{u}{x}\Big)' + \frac{2}{x}\cdot\frac{u}{x} = \frac{2}{x}\Big(\frac{u}{x}\Big)^2.$$
Pažymėję $u/x = w$ gauname Bernulio lygtį[1]
$$w' + \frac{2}{x}w = \frac{2}{x}w^2.$$
Pastaroji lygtis keitiniu $r = 1/w$ susiveda į tiesinę lygtį
$$-r' + \frac{2}{x}r = \frac{2}{x}.$$
Ją atitinkančios homogeninės lygties bendrasis sprendinys $r_h = Cx^2$, o atskirasis sprendinys $r_a = 1$. Todėl gautos tiesinės lygties bendrasis sprendinys $r = 1 + Cx^2$. Grįžę prie kintamųjų x, y randame nagrinėjamos lygties bendrąjį sprendinį
$$y = \frac{x}{1+Cx^2} - 1.$$

Netiesinė lygtis
$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x). \tag{2.47}$$
yra vadinama *Rikačio lygtimi*. Bendruoju atveju ji neintegruojama kvadratūromis[2]. Tačiau jeigu žinome kokį nors atskirą jos sprendinį $y = y_1(x)$, tai apibrėžę naują nežinomą funkciją $z = y - y_1$ gausime Bernulio lygtį
$$z'(x) + [p(x) + 2q(x)y_1]z(x) + q(x)z^2(x) = 0.$$
Pastaroji lygtis keitiniu $z = 1/u$ susiveda į tiesinę lygtį.

Tegu y, y_2, y_3 – trys skirtingi Rikačio lygties sprendiniai, o y – bendrasis sprendinys. Tada
$$u = \frac{1}{y-y_1}, \quad u_1 = \frac{1}{y_2-y_1}, \quad u_2 = \frac{1}{y_3-y_1}$$

[1] Jeigu šioje lygtyje x laikyti priklausomu kintamuoju, o w – nepriklausomu, tai lygtis yra tiesinė. Tiksliau, tiesinė homgeninė lygtis.

[2] Sakysime, diferencialinė lygtis yra integruojama kvadratūromis, jeigu jos sprendinį galima išreikšti (nebūtinai tiesiogiai) elementariomis funkcijomis ir jų neapibrėžtiniais integralais naudojant baigtinį skaičių algebrinių operacijų.

yra tos pačios tiesinės lygties saprendiniai. Todėl (žr. (2.44) formulę)

$$\frac{u-u_1}{u_2-u_1}=C$$

arba

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}=C\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}.$$

Iš paskutinės formulės matome, kad Rikačio lygties bendrąjį sprendinį galima rasti, jeigu žinome kokius nors tris skirtingus jos sprendinius.

P a v y z d y s. Išspręskime Rikačio lygtį

$$y'=-y^2+2y\sin x+\cos x-\sin^2 x.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad funkcija $y_1(x)=\sin x$ yra šios lygties atskirasis sprendinys. Apibrėžkime naują nežinomą funkciją $z=y-\sin x$. Tada $y=z+\sin x$, $y'=z'+\cos x$ ir nagrinėjama lygtis susiveda į Bernulio lygtį

$$z'=-z^2.$$

Ši lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais ir jos bendrasis sprendinys

$$z=\frac{1}{x+C}.$$

Taigi nagrinėjamos Rikačio lygties bendrasis sprendinys

$$y=\frac{1}{x+C}+\sin x.$$

2.7 PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SIMETRINĖJE FORMOJE

Nagrinėjant lygtį

$$y' = f(x,y); \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad (x,y) \in G,$$

kartais ją patogu perrašyti taip:

$$x' = g(x,y); \quad x' = \frac{dx}{dy}, \quad g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}.$$

Pastarasias dvi lygtis galima apjungti į vieną, neišskiriant nei vieno iš kintamųjų. Tiksliau pirmos eilės diferencialinę lygtį, išreikštą išvestinės atžvilgiu, galima užrašyti simetrinėje formoje

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0; \tag{2.48}$$

čia M ir N – tolydžios srityje G funkcijos.

Jeigu bent vienas iš koeficientų M arba N taške $(x_0, y_0) \in G$ nelygus nuliui, tai (2.48) lygtį, pakankamai mažoje šio taško aplinkoje, galima suvesti į lygtį išreikštą išvestinės atžvilgiu. Jeigu kokiame nors taške $(x_0, y_0) \in G$ abu koeficientai M ir N lygūs nuliui, t.y.

$$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0,$$

tai sakysime, kad taškas (x_0, y_0) yra *ypatingas taškas*. Taigi nagrinėjant diferencialines lygtis simetrinėje formoje nauja yra tai, kad abu koeficientai M ir N gali būti lygūs nuliui. Atkreipsime dėmesį į tai, kad ankstesnė teorija neatsako į klausimus ar egzistuoja integralinė kreivė einanti per ypatingą tašką, kiek tokių integralinių kreivių yra, kaip elgiasi integralinės kreivės arti ypatingo taško. Be to, (2.48) lygties atveju integralinė kreivė gali turėti liestinę lygiagrečią bet kuriai iš koordinačių ašių ir ji ne būtinai eina nuo vieno srities krašto iki kito (pavyzdžiui ji gali būti uždara) ir t.t..

Ypatingų taškų pavyzdžiai.

1. Lygties

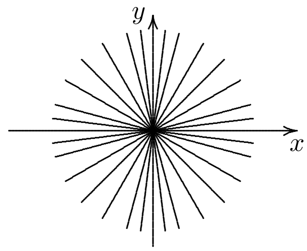
   $$x\,dy - y\,dx = 0$$

   integralinės kreivės yra spinduliai $y = kx$ išeinantis iš koordinačių pradžios (žr. 2.12 pav.). Taškas $(0,0)$ yra šios lygties ypatingas taškas. Tokio tipo taškas yra vadinamas *žvaigždiniu mazgu*.

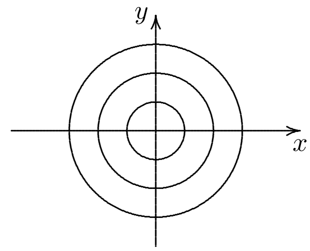
2. Lygties

   $$y\,dy + x\,dx = 0$$

integralinės kreivės yra apskritimų šeima $x^2 + y^2 = C^2$ su centru koordinačių pradžioje (žr. 2.13 pav.).



2.12 pav.



2.13 pav.

Taškas $(0, 0)$ yra šios lygties ypatingas taškas. Tokio tipo taškas yra vadinamas *centru*.

Tegu taškas $(x_0, y_0) \in G$ nėra ypatingas taškas. Tada egzistuoja tokia jo aplinka, kurioje arba $M(x, y) \neq 0$ arba $N(x, y) \neq 0$. Šioje aplinkoje (2.48) lygtis yra ekvivalenti vienai iš lygčių

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \qquad x' = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}. \tag{2.49}$$

Todėl (2.48) lygties sprendinį galima apibrėžti kaip vienos iš (2.49) lygčių sprendinį.

Diferencialinės lygties simetrinėje formoje atveju Koši uždavinys formuluojamas taip pat kaip nesimetrinės lygties atveju. Reikia rasti (2.48) lygties integralinę kreivę, kuri eitų per tašką (x_0, y_0). Jeigu taškas (x_0, y_0) nėra ypatingas taškas ir funkcija $y = \varphi(x)$ (arba $x = \psi(y)$) yra Koši uždavinio

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad y(x_0) = y_0 \,(\text{arba } x(y_0) = x_0)$$

sprendinys, tai ji yra vienos iš (2.49) lygčių sprendinys. Todėl nagrinėjant (2.48) lygtį išlieka teisingi visi ankstesnių skyrelių apibrėžimai ir teiginiai, turintis lokalų charakterį.

Srityje G (2.48) lygtis apibrėžia krypčių lauką. Tiksliau šį lauką apibrėžia viena iš lygčių

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \quad x' = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}.$$

Todėl krypčių laukas yra apibrėžtas kiekviename neypatingame srities G taške. Į šį krypčių lauką įeina ir kryptys lygiagrečios koordinačių ašims. Priminsime, kad integralinė kreivė tai sprendinio grafikas. Todėl kiekviena glodi kreivė gulinti srityje G yra integralinė kreivė, jeigu jos kiekviename taške liestinės kryptis sutampa su lauko kryptimi. Bet kurios dvi integralinės kreivės gulinčios vienaties srityje ir turinčios bendrą tašką, sutampa bendroje jų apibrėžimo srityje. Be to, kiekviena glodi kreivė, kurios visi taškai yra ypatingi yra integralinė kreivė.

Reikalavimas, kad integralinė kreivė būtų apibrėžta lygtimi $y = \varphi(x)$ arba lygtimi $x = \psi(y)$ yra susijęs tik su sprendinio apibrėžimu. Bendru atveju integralinę kreivę galima apibrėžti kaip bet kokią glodžią kreivę, kurios liestinės kryptis kiekviename taške sutampa su lauko kryptimi. Kiekvieno savo taško aplinkoje tokia kreivė yra funkcijos grafikas. Tačiau visoje srityje G ją ne visada galima apibrėžti kaip funkcijos, apibrėžtos išreikštine forma, grafiką. Dažnai ji yra apibrėžiama lygtimi $U(x,y)=0$.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu G yra (2.48) lygties vienaties sritis. Sakysime, funkcija $U \in \mathrm{C}(G)$ yra *leistina*, jeigu:

1. Lygtis
$$U(x,y)=U(x_0,y_0), \quad (x_0,y_0)\in G \tag{2.50}$$
turi vienintelį sprendinį $y=\varphi(x)$ (arba $x=\psi(y)$) apibrėžtą kokioje nors taško x_0 aplinkoje (taško y_0 aplinkoje).

2. $\varphi(x_0)=y_0$ (arba $\psi(y_0)=x_0$).

A p i b r ė ž i m a s. Leistina funkcija U yra vadinama (2.48) lygties *integralu* srityje G, jeigu $\forall(x_0,y_0)\in G$ neišreikštinė (2.50) lygtis apibrėžia (2.48) lygties sprendinį ir jo grafikas eina per tašką (x_0,y_0).

2.9 teorema. *Leistina funkcija U yra (2.48) lygties integralas srityje G tada ir tik tada, kai $U(x,\varphi(x))=const$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$, jeigu $y=\varphi(x)$ yra (2.48) lygties sprendinys intervale $\langle a,b\rangle$ arba $U(\psi(y),y)=const$, $\forall y\in\langle\alpha,\beta\rangle$, jeigu $x=\psi(y)$ yra (2.48) lygties sprendinys intervale $\langle\alpha,\beta\rangle$.*

$\triangleleft$ Tegu U yra (2.48) lygties integralas srityje G ir $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ yra šios lygties sprendinys (atvejis, kai sprendinys apibrėžiamas lygtimi $x=\psi(y)$, nagrinėjamas analogiškai). Kadangi sritis G yra (2.48) lygties vienaties sritis, tai pagal integralo apibrėžimą funkcija $y=\varphi(x)$ pakankamai mažoje kiekvieno taško $x_0\in\langle a,b\rangle$ aplinkoje sutampa su lygties

$$U(x,y)=U(x_0,\varphi(x_0))$$

sprendiniu. Todėl šioje aplinkoje $U(x,\varphi(x))\equiv U(x_0,\varphi(x_0))$. Taigi

$$U(x,\varphi(x))=const$$

kiekvieno taško $x_0\in\langle a,b\rangle$ pakankamai mažoje aplinkoje. Kadangi tašką $x_0\in\langle a,b\rangle$ pasirinkome laisvai, tai $U(x,\varphi(x))=const$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$.

Tegu $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ yra (2.48) lygties sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $\varphi(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in G$ (atvejis, kai $x=\psi(y)$ yra šios lygties sprendinys, nagrinėjamas analogiškai) ir $U(x,\varphi(x))=U(x_0,y_0)$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$. Tada funkcija $y=\varphi(x)$ yra (2.50) lygties sprendinys. Tačiau ši lygtis turi vienintelį sprendinį. Todėl jis sutampa su $\varphi(x)$. Taigi funkcija $U(x,y)$ yra (2.48) lygties integralas srityje G. $\triangleright$

A p i b r ė ž i m a s. Jeigu funkcija $U(x,y)$ yra (2.48) lygties integralas srityje G, tai lygybė
$$U(x,y)=C;$$
čia C laisva konstanta, vadinama (2.48) lygties *bendruoju integralu* srityje G.

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$$

bendrąjį integralą. Akivaizdu, kad $y = 0$ yra šios lygties sprendinys. Tegu $y \neq 0$ ir $x/y = u$. Tada $x = uy$, $dx = u\,dy + y\,du$ ir naujos ieškomos funkcijos u atžvilgiu gauname lygtį

$$y^2(1+u^2)\,dy + 2y^3u\,du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{2u\,du}{1+u^2} = 0$$

su atskiriamais kintamaisiais. Suintegravę ją randame

$$\ln|y| + \ln(1+u^2) = \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

arba

$$\frac{y^2+x^2}{y} = C \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y - C/2)^2 = (C/2)^2. \tag{2.51}$$

Paskutinė lygtis apibrėžia nesikertančių apskritimų, su centru taške $(0, C/2)$ ir spinduliu $|C|/2$, šeimą. Todėl $\forall(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ lygtis

$$\frac{y^2+x^2}{y} = \frac{y_0^2+x_0^2}{y_0}$$

apibrėžia vienintelę integralinę kreivę. Kartu pirmoji iš (2.51) formulių apibrėžia nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Sprendinys $y = 0$ įeina į šią formulę, kai $C = \infty$.

Tegu U yra (2.48) lygties integralas srityje G. Tada šioje srityje

$$U_x(x,y)\,dx + U_y(x,y)\,dy = 0.$$

Sugretinę šią lygybę su (2.48) lygtimi matome, kad funkcija U yra (2.48) lygties integralas srityje G tada ir tik tada, kai koeficientai M ir N šioje srityje yra proporcingi funkcijos U dalinėms išvestinėms U_x ir U_y, t.y.

$$N(x,y)U_x(x,y) = M(x,y)U_y(x,y), \quad \forall(x,y) \in G.$$

Kiekvieno neypatingo srities G tašo (x_0, y_0) aplinkoje galima apibrėžti bendrąjį (2.48) lygties sprendinį, kaip vienos iš (2.49) lygčių bendrąjį sprendinį. Tegu $y = \varphi(x, C)$ yra pirmos iš (2.49) lygčių bedrasis sprendinys. Kadangi srityje G integralinės kreivės nesikerta, tai funkcija $\varphi(x, C)$ yra griežtai monotoninė, kintamojo C atžvilgiu, funkcija. Todel lygtis $y = \varphi(x, C)$ apibrėžia funkciją $C = U(x,y)$, kuri yra griežtai monotoninė funkcija kintamojo y atžvilgiu. Pagal savo apibrėžimą funkcija U yra leistina. Be to, kiekvienam (2.48) lygties sprendiniui $y = \varphi(x)$, kurio grafikas guli minėtoje neypatingo taško aplinkoje, $U(x, \varphi(x)) = const$. Todėl šioje aplinkoje U yra (2.48) lygties integralas. Taigi bendrasis integralas $U(x,y) = C$ gaunamas iš bendrojo sprendinio $y = \varphi(x, C)$ išsprendus šią lygtį C atžvilgiu. Galima įrodyti ir atvirkščią teiginį.

Tegu U_1 yra koks nors kitas (2.48) lygties integralas taško (x_0, y_0) aplinkoje. Pagal integralo apibrėžimą

$$U(x, \varphi(x, C)) = C, \quad U_1(x, \varphi(x, C)) := \Phi(C)$$

pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje. Todėl galime tvirtinti, kad pakankamai mažoje taško (x_0, y_0) aplinkoje

$$U_1(x, y) = \Phi(U(x, y))$$

Antra vertus, jeigu Φ yra bet kokia funkcija ir $\Phi(U)$ yra leistina funkcija, tai $U_1 = \Phi(U)$ taip pat yra integralas, nes išilgai sprendinio jis yra pastovus kartu su integralu U. Taigi įrodėme tokį teiginį.

2.10 teorema. *Tegu G yra vienaties sritis ir $(x_0, y_0) \in G$. Tada pakankamai mažoje taško (x_0, y_0) aplinkoje egzistuoja (2.48) diferncialinės lygties integralas U. Be to, jeigu $\Phi(U)$ yra leistina funkcija, tai*

$$U_1 = \Phi(U)$$

taip pat yra (2.48) lygties integralas ir pastaroji formulė apibrėžia visus šios lygties integralus nagrinėjamo taško (x_0, y_0) pakankamai mažoje aplinkoje.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. $x\,dy - y\,dx = 0, \quad G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Šios lygties bendrasis sprendinys $y = Cx$. Išsprendę pastarąją lygtį C atžvilgiu, gausime bendrąjį integralą $y/x = C$.

2. $y\,dy + x\,dx = 0, \quad G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Suintegravę šią lygtį, gausime bendrąjį integralą $y^2 + x^2 = C$. Išsprendę pastarąją lygtį y atžvilgiu, gausime bendrąjį sprendinį $y = \sqrt{C - x^2}$, $0 < C < \infty$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad sprendinio apibrėžimo sritis priklauso nuo C. Tiksliau sprendinys yra apibrėžtas intervale $(0, \sqrt{C})$.

2.8 PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTIS

Lygtis

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.52}$$

vadinama *pilnųjų diferencialų lygtimi* srityje G, jeigu šioje srityje egzistuoja diferencijuojama funkcija $U = U(x,y)$ tokia, kad

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dU(x,y). \tag{2.53}$$

Pilnųjų diferencialų lygtį galima perrašyti taip:

$$dU(x,y) = 0.$$

Diferencijuojama funkcija $y = \varphi(x), x \in \langle a,b\rangle$ $(x = \psi(y), y \in \langle \alpha,\beta\rangle)$ yra šios lygties sprendinys tada ir tik tada, kai

$$dU(x,\varphi(x)) \equiv 0,\ \forall x \in \langle a,b\rangle \quad \bigl(dU(\psi(y),y) \equiv 0,\ \forall y \in \langle \alpha,\beta\rangle\bigr),$$

t.y., kai

$$U(x,\varphi(x)) \equiv C \quad (U(\psi(y),y) \equiv C).$$

Kadangi $U_x = M$, $U_y = N$, tai tuose srities G taškuose, kuriuose

$$M^2(x,y) + N^2(x,y) > 0,$$

funkcija U yra leistina, t.y. lygtis

$$U(x,y) = U(x_0,y_0)$$

turi vienintelį sprendinį (žr. teorema apie neišreikštinę funkciją) $y = \varphi(x)$ arba $x = \psi(y)$, apibrėžta kokioje nors taško x_0 arba taško y_0 aplinkoje ir jį atitinkanti integralinė kreivė eina per tašką (x_0,y_0). Taigi funkcija U yra (2.52) lygties integralas.

Akivaizdu, kad ne visuomet egzistuoja diferencijuojama funkcija U tokia, kad yra teisinga (2.53) formulė. Matematinėje analizėje įrodoma teorema (žr., pavyzdžiui [6]).

2.11 teorema. *Tarkime, funkcijos M, N ir jų dalinės išvestinės M_y, N_x yra tolydžios srityje G. Tada*

1. *Jeigu reiškinys*
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$
srityje G yra pilnas diferencialas, tai šioje srityje
$$M_y(x,y) = N_x(x,y). \tag{2.54}$$

2. *Jeigu srityje G funkcijos M ir N tenkina (2.54) salyga ir sritis G yra vienajungė, tai egzistuoja funkcija $U \in \mathrm{C}^1(G)$ tokia, kad*
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dU(x,y).$$

3. *Funkcija*

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy; \tag{2.55}$$

čia integralas dešinėje – antros rūšies kreivinis integralas, (x_0, y_0) – bet koks taškas srityje G, Be to, integralo reikšmė nepriklauso nuo integravimo kelio, t.y. nuo glodžios kreivės, jungiančios taškus (x_0, y_0) ir (x, y).

P a s t a b a. Jeigu (2.55) formulėje taškus (x_0, y_0) ir (x, y) galima sujungti laužte su viršūnėmis taškuose (x_0, y_0), (x_0, y), (x, y), tai

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,s)\,ds.$$

Jeigu sritis G yra iškila, tai taškus (x_0, y_0) ir (x, y) galima sujungti atkarpa. Šiuo atveju

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \big\{M(s, k(s-x_0)+y_0) + kN(s, k(s-x_0)+y_0)\big\}\,ds;$$

čia

$$k = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \quad x \neq x_0.$$

P a v y z d y s. Nagrinėsime lygtį

$$y\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\,dx + \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\,dy = 0.$$

Jos koeficientai $M = y(1 - 1/x^2)$ ir $N = (x + 1/x)$ tenkina (2.54) sąlygą. Todėl pastaroji lygtis yra pilnųjų diferncialų lygtis

$$dU(x,y) = 0,$$

o jos integralą U galima rasti (2.55) formulės pagalba. Jeigu taškus (x_0, y_0) ir (x, y) sujungsime laužte su viršūnėmis taškuose (x_0, y_0), (x_0, y), (x, y), tai integralas

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} y\Big(1 - \frac{1}{s^2}\Big)\,ds + \int\limits_{y_0}^{y} \Big(x_0 + \frac{1}{x_0}\Big)\,ds = xy + \frac{y}{x} - x_0y_0 - \frac{y_0}{x_0}.$$

Jeigu taškus (x_0, y_0) ir (x, y) sujungsime atkarpa, tai

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} (y_0 + k(s-x_0))\Big(1 - \frac{1}{s^2}\Big) + k\Big(s + \frac{1}{s}\Big)\,ds = xy + \frac{y}{x} - x_0y_0 - \frac{y_0}{x_0}.$$

Taigi, abiem atvejais gavome tą patį integralą. Kadangi integralas yra apibrėžiamas konstantos tikslumu, tai

$$xy + \frac{y}{x} = C$$

yra nagrinėjamos lygtis bendrasis integralas, o lygtis

$$xy + \frac{y}{x} = x_0 y_0 + \frac{y_0}{x_0}$$

apibrėžia integralinę kreivę, kuri eina per tašką (x_0, y_0).

Jeigu 2.11 teoremoje (2.54) salyga nėra patenkinta, tai reiškinys

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

nėra pilnas diferencialas. Tačiau kartais galima surasti funkcija $\mu = \mu(x,y)$ tokią, kad lygtis

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.56}$$

yra pilnųjų diferencialų lygtis. Tokia funkcija, jeigu ji egzistuoja, vadinama *integruojamuoju daugikliu*.

Remiantis 2.11 teorema galime tvirtinti, kad (2.56) lygtis yra pilnųjų diferencialų lygtis, jeigu yra patenkinta salyga

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x.$$

Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y). \tag{2.57}$$

Bendru atveju šios diferencialinės pirmos eilės dalinių išvestinių lygties sprendimas nėra lengvesnis už (2.52) lygties sprendimą. Tačiau kartais jos atskirą sprendinį galima surasti gana lengvai. Pavyzdžiui, jeigu egzistuoja diferencijuojama funkcija $\omega = \omega(x,y)$ tokia, kad

$$\frac{N_x - M_y}{M\omega_y - N\omega_x} = \psi(\omega),$$

kur ψ –tolydi funkcija, tai funkcija

$$\mu = \mu(\omega) = e^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$$

yra integruojamasis daugiklis.

Iš tikrųjų, funkcijos μ dalinės išvestinės

$$\mu_y = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \omega_y, \quad \mu_x = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \omega_x.$$

Todėl (2.57) sąlygą galima perrašyti taip:

$$\frac{d\mu}{d\omega}\big(\omega_y M - \omega_x N\big) = \mu\big(N_x - M_y\big) \Longleftrightarrow \frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\mu.$$

Pastarosios lygties bendrasis sprendinys

$$\mu(\omega) = Ce^{\int \psi(\omega)\, d\omega}.$$

Paėmę čia $C = 1$ randame integruojamą daugiklį.

P a v y z d y s. Išspręsime lygtį

$$(x - y)\, dx + (x + y)\, dy = 0.$$

Nagrinėjamu atveju $M_y = -1$, $N_x = 1$. Todėl

$$\frac{N_x - M_y}{M\omega_u - N\omega_x} = \frac{2}{(x - y)\omega_y - (x + y)\omega_x} := \psi(\omega).$$

Paėmę $\omega = x^2 + y^2$, gausime

$$\psi(\omega) = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\omega}.$$

Todėl

$$\mu(\omega) = e^{-\int \frac{d\omega}{\omega}} = e^{-\ln \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Padauginę nagrinėjamą lygtį iš šio daugiklio, perrašysime ją taip:

$$\frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Kadangi

$$x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2}\, d(x^2 + y^2), \quad x\, dy - y\, dx = x^2\, d\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

tai pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d(y/x)}{1 + \big(y/x\big)^2} = 0.$$

Gauta lygtis yra pilnųjų diferencialų lygtis. Jos kairioji pusė yra funkcijos

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

diferncialas. Todėl

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

yra nagrinėjamos lygties bendrasis integralas. Polinėse koordinatėse

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

pastarąją formule galima perrašyti taip:

$$r = C_1 e^{-\varphi},\ C_1 = e^C.$$

Taigi nagrinėjamos lygties integralinės kreivės yra spiralės.

Tarkime, (2.52) lygtis yra homogeninė, t.y. funkcijos M ir N yra homogeninės to paties laipsnio funkcijos. Tada galima įrodyti, kad integruojamasis daugiklis

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}.$$

Pavyzdžiui, ka tik išnagrinėta lygtis

$$(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$$

yra homogeninė. Todėl integruojamasis daugiklis

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Jeigu (2.52) lygtis yra homogeninė ir ją galima užrašyti pavidalu

$$y' = \varphi(y/x),$$

tai integruojamasis daugiklis

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x\varphi(y/x) - y}.$$

Tiesinei lygčiai (žr. 2.6 skyrelį)

$$y' + p(x)y = f(x)$$

integruojamasis daugiklis

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}.$$

2.9 PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS NEIŠREIKŠTOS IŠVESTINĖS ATŽVILGIU

Tegu $F \in \mathrm{C}(D)$, D – sritis erdvėje $\mathbb{R}^3$. Nagrinėsime pirmosios eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.58}$$

neišreikštą išvestinės atžvilgiu.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $y = \varphi(x)$ apibrėžta intervale $\langle a, b\rangle$ yra (2.58) lygties sprendinys, jeigu:

1. $\varphi \in \mathbf{C}^1\langle a, b\rangle$.
2. $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.
3. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Išskirsime kelis paprasčiausius atvejus.

1. Tarkime, funkcija F nepriklauso nuo kintamųjų x ir y. Tada (2.58) lygtį galima perrašyti taip:

$$F(y') = 0. \tag{2.59}$$

Tegu p^* yra reali lygties

$$F(p) = 0 \tag{2.60}$$

šaknis. Tada integruodami lygtį

$$y' = p^*,$$

gausime

$$y = p^* x + C.$$

Kadangi

$$\frac{y - C}{x} = p^*$$

yra (2.60) lygties šaknis, tai

$$F\Big(\frac{y - C}{x}\Big) = 0$$

yra (2.59) lygties bendrasis integralas.

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$y'^3 + y'^2 + y' - 3 = 0$$

bendrąjį integralą. Lygtis

$$p^3 + p^2 + p - 3 = 0$$

turi realią šaknį $p = 1$. Lygties $y' = 1$ sprendinys

$$y = x + c \Longleftrightarrow \frac{y - c}{x} = 1.$$

Taigi nagrinėjamos lygties bendrasis integralas

$$\Big(\frac{y - C}{x}\Big)^3 + \Big(\frac{y - C}{x}\Big)^2 + \frac{y - C}{x} - 3 = 0.$$

2. Tarkime, funkcija F nepriklauso nuo kintamojo y. Tada (2.58) lygtį galima perrašyti taip:

$$F(x, y') = 0. \tag{2.61}$$

Jeigu šią lygtį galima išspręsti kintamojo y' atžvilgiu, tai gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais. Priešingu atveju patogu įvesti parametrą. Lygtis $F(x, u) = 0$ kintamųjų x, u plokštumoje apibrėžia kreivę. Tarkime, $x = \varphi(p)$, $u = \psi(p)$ yra šios kreivės parametrinės lygtys, t.y.

$$F(\varphi(p), \psi(p)) \equiv 0.$$

Tada (2.61) lygtį galima pakeisti dviem lygtimis

$$x = \varphi(p), \quad y' = \psi(p).$$

Kadangi

$$dy = \psi(p)\, dx = \psi(p)\varphi'(p)\, dp,$$

tai parametrinės lygtys

$$x = \varphi(p), \quad y = \int \psi(p)\varphi'(p)\, dp + C$$

apibrėžia (2.61) lygties integralines kreives. Jeigu (2.61) lygtį galima išspręsti kintamojo x atžvilgiu: $x = \varphi(y')$, tai šią lygtį patogu pakeisti parametrinėmis lygtimis: $x = \varphi(p), y' = p$. Šiuo atveju parametrinės lygtys

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$$

apibrėžia (2.61) lygties integralines kreives.

P a v y z d y s. Lygtis

$$x = \big(y'\big)^3 - y' - 1$$

yra išspręsta x atžvilgiu. Todėl ją patogu pakeisti dviem parametrinėmis lygtimis

$$y' = p, \quad x = p^3 - p - 1.$$

Kadangi

$$dy = p\, dx = p(3p^2 - 1)\, dp,$$

tai
$$y = \int p(3p^2 - 1)\,dp = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C.$$
Todėl parametrinės lygtys
$$x = p^3 - p - 1, \quad y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C$$
apibrėžia nagrinėjamos lygties integralines kreives.

3. Tegu funkcija F nepriklauso nuo kintamojo x. Tada (2.58) lygtį galima perrašyti taip:
$$F(y, y') = 0. \tag{2.62}$$
Jeigu šią lygtį galima išspręsti kintamojo y' atžvilgiu, tai gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais. Priešingu atveju patogu įvesti parametrą. Lygtis $F(y, u) = 0$ kintamųjų y, u plokštumoje apibrėžia kreivę. Tarkime, $y = \varphi(p)$, $u = \psi(p)$ yra šios kreivės parametrinės lygtys. Tada (2.62) lygtį galima pakeisti dviem lygtimis
$$y = \varphi(p), \quad y' = \psi(p).$$
Kadangi
$$dx = \frac{1}{\psi(p)}\,dy = \frac{1}{\psi(p)}\varphi'(p)\,dp,$$
tai parametrinės lygtys
$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dp + C$$
apibrėžia (2.62) lygties integralines kreives. Jeigu (2.62) lygtį galima išspręsti kintamojo y atžvilgiu: $y = \varphi(y')$, tai šią lygtį patogu pakeisti parametrinėmis lygtimis: $y = \varphi(p), y' = p$. Šiuo atveju parametrinės lygtys
$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C$$
apibrėžia (2.62) lygties integralines kreives.

P a v y z d y s. Lygtį
$$y^{2/3} + \big(y'\big)^{2/3} = 1$$
galima pakeisti dviem parametrinėmis lygtimis
$$y = \cos^3 p, \ y' = \sin^3 p.$$
Kadangi
$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{3\cos^2 p}{\sin^3 p}\sin p\,dp,$$

tai
$$x = 3p + 3\operatorname{ctg} p + C.$$

Todėl parametrinės lygtys
$$y = \cos^3 p, \quad x = 3p + 3\operatorname{ctg} p + C$$
apibrėžia nagrinėjamos lygties integralines kreives.

Išnagrinėsime pirmos eilės diferencialinės lygties neišreikštos išvestinės atžvilgiu integravimo metodą, įvedant parametrą, bendru atveju. Lygtis
$$F(x, y, p) = 0 \tag{2.63}$$
kintamųjų x, y, p erdvėje apibrėžia paviršių $S \subset \mathbb{R}^3$. Tegu
$$x = x(u, v), y = y(u, v), p = p(u, v), (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.64}$$
yra šio paviršiaus parametrinės lygtys. Be to, tegu kiekvienam taškui $(u, v) \in \Omega$ abipus vienareikšmiškai priskiriamas taškas $(x, y, p) \in S$ ir yra teisinga tapatybė
$$F(x(u, v), y(u, v), p(u, v)) \equiv 0. \tag{2.65}$$

P a s t a b a. Jeigu (2.63) lygtį galima išspręsti kurio nors vieno kintamojo x, y, p atžvilgiu, tai parametrais u, v gali būti kiti du kintamieji.

Tarkime toliau, funkcijos $x, y \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, o funkcija $p \in \mathrm{C}(\Omega)$. Tada sąryšį $y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$ galima perrašyti taip:
$$(y_u - px_u)\,du + (y_v - px_v)\,dv = 0. \tag{2.66}$$

Ši lygtis yra paprastoji diferencialinė pirmos eilės lygtis simetrinėje formoje, kintamųjų u, v atžvilgiu. Tegu $v = v(u)$ (atvejis $u = u(v)$ nagrinėjamas analogiškai) yra šios lygties sprendinys ir funkcijos $x = x(u, v(u))$ išvestinė nelygi nuliui. Įrodysime, kad funkcija $y = \varphi(x)$ apibrėžta parametrinėmis lygtimis
$$x = x(u, v(u)), \quad y = y(u, v(u))$$
yra lygties
$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.67}$$
sprendinys. Kadangi funkcijos $x = x(u, v(u))$ išvestinė nelygi nuliui, tai egzistuoja atvirkštinė funkcija $u = u(x)$ ir
$$\varphi(x) = y(u(x), v(u(x))).$$

Pagal sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklę
$$\varphi'(x) = (y_u + y_v v_u)u_x = \frac{y_u + y_v v_u}{x_u + x_v v_u}.$$

Jeigu taškas $(u, v(u))$ yra (2.66) lygties ypatingas taškas, tai $y_u = px_u$, $y_v = px_v$ ir

$$\varphi'(x) = \frac{px_u + px_v v_u}{x_u + x_v v_u} = p(u, v(u))\Big|_{u=u(x)}.$$

Jeigu taškas $(u, v(u))$ nėra (2.66) lygties ypatingas taškas, tai

$$v_u = -\frac{y_u - px_u}{y_v - px_v}$$

ir

$$\varphi'(x) = \frac{y_u - y_v \frac{y_u - px_u}{y_v - px_v}}{x_u - x_v \frac{y_u - px_u}{y_v - px_v}} = p(u, v(u))\Big|_{u=u(x)}.$$

Abiem atvejais

$$\varphi'(x) = p(u, v(u))\Big|_{u=u(x)}.$$

ir iš (2.63) lygties išplaukia, kad funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.67) lygties sprendinys.

Teisingas ir atvirkščias teiginys. Jeigu funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.68) lygties sprendinys toks, kad $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in S$ ir nagrinėjamoje paviršiaus S parametrizacijoje jį atitinka glodi kreivė $v = v(u)$ (arba $u = u(v)$), tai funkcija $v = v(u)$ (arba $u = u(v)$) yra (2.66) lygties sprendinys. Įrodymą galima rasti [3] knygoje.

Jeigu fiksuojame kokį nors tašką $(u_0, v_0) \in \Omega$, tai tuo pačiu fiksuojame tašką $(x_0, y_0, y_0') \in S$. Todėl (2.67) lygties atveju Koši uždavinyje be pradinės sąlygos

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.68}$$

reikia papildomai reikalauti, kad ieškomo sprendinio išvestinė taške x_0 sutaptų su y_0', t.y tenkintų dar ir sąlygą

$$y'(x_0) = y_0'. \tag{2.69}$$

2.12 teorema. *Tegu $(x_0, y_0, y_0') \in S$ ir kokioje nors šio taško aplinkoje*

1. *Funkcija F ir jos dalinės išvestinės $F_y, F_{y'}$ yra tolydžios.*
2. $F_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$.

Tada galima nurodyti taško x_0 aplinką, kurioje egzistuoja vienintelis (2.67) lygties sprendinys, tenkinantis (2.68) ir (2.69) pradines sąlygas.

$\triangleleft$ Pagal neišreikštinės funkcijos teoremą (2.67) lygtį galima vienareikšmiškai išspręsti išvestinės y' atžvilgiu pakankamai mažoje taško (x_0, y_0) aplinkoje. Tiksliau šioje aplinkoje egzistuoja tolydi funkcija $f = f(x, y)$, tokią, kad

$$y' = f(x, y), \tag{2.70}$$

ir

$$f(x_0, y_0) = y_0'.$$

Be to, funkcija f turi tolydžią dalinę išvestinę f_y ir ją galima rasti pagal neišreikštinės funkcijos skaičiavimo taisyklę

$$f_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_{y'}(x,y,f(x,y))}.$$

Kadangi funkcija f taško (x_0, y_0) aplinkoje tenkina visas (2.1) ir (2.2) teoremų sąlygas, tai galima nurodyti taško x_0 aplinką, kurioje egzistuoja vienintelis (2.70) lygties sprendinys tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$. Taigi taško x_0 aplinkoje egzistuoja vienintelė (2.67) lygties integralinė kreivė, einanti per tašką (x_0, y_0) ir turinti šiame taške krypties koeficientą y_0'. $\triangleright$

P a v y z d ž i a i:

1. Lygtis

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

yra vadinama *Dalambero–Lagranžo* lygtimi. Tegu φ ir ψ yra diferencijuojamos funkcijos. Kadangi Dalambero–Lagranžo lygtis yra išreikšta ieškomos funkcijos y atžvilgiu, tai galima tokia lygties parametrizacija

$$x = x, \quad y' = p, \quad y = x\varphi(p) + \psi(p).$$

Ekvivalenti lygtis simetrinėje formoje

$$(\varphi(p) - p)\,dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp = 0. \tag{2.71}$$

Tai yra tiesinė kintamojo x ir jos išvestinės $\dfrac{dx}{dp}$ atžvlgiu lygtis. Jos bendrą sprendinį

$$x = x(p, C)$$

galima rasti konstantų varijavimo metodu. Prie pastarosios lygties prijungę lygtį

$$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

gausime parametrines lygtis, apibrėžiančias Dalambero–Lagranžo lygties integralines kreives.

Sprendžiant (2.71) lygtį teko dalinti iš dp. Todėl galėjome prarasti sprendinius, kuriems parametras p yra pastovus. Jeigu $p = const$, tai (2.71) lygtis yra teisinga tik tokioms parametrų p reikšmėms, kurios yra lygties

$$\varphi(p) = p$$

šaknys. Taigi, jeigu pastaroji lygtis turi realias šaknys $p = p^*$, tai prie jau rastų sprendinių reikia prijungti dar sprendinius

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad p = p^*,$$

t.y. tieses

$$y = x\varphi(p^*) + \psi(p^*).$$

2. Lygtis
$$y = xy' + \psi(y')$$
yra vadinama *Klero* lygtimi (ji sutampa su Dalambero – Lagranžo lygtimi, jeigu $\varphi(p) = p$). Tegu ψ yra diferencijuojama funkcija. Kadangi Klero lygtis yra išreikšta ieškomos funkcijos y atžvilgiu, tai galima tokia lygties parametrizacija
$$x = x, \quad y' = p, \quad y = xp + \psi(p).$$
Ekvivalenti lygtis simetrinėje formoje
$$[x + \psi'(p)]\, dp = 0.$$
Prilyginę pirmąjį daugiklį nuliui, gausime $x+\psi'(p) = 0$, o prilyginę antrąjį – $p = const$. Kiekvieną iš šių atvejų išnagrinėsime atskirai. Tegu $p = const$. Tada parametrinės lygtys
$$y = xp + \psi(p), \quad p = C.$$
apibrėžia Klero lygties integralines kreives. Eliminavus iš jų parametrą p, gausime
$$y = xC + \psi(C). \tag{2.72}$$
Šiuo atveju Klero lygties integralinės kreivės yra vienparametrinių tiesių šeima.

Tegu $x + \psi'(p) = 0$. Tada parametrinės lygtys
$$y = xp + \psi(p), \quad x = -\psi'(p). \tag{2.73}$$
apibrėžia integralinę kreivę. Įrodysime, kad ji yra ypatinga. Tiksliau įrodysime, kad ji yra (2.72) tiesių šeimos gaubiančioji[1]. Vienparametrinių (2.72) tiesių šeimos gaubiančioji yra apibrėžiama lygtimis
$$y - xC + \psi(C) = 0, \quad x + \psi'(C) = 0,$$
Akivaizdu, kad šios lygtys sutampa su (2.73) lygtimis, jeigu parametrą C pakeisime į p.

Tarkime, kokiame nors taške (x, y) yra patenkinta pirmoji 2.12 teoremos sąlyga, o antroji sąlyga yra nepatenkinta. Tada negalime tvirtinti, kad per šį tašką eina vienintelė (2.67) lygties integralinė kreivė, turinti šiame taške tą patį

[1] Vienparametrinių kreivių šeimos
$$\Phi(x, y, C) = 0$$
gaubiančioji yra apibrėžiama lygtimis
$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi_C(x, y, C) = 0.$$
Be gaubiančiųjų pastarosios lygtys gali apibrėžti ir kitokias kreives. Tačiau jeigu bent viena iš išvestinių Φ_x arba Φ_y yra nelygi nuliui ir tuose taškuose, kuriuose yra patenkintos šios lygtys, abi yra aprėžtos, tai minėtos lygtys apibrėžia tik gaubiančiąją.

krypties koeficientą. Per jį gali eiti dvi ir daugiau integralinių kreivių. Tada tokiame taške
$$F(x,y,y')=0 \text{ ir } F_{y'}(x,y,y')=0. \tag{2.74}$$
Eliminavę iš šių lygčių išvestinę y', gausime lygtį
$$\Phi(x,y)=0.$$
Pastaroji lygtis apibrėžia plokštumoje Oxy kreivę, kuri kartais yra vadinama p - diskriminantine kreive. Toks pavadinimas yra susijęs su tuo, kad (2.74) lygtyse dažnai vietoje išvestinės y' yra įrašomas parametras p. Kadangi 2.12 teoremos sąlygos yra tik pakankamos (o ne būtinos), tai ne per kiekvieną p – diskriminantinės kreivės tašką eina daugiau kaip viena integralinė kreivė. Tegu funkcija $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ apibrėžia kokią nors p – diskriminantinės kreivės šaką ir per kiekvieną šios šakos tašką $(x,\varphi(x))$ eina dar bent viena integralinė kreivė, turinti šiame taške tą patį krypties koeficientą. Tada ši integralinės kreivės šaka yra (2.67) lygties ypatinga integralinė kreivė, o funkcija $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ – ypatingas sprendinys.

Taigi, norint rasti 2.67 lygties ypatingą sprendinį, reikia

1. Rasti p – diskriminantinę kreivę.
2. Tiesiogiai įsitikinti ar kuri nors jos šaka yra integralinė kreivė.
3. Jeigu tokia šaka yra patikrinti ar per kiekvieną jos tašką eina dar bent viena integralinė kreivė, turinti šiame taške tą patį krypties koeficientą.

P a v y z d ž i a i.

1. Rasti Dalambero – Lagranžo lygties
$$y=2xy'-{y'}^2 \tag{2.75}$$
ypatingus sprendinius. Šios lygties p – diskriminantinė kreivė yra apibrėžiama lygtimis
$$y=2xp-p^2, \quad 2x-2p=0.$$
Eliminavę iš šių lygčių parametrą p, gausime $y=x^2$. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija nėra (2.75) lygties sprendinys. Taigi (2.75) lygtis ypatingų sprendinių neturi.

2. Rasti Dalambero – Lagranžo lygties
$$y=x-\frac{4}{9}{y'}^2+\frac{8}{27}{y'}^3 \tag{2.76}$$
ypatingus sprendinius. Šios lygties p – diskriminantinė kreivė yra apibrėžiama lygtimis
$$y=x-\frac{4}{9}p+\frac{8}{27}p^3, \quad \frac{8}{9}(p-p^2)=0.$$
Iš antrosios lygties randame: $p=1$ arba $p=0$. Įstatę šias p reikšmes į pirmąją lygtį, gausime dvi tieses
$$y=x-\frac{4}{27}, \quad y=x.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad pirmoji iš šių tiesių tenkina (2.76) lygtį, o antoji ne. Taigi pirmoji tiesė yra (2.76) lygties sprendinys. Įrodysime, kad ši tiesė yra ypatingas (2.76) lygties sprendinys.

Tegu $y' = p$. Tada (2.76) lygtį atitinkanti lygtis simetrinėje formoje yra

$$(1-p)\,dx - \frac{8}{9}p(1-p)\,dp = 0.$$

Suintegravę ją gausime sprendinius: $p = 1$ ir $x = 4p^2/9 + C$. Pirmąjį iš jų atitinka jau žinomas (2.76) lygties sprendinys $y = x - 4/27$, o antrąjį – sprendinys parametrinėje formoje

$$x = \frac{4}{9}p^2 + C, \quad y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3.$$

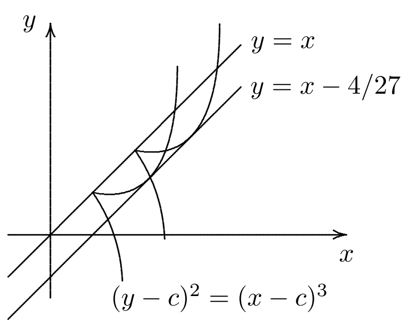
Eliminavę iš šių lygčių parametrą p, gausime lygtį

$$(y-C)^2 = (x-C)^3,$$

kuri apibrėžia pusiaukubinių parabolių šeimą. Šios pusiaukūbinių parabolių šeimos gaubiamoji yra randama iš lygčių

$$(y-C)^2 = (x-C)^3, \quad -2(y-C) = -3(x-C)^2.$$

Eliminavę iš jų parametrą C, gausime lygtį $x - y = 4/27$. Taigi tiesė $y = x - 4/27$ yra pusiaukubinių parabolių šeimos gaubiamoji. Per kiekvieną jos tašką eina dvi (2.76) lygties integralinės kreivės (žr. 2.14 pav.)



2.14 pav.

Todėl tiesė $y = x - 4/27$ yra ypatingas (2.76) lygties sprendinys.

2.10 UŽDAVINIAI

1. Izoklinių metodu nubrėžkite integralines kreives.

   (a) $y' = 2x$.
   (b) $y' = x + y$.
   (c) $y' = x^2 + y^2$.
   (d) $y' = y - x^2$.
   (e) $y' = \dfrac{1}{2}x - y + 1$.
   (f) $y' = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1$.
   (g) $yy' + x = 0$.
   (h) $y' = x - e^y$.
   (i) $x^2 + y^2y' = 1$.
   (j) $y' = \dfrac{y}{x + y}$.

2. Kintamųjų atskyrimo metodu išspręskite lygtis.

   (a) $y' = \dfrac{1 - y^2}{1 + x^2}$.
   (b) $y' = \dfrac{(1 + x)y}{(y - 1)x}$.
   (c) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y$.
   (d) $(1 + x^2)y^3\,dx = x^3(y^2 - 1)\,dy$.
   (e) $\sqrt{1 - x^2}\,dy = \sqrt{1 - y^2}\,dx$.
   (f) $x\,dy - y\,dx = xy\,dy + y^2\,dx$.
   (g) $y' - xy^2 = 2xy$.
   (h) $y' = 10^{x+y}$.
   (i) $y' = \cos(y - x)$.

3. Išspręskite homogenines lygtis.

   (a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$.
   (b) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.
   (c) $x \cos\dfrac{y}{x}\,dy = \left(y\cos\dfrac{y}{x} - x\right)dx$.
   (d) $(x + 2y)\,dx = x\,dy$.
   (e) $(x - y)\,dx = (x + y)\,dy$.
   (f) $y^2 + x^2y' = xyy'$.
   (g) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.
   (h) $xy' - y = x\operatorname{tg}(y/x)$.
   (i) $xy' = y\cos\bigl(\ln(y/x)\bigr)$.
   (j) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

4. Išspręskite lygtis.

   (a) $(2x - 4y + 6)\,dx = (3 - x - y)\,dy$.
   (b) $(y - x + 2)y' + x - y - 1 = 0$.
   (c) $(y + 2)\,dx - (2x + y - 4)\,dy = 0$.
   (d) $x^3(y' - x) = y^2$.
   (e) $2x^2y' = y^3 + xy$.
   (f) $2x\,dy + (x^2y^4 + 1)y\,dx = 0$.
   (g) $2y' + x = 4 \cdot \sqrt{y}$.
   (h) $y' = y^2 - 2/x^2$.
   (i) $y^2(3y' + y) = x$.
   (j) $(xy + x^2y^3)y' = 1$.

2.11 ATSAKYMAI

2. (a) $(1+y)(1-x) = C(1+x)(1-y)$.
   (b) $xy = Ce^{y-x}$.
   (c) $\cos y = C\cos x$.
   (d) $x^{-2} + y^{-2} = 2\ln(Cx/y)$; $x = 0; y = 0$.
   (e) $y^2 + x^2 \pm 2\sqrt{1-C^2}xy = C^2$; $x = \pm 1; y = \pm 1$.
   (f) $x = \dfrac{Cy}{1+y^2}$.
   (g) $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2; y = 0$.
   (h) $y = -\lg(C - 10^x)$.
   (i) $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C; y - x = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \ldots$.

3. (a) $y = Ce^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2y-x}{\sqrt{3}x}\right)}$.
   (b) $x^2 - C^2 = 2Cy$.
   (c) $x = Ce^{-\sin(y/x)}$.
   (d) $x + y = Cx^2 = 0; x = 0$.
   (e) $\ln(x^2+y^2) = C - 2\operatorname{arctg}(y/x)$.
   (f) $y = Ce^{y/x}$.
   (g) $y^2 - x^2 = Cy; y = 0$.
   (h) $\sin(y/x) = Cx$.
   (i) $y = -x\ln\ln Cx$.
   (j) $\arcsin(y/x) = \operatorname{sign} x \cdot \ln Cx$; $y = \pm x$.

4. (a) $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$.
   (b) $(y - x + 2)^2 + 2x + C$.
   (c) $(y+2)^2 = C(x+y-1)$; $y = 1-x$.
   (d) $x^2 = (x^2 - y)\ln Cx$; $y = x^2$.
   (e) $x = -y^2\ln Cx$; $y = 0$.
   (f) $x^2yy^4\ln Cx^2 = 1$; $y=0$; $x=0$.
   (g) $2\sqrt{y} = x$; $(2\sqrt{y}-x)\ln C(2\sqrt{y}-x) = x$.
   (h) $1-xy = Cx^3(2+xy)$; $xy = -2$.
   (i) $y^3 = Ce^{-x} + x - 1$.
   (j) $1/x = 2 - y^2 - Ce^{-y^2/2}$.

3 SKYRIUS

Diferencialinių lygčių sistemos. Bendrieji klausimai

3.1 BENDROS SĄVOKOS. APIBRĖŽIMAI

Tarkime, funkcijos

$$F_i = F_i(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

yra apibrėžtos srityje $G \subset \mathbb{R}^{1+n+N}$, $\quad N = m_1 + \ldots + m_n$.

Lygčių sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

vadinama *bendrojo pavidalo* paprastųjų diferencialinių lygčių sistema, o didžiausias iš skaičius m_i - šios sistemos eile.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcijos $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ apibrėžtos intervale $\langle a, b\rangle$ yra (3.1) lygčių sistemos sprendinys, jeigu:

1. $\varphi_i \in \mathrm{C}^{\mathrm{m_i}}\langle a, b\rangle$, $i = 1, 2, \ldots n$;
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle$ taškas $\big(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \cdots, \varphi_1^{(m_1)}(x), \cdots, \varphi_n, y_n'(x), \cdots, \varphi_n^{(m_n)}(x)\big) \in G$;
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra teisinga tapatybė: $F_i\big(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \cdots, \varphi_1^{(m_1)}(x), \cdots, \varphi_n, y_n'(x), \cdots, \varphi_n^{(m_n)}(x)\big) \equiv 0.$

Jeigu kintamųjų $y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n^{(m_n)}$ atžvilgiu funkcijos F_i tenkina teoremos apie neišreikštinę funkciją sąlygas, tai išsprendę (3.1) sistemą šių kintamųjų atžvilgiu, gausime *kanoninę* diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y_1^{(m_i)} & = & f_1(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^{(m_i)} & = & f_n(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \tag{3.2}$$

išreikštą aukščiausių išvestinių atžvilgiu.

Tarkime, funkcijos

$$f_i = f_i(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(m_1-1)}, \cdots, y_n, y_n', \cdots, y_n^{(m_n-1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

yra apibrėžtos srityje $G \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N = m_1 + \cdots + m_n$.

Apibrėžimas. Sakysime, funkcijos $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ apibrėžtos intervale $\langle a, b\rangle$ yra (3.2) lygčių sistemos sprendinys, jeigu:

1. $\varphi_i \in \mathrm{C}^{\mathrm{m_i}}\langle a, b\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle$ taškas $\big(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \cdots, \varphi_1^{(m_1-1)}(x), \cdots, \varphi_n, y_n'(x), \cdots, \varphi_n^{(m_n-1)}(x)\big) \in G$;
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra teisinga tapatybė: $\varphi_i^{(m_i)}(x) \equiv f_i\big(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \cdots, \varphi_1^{(m_1-1)}(x), \cdots, \varphi_n, y_n'(x), \cdots, \varphi_n^{(m_n-1)}(x)\big)$.

Išskirsime kelis svarbius (3.2) sistemos atvejus. Tegu $n = 1$, $N = m$. Tada (3.2) lygčių sistema apibrėžia vieną m - tos eilės paprastąją diferencialinę lygtį

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}), \tag{3.3}$$

išreikšta aukščiausios eilės išvestinės atžvilgiu. Kai $m_1 = \cdots = m_n = 1$, tai (3.2) lygčių sistema vadinama *normaliąja* diferencialinių lygčių sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2 \cdots, y_n), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2 \cdots, y_n). \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Įrodysime, kad kanoninę n diferencialinių lygčių sistemą galima suvesti į normaliąją N diferencialinių lygčių sistemą.

Tegu

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = y_1, z_2 = y_1', \ldots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \\ z_{m_1+1} = y_2, z_{m_1+2} = y_2', \ldots, z_{m_1+m_2} = y_2^{(m_2-1)}, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ z_{m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}+1} = y_n, \ldots, z_{m_1+m_2+\cdots+m_n} = y_n^{(m_n-1)}. \end{array}\right.$$

Tada (3.2) lygčių sistemą galima perrašyti taip:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1' = z_2, z_2' = z_3, \ldots, z_{m_1-1}' = z_{m_1}, z_{m_1}' = f_1(x, z_1, \ldots, z_N), \\ z_{m_1+1}' = z_{m_1+2}, \ldots, z_{m_1+m_2-1}' = z_{m_1+m_2}', z_{m_1+m_2}' = f_2(x, z_1, \ldots, z_N), \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ z_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1}' = z_{m_1+\cdots+m_{n-1}+2}, \ldots, z_N' = f_n(x, z_1, \ldots, z_N). \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Gauta sistema yra normalioji N diferencialinių lygčių sistema. Ji yra ekvivalenti (3.2) lygčių sistemai. Tiksliau jeigu n funkcijų rinkinys $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra (3.2) sistemos sprendinys, tai N funkcijų rinkinys

$$\varphi_1, \varphi_1' \ldots, \varphi_1^{(m_1-1)}, \ldots, \varphi_n, \varphi_n' \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}$$

yra (3.5) lygčių sistemos sprendinys. Atvirkščiai, jeigu N funkcijų rinkinys

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$$

yra (3.5) lygčių sistemos sprendinys, tai n funkcijų rinkinys

$$\varphi_1, \varphi_{m_1+1}, \dots, \varphi_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}$$

yra (3.2) lygčių sistemos sprendinys.

P a s t a b a. Tegu $n = 1$. Tada (3.2) diferencialinių lygčių sistemoje yra tik viena lygtis. Todėl (3.3) diferencialinę lygtį, kaip atskirą (3.2) diferencialinių lygčių sistemos atvejį, galima suvesti į normaliąją m diferencialinių lygčių sistemą. Tegu

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_m = y^{(m-1)}.$$

Tada (3.3) lygtis susiveda į m diferencialinių lygčių normaliąją sistemą

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{m-1}' = y_m, y_m' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Nagrinėjant diferencialinių lygčių sistemas, nenusižengiant bendrumui, galima apsiriboti normaliosiomis diferencialinėmis sistemomis. Be to, apibrėžimus ir teiginius, gautus nagrinėjant normaliąją diferencialinių lygčių sistemą, galima performuluoti kanoninei diferencialinių lygčių sistemai, taip pat ir vienai paprastajai m - tos eilės diferencialinei lygčiai, išreikštai aukščiausios išvestinės atžvilgiu.

3.2 NORMALIOSIOS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Tarkime, funkcijos $f_i = f_i(x, y_1, y_2 \cdots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra apibrėžtos ir tolydžios srityje $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Nagrinėsime normaliųjų diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2 \cdots, y_n), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2 \cdots, y_n). \end{cases} \tag{3.6}$$

Jeigu $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ yra šios sistemos sprendinys intervale $\langle a, b\rangle$, tai aibė taškų

$$l = \{(x, y_1, \ldots, y_n) : x \in \langle a, b\rangle, y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x)\}$$

apibrėžia kreivę erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$. Kreivė l yra vadinama *integraline kreive*. Pagal sprendinio apibrėžimą integralinė kreivė $l \subset G$.

Tegu $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Tada (3.6) lygčių sistemą galima užrašyti vektorinėje formoje

$$y' = f(x, y). \tag{3.7}$$

Norint išskirti kurį nors vieną (3.7) sistemos sprendinį iš kitų reikia pareikalauti, kad jis tenkintų kokią nors papildomą sąlygą. Dažniausiai tokia sąlyga apibrėžiama taip:

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G. \tag{3.8}$$

Ši sąlyga vadinama *pradine* arba *Koši* sąlyga. Jiegu (3.7) sistemą nagrinėsime kartu su (3.8) sąlyga, tai tokį uždavinį vadinsime *pradiniu* arba *Koši* uždaviniu. Šio uždavinio geometrinė interpretacija yra tokia: rasti integralinę kreivę einančią per tašką $(x_0, y_0) \in G$.

Kiekvienam taškui $(x_0, y_0) \in G$ galima priskirti tiesės atkarpą erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ su krypties koeficientu $k = f(x_0, y_0)$, einančią per šį tašką. Taip gauname krypčių lauką, atitinkanti (3.7) diferencialinių lygčių sistemą. Kiekvienos integralinės kreivės l, apibrėžtos lygtimi $y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$ krypties koeficientas taške $(x_0, \varphi(x_0))$ lygus $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$. Todėl glodi kreivė $l \subset G$ yra integralinė kreivė tada ir tik tada, kai kiekviename jos taške liestinės krypties koeficientas sutampa su lauko kryptimi tame taške. Taigi suintegruoti (3.7) lygčių sistemą reiškia rasti visas glodžias kreives, gulinčias srityje G, kurių liestinės kryptis kiekviename taške sutampa su lauko kryptimi tame taške.

Kai $n = 1$ Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.9}$$

sprendinio egzistavimas ir vienatis, konstruojant Oilerio laužtes, įrodytas 2.2 skyrelyje. Kai $n > 1$ įrodymas yra visiškai toks pats. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad Arcelo-Askoli teorema yra teisinga ir kai $n > 1$. Todėl šių įrodymų čia nekartosime. Kitame skyrelyje pateiksime kitą (3.9) Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties įrodymo metodą.

Apibrėžimas. Sakysime, sritis G yra *vienaties sritis* (3.7) diferencialinių lygčių sistemai, jeigu bet kokie du šios diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai, apibrėžti bendrame intervale $\langle a, b\rangle$ ir sutampantis kokiame nors taške $x_0 \in \langle a, b\rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b\rangle$.

Kiekvieną (3.7) diferencialinių lygčių sistemos sprendinį atitinka integralinė kreivė. Jos projekcija į kintamųjų $y_1, \dots, y_n$ erdvę vadinama sprendinio *trajektorija,* o kintamųjų $y_1, \dots, y_n$ erdvė – *fazine erdve*. Jeigu $y = \varphi(x)$ yra normaliosios diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, apibrėžtas intervale $\langle a, b\rangle$, tai integralinė kreivė

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \varphi(x),\, x \in \langle a, b\rangle.\}$$

Jos trajektorija yra aibė

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle\}.$$

Jeigu kokiame nors taške kertasi dvi integralinės kreivės ir šiame taške jų liestinių krypties koeficientai sutampa, tai šiame taške nėra Koši uždavinio sprendinio vienaties. Trajektorijos fazinėje erdvėje gali kirstis nepažeidiant šios savybės. Be to, trajektorija gali sutapti su tašku. Tokia trajektorija yra vadinama pusiausvyros tašku (kartais ramybės tašku). Kadangi pusiausvyros taškas yra pastovaus sprendinio trajektorija, tai taškas y yra pusiausvyros taškas tada ir tik tada, kai

$$f_1(x, y) = 0, \dots, f_n(x, y) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Įstoriškai diferencialinių lygčių tirimui pirmąjį stimulą davė įvairūs uždaviniai aprašantys mechaninių sistemų judėjimą.

Pavyzdys. Tarkime, erdvėje $\mathbb{R}^3$ yra fiksuota kokia nors koordinačių sistema $Ox_1x_2x_3$ ir kiekvienu laiko momentu t taško $x \in \mathbb{R}^3$ padėtį galima apibrėžti lygtimis

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t).$$

Tada

$$\dot{x} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)), \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\ddot{x} = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)), \quad \ddot{x}_i = \frac{d^2x_i(t)}{dt^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

yra šio taško greičio ir pagreičio vektoriai. Pagal antrąjį Niutono dėsnį masės m materialaus taško x ir jo pagreičio $\ddot{x}$, inertiškos sistemos atžvilgiu, sandauga lygi jėgai $f(t, x, \dot{x})$, veikiančiai šį tašką, t.y.

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}); \tag{3.10}$$

čia $f = (f_1, f_2, f_3)$. Pažymėkime $\dot{x}_1 = v_1, \dot{x}_2 = v_2, \dot{x}_3 = v_3$, arba trumpiau $\dot{x} = v$. Tada (3.10) vektorinę lygtį galima suvesti į dviejų vektorinių lygčių sistemą

$$m\dot{v} = f(t, x, v), \quad \dot{x} = v.$$

Pastaroji sistema yra ekvivalenti šešių diferencialinių lygčių sistemai

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{1}{m} f_1(t, x, v), \quad \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{m} f_2(t, x, v), \quad \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{v}_3 &= \frac{1}{m} f_3(t, x, v), \quad \dot{x}_3 = v_3. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Šiuo atveju fazinė erdvė yra kintamųjų $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$ erdvė. Jeigu funkcijų rinkinys

$$x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad v = v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

yra (3.11) sistemos sprendinys, kai $t \in \langle a, b \rangle$, tai fazinė trajektorija yra aibė taškų

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^6 : x = x(t), v = v(t), \quad t \in \langle a, b \rangle\}.$$

Norint rasti konkretaus taško judėjimo trajektoriją reikia dar žinuoti šio taško padėtį x_0 ir greičio vektorių v_0 pradiniu laiko momentu t_0, t.y. ieškomosios funkcijos, be (3.11) sistemos, dar turi tenkinti pradines sąlygas

$$x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0.$$

Toliau nagrinėsime Koši uždavinį

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.12}$$

Lygiagrečiai patogu nagrinėti vektorinę integralinę lygtį

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{3.13}$$

Apibrėžimas. Sakysime, funkcija $\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ yra (3.13) vektorinės lygties sprendinys, jeigu

1. $\varphi \in \mathrm{C}\langle a, b \rangle$;
2. $\forall x \in \langle a, b \rangle$ taškas $(x, \varphi(x)) \in G$;
3. $\forall x \in \langle a, b \rangle$ yra teisinga tapatybė $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$.

Jeigu funkcija φ yra (3.13) vektorinės lygties sprendinys, tai ji tenkina pradinę sąlygą $\varphi(x_0) = y_0$; jos išvestinė[1] $\varphi' \in \mathrm{C}\langle a, b \rangle$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, taškas $(x, \varphi(x)) \in G$ ir yra teisinga tapatybė $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Todėl funkcija φ yra ir (3.12) Koši uždavinio sprendinys. Atvirkštinis teiginys taip pat yra teisingas. Jeigu funkcija φ yra (3.12) Koši uždavinio sprendinys, tai ji yra ir (3.13) vektorinės integralinės lygties sprendinys.

[1]Priminsime, kad funkcija $f \in \mathrm{C}(G)$.

3.3 EGZISTAVIMO IR VIENATIES TEOREMA

Tegu G yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, funkcija $f : G \to \mathbb{R}^n$ ir $f \in \mathrm{C}(G)$. Nagrinėsime Koši uždavinį

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G. \tag{3.14}$$

Jo sprendinį ieškosime nuosekliųjų artinių metodu. Nulinį artinį galima pasirinkti laisvai. Juo gali būti bet kokia tolydi funkcija $\varphi : \langle a_0, b_0\rangle \to \mathbb{R}^n$, tenkinanti sąlygą $\varphi(x_0) = y_0$. Tegu

$$\varphi_0(x) = y_0, \quad x \in \langle a_0, b_0\rangle : (x, \varphi_0(x)) \in G, \quad x_0 \in (a_0, b_0).$$

Pirmąjį artinį apibrėšime formule

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds, \quad x \in \langle a_1, b_1\rangle;$$

čia intervalas $\langle a_1, b_1\rangle$ parenkamas taip, kad $\langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a_0, b_0\rangle$, $\forall x \in \langle a_1, b_1\rangle$ taškas $(x, \varphi_1(x)) \in G$ ir $x_0 \in (a_1, b_1)$. Analogiškai apibrėžiame antrąjį artinį. Kitus artinius apibrėšime rekurentine formule

$$\varphi_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds, \quad x \in \langle a_k, b_k\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{3.15}$$

čia intervalas $\langle a_k, b_k\rangle$ parenkamas taip, kad $\langle a_k, b_k\rangle \subset \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle$, $\forall x \in \langle a_k, b_k\rangle$ taškas $(x, \varphi_k(x)) \in G$ ir $x_0 \in (a_k, b_k)$. Artiniai apibrėžti (3.15) formule vadinami Pikaro artiniais. Taigi pirmieji k Pikaro artinių $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ yra apibrėžti intervale $\langle a_k, b_k\rangle$ ir taškas x_0 yra vidinis šio intervalo taškas. Be to, kiekviena iš funkcijų φ_k yra tolydi ir tenkina sąlygą $\varphi_k(x_0) = y_0$.

Įrodysime, kad (3.14) Koši uždavinys, pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje, turi vienintelį sprendinį.

3.1 teorema. *(egzistavimo ir vienaties teorema). Tarkime, funkcija $f \in \mathrm{C}(G)$ ir srityje G lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu. Tada*

1. *Pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje egzistuoja (3.14) Koši uždavinio sprendinys.*
2. *Sritis G yra vienaties sritis.*

Teoremos įrodymą išskaidysime į tris dalis. Pradžioje tarę, kad visi Pikaro artiniai yra apibrėžti bendrame intervale įrodysime, kad šiame intervale jie tolygiai konverguoja ir ribinė funkcija yra (3.14) Koši uždavinio sprendinys. Po to įrodysime, kad visi Pikaro artiniai yra apibrėžti bendroje Peano atkarpoje. Pabaigoje įrodysime, kad per kiekvieną srities G tašką eina vienintelė integralinė kreivė.

3.1 lema. *Tarkime, funkcija f kompakte $Q \subset G$ tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu ir visi Pikaro artiniai (žr. (3.15) formulę) $\varphi_k, k = 1, 2, \dots$ yra apibrėžti bendrame segmente $[a, b]$. Be to, taškas $(x, \varphi_k(x)) \in Q$, $\forall x \in [a, b]$ ir $k = 1, 2, \dots$. Tada Pikaro artinių seka $\{\varphi_k\}$ tolygiai konverguoja segmente $[a, b]$ ir ribinė funkcija φ yra (3.14) Koši uždavinio sprendinys.*

$\triangleleft$ Tegu

$$\psi_0 = \varphi_0, \quad \psi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Eilutės

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \tag{3.16}$$

dalinė suma

$$\sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) = \varphi_n(x).$$

Todėl norint įrodyti sekos $\{\varphi_k\}$ tolygų konvergavimą, pakanka įrodyti (3.16) eilutės tolygų konvergavimą.

Tegu

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f(x, y_0)|.$$

Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad $\forall x \in [a, b]$ ir $k = 1, 2, \dots$ yra teisinga nelygybė

$$|\psi_k(x)| \le \sqrt{n^k} M L^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!}. \tag{3.17}$$

Kai $k = 1$ yra teisingas įvertis[1]

$$|\psi_1(x)| = |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds \Big| \le$$

$$\Big| \int_{x_0}^{x} \sqrt{n} |f(s, \varphi_0(s))|\, ds \Big| \le \sqrt{n} M |x - x_0|.$$

Tarkime, (3.17) nelygybė yra teisinga kai $k = m$. Įrodysime, kad ji yra teisinga kai $k = m + 1$. Pagal sekos $\{\psi_k\}$ apibrėžimą

$$|\psi_{m+1}(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} \big(f(s, \varphi_m(s)) - f(s, \varphi_{m-1}(s)) \big)\, ds \Big| \le$$

[1] Įvertinant šį ir kitus šio skirelio integralus, remsimės nelygybe (žr. 1.3 skyrelį)

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx \Big| \le \sqrt{n} \Big| \int_a^b |f(x)|\, dx \Big|.$$

$$\Big|\int_{x_0}^{x} \sqrt{n}\big|f(s,\varphi_m(s)) - f(s,\varphi_{m-1}(s))\big|\,ds\Big|.$$

Kadangi funkcija f kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą, tai

$$|\psi_{m+1}(x)| \le \Big|\int_{x_0}^{x} \sqrt{n}L\big|\varphi_m(s) - \varphi_{m-1}(s)\big|\,ds\Big| = \Big|\int_{x_0}^{x} \sqrt{n}L\big|\psi_m(s)\big|\,ds\Big|.$$

Pasinaudoję indukcinę prielaida, gauname

$$|\psi_{m+1}(x)| \le \Big|\int_{x_0}^{x} \sqrt{n^{m+1}}ML^m\frac{|s-x_0|^m}{m!}\,ds\Big| = \sqrt{n^{m+1}}ML^m\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Taigi (3.17) nelygybė yra teisinga $\forall k = 1, 2, \ldots$.

Sudarome eilutę

$$S = |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{\big(\sqrt{n}L(b-a)\big)^k}{k!}.$$

Pastaroji eilutė yra mažorantė (3.16) eilutei. Akivaizdu, kad ji konverguoja ir

$$S = |y_0| + \frac{M}{L}\Big(e^{\sqrt{n}L(b-a)} - 1\Big).$$

Pagal Vejerštraso požymį (3.16) eilutė, kartu ir seka $\{\varphi_k\}$, konverguoja tolygiai segmente $[a,b]$ ir ribinė funkcija φ yra tolydi segmente $[a,b]$.

Įrodysime, kad funkcija φ yra (3.14) Koši uždavinio sprendinys. Visu pirma pastebėsime, kad $\varphi_k(x_0) = y_0$, $\forall k = 1, 2, \ldots$. Todėl ir ribinė funkcija $\varphi(x_0) = y_0$. Kadangi funkcija f kompakte Q tenkina Lipšico sąlygą kintamojo y atžvilgiu, tai

$$f(x,\varphi_k(x)) \rightrightarrows f(x,\varphi(x)), \quad x\in[a,b],$$

kai $k\to\infty$. Todėl (3.15) formulėje galima pereiti prie ribos po integralo ženklu. Taigi funkcija φ yra integralinės lygties

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds, \quad t\in\langle a,b\rangle$$

sprendinys, kartu ir (3.14) Koši uždavinio sprendinys. $\triangleright$

Laisvai pasirenkame kokį nors stačiakampį

$$Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}\subset G.$$

Kadangi funkcija $f\in \mathrm{C}(G)$, tai stačiakampyje Q ji yra aprėžta. Tegu

$$M = \max_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|, \quad h = \min\{a, b/\sqrt{n}M\}, \quad I = [x_0 - h, x_0 + h].$$

Atkarpa I yra vadinama Peano atkarpa.

3.2 lema. *Visi Pikaro artiniai φ_k yra apibrėžti Peano atkarpoje I ir taškas $(x, \varphi_k(x)) \in Q$, $\forall x \in I$, $k = 1, 2, \dots$.*

◁ Lemą įrodysime matematinės indukcijos metodu. Akivaizdu, kad nulinis artinis φ_0 yra apibrėžtas Peano arkarpoje I ir $(x, \varphi_0(x)) \in Q$, $\forall x \in I$. Be to, pirmasis Pikaro artinis

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds$$

taip pat yra apibrėžtas Peano atkarpoje I ir $\forall x \in I$ yra teisinga nelygybė

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds \Big| \le \Big| \int_{x_0}^{x} \sqrt{n} \big| f(s, \varphi_0(s)) \big|\, ds \Big| \le$$

$$\sqrt{n} M |x - x_0| \le \sqrt{n} M h \le \sqrt{n} M \frac{b}{\sqrt{n} M} = b.$$

Todėl taškas $(x, \varphi_1(x)) \in Q$, $\forall x \in I$.

Tarkime, kad k - tasis Pikaro artinis φ_k yra apibrėžtas Peano atkarpoje I ir taškas $(x, \varphi_k(x)) \in Q$, $\forall x \in I$. Įrodysime, kad $k+1$ - asis Pikaro artinis yra apibrėžtas Peano atkarpoje I ir taškas $(x, \varphi_{k+1}(x)) \in Q$, $\forall x \in I$. Pagal apibrėžimą

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_k(s))\, ds.$$

Kadangi taškas $(s, \varphi_k(s)) \in Q$, $\forall s \in I$, tai funkcija φ_{k+1} yra apibrėžta Peano atkarpoje I. Be to,

$$|\varphi_{k+1}(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_k(s))\, ds \Big| \le \sqrt{n} M |x - x_0| \le b.$$

Todėl taškas $(x, \varphi_{k+1}(x)) \in Q$, $\forall x \in I$. ▷

3.3 lema. *Tarkime, funkcija f srityje G yra tolydi ir kintamojo y atžvilgiu srityje G lokaliai tenkina Lipšico sąlygą. Tada bet kokie du diferencialinės lygčių sistemos*

$$y' = f(x, y) \tag{3.18}$$

sprendiniai, apibrėžti bendrame intervale $\langle a, b \rangle$ ir sutampantis kokiame nors taške $x_0 \in \langle a, b \rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b \rangle$.

◁ Tegu φ ir ψ yra du (3.18) lygties sprendiniai, apibrėžti bendrame intervale $\langle a, b \rangle$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ir $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Tada

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle,$$

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))\, ds, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Laisvai pasirenkame segmentą $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle : x_0 \in [\alpha, \beta]$. Kiekviena iš integralinių kreivių

$$\{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], y = \varphi(x)\}, \quad \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], y = \psi(x)\}$$

yra kompaktas srityje G. Todėl egzistuoja Lipšico konstanta L tokia, kad

$$\big|f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))\big| \leq L\big|\varphi(x) - \psi(x)\big|, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Tačiau tada

$$\big|\varphi(x) - \psi(x)\big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big(f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))\big)\, ds\Big| \leq$$

$$\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{n}\big|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\big|\, ds\Big| \leq \sqrt{n}L\Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|\varphi(s) - \psi(s)\big|\, ds\Big|$$

ir pagal Gronuolo lemą

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = 0, \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Kadangi segmentą $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$ pasirinkome laisvai, tai $\varphi(x) = \psi(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$. $\triangleright$

Paprastoji diferencialinė n − tos eilės lygtis

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad f : G \to \mathbb{R}, \quad G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.19}$$

keitiniu

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{n-1}$$

susiveda į normaliąją diferencialinių lygčių sistemą

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \ldots, y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{3.20}$$

Jeigu funkcijos

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

yra (3.20) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, tai funkcija $y = \varphi_1(x)$ yra (3.19) lygties sprendinys. Ir atvirkščiai, jeigu funkcija $y = \varphi(x)$ yra (3.19) lygties sprendinys, tai funkcijos

$$y_1 = \varphi(x), \ldots, y_n = \varphi^{(n-1)}(x)$$

yra (3.20) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys. Ta pati situacija yra ir su Koši uždaviniais. Jeigu funkcijos

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

yra (3.20) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{3.21}$$

tai funkcija $y = \varphi(x)$ yra (3.19) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$y(x_0) = y_{10} := y_0, y'(x_0) = y_{20} := y_0^1 \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0} := y_0^{n-1}. \tag{3.22}$$

Ir atvirkščiai, jeigu funkcija $y = \varphi(x)$ yra (3.19) lygties sprendinys, tenkinantis (3.22) pradines sąlygas, tai funkcijos

$$y_1 = \varphi(x), \ldots, y_n = \varphi^{(n-1)}(x)$$

yra (3.20) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, tenkinantis (3.21) pradines sąlygas.

Jeigu funkcija $f \in \mathrm{C}(G)$ ir visų kintamųjų, išskyrus x, atžvilgiu srityje G lokaliai tenkina Lipšico sąlygą, tai (3.20) diferencialinių lygčių sistema tenkina 3.1 teoremos sąlygas. Todėl pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje ji turi vienintelį sprendinį, tenkinantį (3.21) pradines sąlygas. Kartu (3.19) lygtis turi vienintelį sprendinį, tenkinantį (3.21) pradines sąlygas. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

3.2 teorema. *Tegu* $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in G$ *ir* $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$. *Tada pakankamai mažoje taško* x_0 *aplinkoje egzistuoja vienintelis Koši uždavinio*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

sprendinys.

3.4 SPRENDINIŲ PRATĘSIMAS

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $y = \varphi(x), x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ir $y = \psi(x), x \in \langle a, b \rangle$ yra diferencialinių lygčių sistemos

$$y' = f(x, y), \quad f : G \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.23}$$

sprendiniai. Be to, tegu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$ ir

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Tada sakysime, kad sprendinys $y = \psi(x)$ yra sprendinio $y = \varphi(x)$ pratęsimas.

Tarkime, $y = \varphi_1(x)$, $x \in \langle a, b]$ yra (3.23) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys. Tada jį galima pratęsti į dešinę. Iš tikrųjų pagal sprendinio apibrėžimą taškas $(b, \varphi_1(b)) \in G$. Todėl pakankamai mažoje šio taško aplinkoje egzistuoja Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \quad x(b) = \varphi_1(b)$$

sprendinys $y = \varphi_2(x)$, $t \in [b, b + \varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$. Tegu

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \langle a, b]; \\ \varphi_2(x), & x \in [b, b + \varepsilon\rangle. \end{cases}$$

Lengvai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija yra integralinės lygčių sistemos

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \int_b^x f(s, \varphi(s))\, ds, \quad x \in \langle a, b + \varepsilon\rangle$$

sprendinys, kartu ir (3.23) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys. Taigi sprendinį $y = \varphi_1(x)$ galima pratęsti į dešinę.

Jeigu $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ yra (3.23) diferencialinių lygčių sistemos sprendinys ir jį negalima pratęsti nei į kairę nei į dešinę, tai toks sprendinys vadinamas pilnuoju, o intervalas (α, β) – maksimaliu sprendinio egzistavimo intervalu.

3.3 teorema. *Tarkime, funkcija $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$ ir taškas $(x_0, y_0) \in G$. Tada Koši uždavinio*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.24}$$

pilnasis sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas maksimaliame intervale (a, b) egzistuoja ir yra vienintelis. Be to, taškas $x_0 \in (a, b)$ ir kai $x \to a + 0$, arba kai $x \to b - 0$ taškas $(x, \varphi(x))$ artėja į ∂G.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [3] knygoje.

P a s t a b a. Tegu $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{C}(G)$ ir šioje srityje yra teisinga nelygybė

$$|f(x, y)| \leq p(x)|y| + q(x); \tag{3.25}$$

čia p ir q tolydžios ir neneigiamos intervale (a, b) funkcijos. Tada kiekvieną (3.23) diferencialinių lygčių sistemos sprendinį galima pratęsti į visą intervalą (a, b). Atkreipsime dėmesį į tai, kad kiekviena tolydi funkcija f, tiesinė kintamųjų y atžvilgiu, tenkina (3.25) nelygybę. Todėl kiekvieną tiesinės diferencialinių lygčių sistemos sprendinį galima pratęsti į visą intervalą (a, b).

Tarkime, (3.23) diferencialinių lygčių sistema yra tiesinė,

$$y = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_n), \quad f = \operatorname{colon}(f_1, \ldots, f_n).$$

Tada ją galima perrašyti taip:

$$y' + P(x)y = q(x); \tag{3.26}$$

čia $P(x) = \{p_{ij}\}$ yra $n \times n$ eilės matrica, $q = \operatorname{colon}(q_1, \ldots, q_n)$.

3.4 teorema. *Tarkime, funkcijos p_{ij} ir $q_i \in \mathrm{C}(a, b), \forall i, j = 1, \ldots, n$ ir $x_0 \in (a, b)$. Tada egzistuoja Koši uždavinio*

$$y' + P(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.27}$$

sprendinys, apibrėžtas visame intervale (a, b). Be to, sritis $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ yra vienaties sritis.

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame segmentą $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Juostoje $Q = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ funkcija

$$f(x, y) = q(x) - P(x)y$$

tenkina 3.1 lemos sąlygas. Iš tikrųjų ji yra tolydi ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |P(x)(y - \bar{y})| \le |P(x)||y - \bar{y}| \le L|y - \bar{y}|;$$

čia $|P(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} p_{ij}^2(x)}$; $L = \max\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |P(x)|$. Todėl $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ egzistuoja (3.25) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame intervale $[\alpha, \beta]$. Kadangi intervalą $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ pasirinkome laisvai, tai egzistuoja (3.27) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame intervale (a, b). Be to, funkcija

$$f(x, y) = q(x) - P(x)y$$

tenkina 3.3 lemos sąlygas. Todėl bet kokie du (3.25) diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai, apibrėžti bendrame intervale ir sutampantis kokiame nors jo taške, sutampa visame intervale. $\triangleright$

Paprastoji diferencialinė $n -$ tos eilės lygtis,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad f : G \to \mathbb{R}, \quad G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.28}$$

keitiniu

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{n-1}$$

susiveda į normaliąją diferencialinių lygčių sistemą

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \ldots, y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{3.29}$$

Jeigu funkcija $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$, tai (3.29) diferencialinių lygčių sistema tenkina 3.3 teoremos sąlygas. Performuluosime šią teoremą (3.28) lygties atveju.

3.5 teorema. *Tegu* $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in G$ *ir* $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$. *Tada egzistuoja vienintelis Koši uždavinio*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

pilnasis sprendinys $y = \varphi(x)$, *apibrėžtas maksimaliame intervale* (a, b). *Be to, kai* $x \to a + 0$ *(arba* $x \to b - 0$*)taškas* $(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \to \partial G$.

P a s t a b a. Tegu Ω yra srities G projekcija į plokštumą Oxy. Tada integralinės kreivės

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), x \in (a, b)\}$$

taškai $(x, \varphi(x))$ nebūtinai artėja į srities Ω kraštinius taškus, kai $x \to a+0$ (arba $x \to b - 0$).

P a v y z d y s. Nagrinėsime lygtį

$$y'' = \frac{y'}{x}(1 + y'^2).$$

Tegu $G = \{(x, y, y') : x > 0, y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}\}$, $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Padauginę abi šios lygties puses iš y', gausime lygtį su atskiriamais kintamisiais

$$\big(y'^2\big)' = 2y'^2(1 + y'^2)/x.$$

Suintegravę ją randame

$$y = -\frac{1}{C}\sqrt{1 - (Cx)^2} + C_1.$$

Kai $C = -1, C_1 = 0$ atskiras šios lygties sprendinys

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

taške $x_0 = 3/5$ tenkina pradines sąlygas

$$y(x_0) = 4/5, \quad y'(x_0) = -3/4.$$

Akivaizdu, kad pastarojo sprendinio apibrėžimo sritis yra intervalas $(0, 1)$. Kai $x \to 0$, taškas

$$(x, \sqrt{1 - x^2}, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}) \to (0, 1, 0) \in \partial G$$

Kai $x \to 1$, taškas

$$\left(x, \sqrt{1-x^2}, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \to (1, 0, \infty) \in \partial G.$$

Tačiau kai $x \to 1$, taškas

$$(x, \sqrt{1-x^2}) \to (1, 0) \in \Omega,$$

t.y. taškas $(1, 0)$ yra vidinis srities Ω taškas.

Tarkime, (3.28) lygtis yra tiesinė. Tada ją galima užrašyti taip:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x). \tag{3.30}$$

Šią lygtį atitinkanti normalioji lygčių sistema

$$y_1' = y_2, \ldots, y_{n-1}' = y_n, y_n' = q - p_1(x)y_{(n)} - \cdots - p_n(x)y_1$$

taip pat yra tiesinė. Jeigu funkcijos $p_1, \ldots, p_n$ ir q yra tolydžios intervale (a,b), tai 3.4 teoremos sąlygos yra patenkintos. Performuluosime šią teoremą (3.30) lygties atveju.

3.6 teorema. *Tegu funkcijos p_i, $q \in \mathrm{C}(a, b), i = 1, \ldots, n$ ir $x_0 \in (a, b)$. Tada egzistuoja vienintelis Koši uždavinio*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x), \tag{3.31}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{3.32}$$

sprendinys, apibrėžtas visame intervale (a, b).

3.5 BENDRASIS SPRENDINYS IR BENDRASIS INTEGRALAS

Tarkime, $f : G \to \mathbb{R}^n$, G – sritis erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$. Tada egzistuoja vienintelis Koši uždavinio

$$y' = f(x, y), \tag{3.33}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G \tag{3.34}$$

pilnasis sprendinys

$$y = \varphi(x, x_0, y_0),$$

apibrėžtas maksimaliame intervale $I(x_0, y_0)$. Funkcijos φ apibrėžimo sritis

$$D = \{(x, x_0, y_0) : x \in I(x_0, x_0), (x_0, y_0) \in G\}.$$

Taip apibrėžtas sprendinys vadinamas (3.33) diferencialinių lygčių sistemos *bendruoju sprendiniu* Koši formoje.

3.7 teorema. *Tarkime, srityje G funkcija f lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamųjų y atžvilgiu. Tada aibė D yra sritis ir kiekvienas (3.33) sistemos sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ yra tolydi funkcija srityje D.*

3.8 teorema. *Tarkime, yra patenkintos 3.7 teoremos sąlygos ir funkcija*

$$f_y := \partial f / \partial y : D \to \mathbb{R}^{n,n}$$

yra tolydi. Tada (3.33) sistemos sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ srityje D turi tolydžias dalines išvestines $\partial y/\partial x$, $\partial y/\partial x_0$ ir $\partial y/\partial y_0$. Be to, dalinė išvestinė

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -\frac{\partial y}{\partial y_0} f(x_0, y_0), \quad y = \varphi(x, x_0, y_0), \tag{3.35}$$

o matricos $\{\partial y(x, x_0, y_0)/\partial y_0\}$ determinantas

$$\det\Big\{\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\Big\} = \exp\Big\{\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{Sp}\, \frac{\partial f(s, y(s, x_0, y_0))}{\partial y}\, ds\Big\} \tag{3.36}$$

Šių teoremų įrodymą galima rasti [3] knygoje.

Bendrasis sprendinys $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ priklauso nuo $n + 1$ laisvų parametrų x_0, y_0, $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Kiekvienai fiksuotai parametrų porai x_0, y_0 bendrasis sprendinys apibrėžia integralinę kreivę. Jeigu kitai parametrų porai x_1, y_1 taškas (x_1, y_1) priklauso šiai kreivei, tai funkcija $y = \varphi(x, x_1, y_1)$ apibrėžia tą patį sprendinį. Jeigu norime, kad skirtingas parametrų poras x_0, y_0 ir x_1, y_1 atitiktų skirtingos integralinės kreivės, reikia šias poras parinkti taip, kad taškai (x_0, y_0) ir (x_1, y_1) gulėtų kokiame nors paviršiuje S, kuris nei viename savo taške neliečia integralinių kreivių. Tarkime, šį paviršių galima apibrėžti parametrinėmis lygtimis

$$x = h(p), \quad y = g(p), \quad p \in P;$$

čia $h : P \to \mathbb{R}$ ir $g : P \to \mathbb{R}^n$ – tolydžios funkcijos, apibrėžtos srityje $P \subset \mathbb{R}^n$. Be to, tegu nei viena (3.33) diferencialinių lygčių sistemos integralinė kreivė neliečia paviršiaus S. Analiziškai šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\det \left\{ \begin{array}{cc} h_p(p) & g_p(p) \\ 1 & f(h(p), g(p)) \end{array} \right\} \neq 0.$$

Tada kiekvieną integralinę kreivę, kertančią paviršių S, atitinka parametras $p \in P \subset \mathbb{R}^n$ ir skirtingas parametrų $p \in P$ reikšmes atitinka skirtingos integralinės kreivės. Taigi parametrų skaičių galima sumažinti nuo $n+1$ iki n.

A p i b r ė ž i m a s. Funkcija

$$y = \varphi(x, h(p), g(p)) := \psi(x, p),$$

apibrėžta srityje

$$\{(x, p); x \in I(h(p), g(p)),\, p \in P\},$$

yra vadinama (3.33) diferencialinių lygčių sistemos *bendruoju sprendiniu*.

Kartais yra nauduojamas kitas, ekvivalentus, bendrojo sprendinio apibrėžimas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, tolydi funkcija $y = \varphi(x, C)$, apibrėžta kokioje nors srityje $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ yra (3.33) diferencialinių lygčių sistemos *bendrasis sprendinys* srityje $G_0 \subset G$, jeigu sritis G_0 yra vienaties sritis ir

1. $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ lygtis
$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$
turi vienintelį sprendinį $C_0 = C(x_0, y_0)$.

2. Taškas $(x_0, C_0) \in V$ ir $y = \varphi(x, C_0)$ yra (3.33), (3.34) Koši uždavinio sprendinys.

Garantuoti bendrojo sprendinio egzistavimą visoje srityje G negalima. Tačiau galima įrodyti lokalų bendrojo sprendinio egzistavimą.

3.9 teorema. *Tarkime, funkcija $f \in \mathrm{C}(G) \cap \mathrm{Lip}_{loc,y}(G)$ ir $(x_0, y_0) \in G$. Tada egzistuoja taško (x_0, y_0) aplinka, kurioje (3.33) diferencialinių lygčių sistema turi bendrąjį sprendinį $y = \varphi(x, C)$.*

Šios teoremos įrodymas yra analogiškas 2.7 teoremos įrodymui. Todėl čia jo nepateiksime.

P a v y z d y s. Diferencialinių lygčių sistema

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -\sin x$$

tenkina 3.4 teoremos sąlygas intervale $(-\infty, +\infty)$. Todėl sritis

$$G = \{(x, y_1, y_2) : x \in (-\infty, +\infty), y_1 \in (-\infty, +\infty), y_2 \in (-\infty, +\infty)\}$$

yra vienaties sritis. Suintegravę šią sistemą, gausime

$$y_1 = \sin x + C_1 x + C_2, \quad y_2 = \cos x + C_1. \tag{3.37}$$

Įrodysime, kad taip apibrėžta sprendinių visuma, priklausanti nuo dviejų laisvų konstantų C_1 ir C_2, yra bendrasis sprendinys. Srityje D laisvai pasirenkame tašką (x_0, y_{10}, y_{20}). Pareikalavę, kad apibrėžta (3.37) lygtimis integralinė kreivė eitų per šį tašką, gausime dviejų paprastų lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_{10} &= \sin x_0 + C_1 x_0 + C_2 \\ y_{20} &= \cos x_0 + C_1. \end{cases}$$

Pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį

$$C_1 = y_{20} - \cos x_0, \quad C_2 = y_{10} + \sin x_0 - (y_{20} - \cos x_0)x_0.$$

Pagal antrąjį apibrėžimą (3.37) formulės apibrėžia bendrąjį sistemos sprendinį.

Atskiruoju (3.33) diferencialinių lygčių sistemos sprendiniu vadinsime sprendinį, kuris gaunamas iš bendrojo parinkus konkrečias (įskaitant ir simbolius $\pm\infty$) visų parametrų reikšmes. Taigi bendrasis sprendinys apibrėžia n – parametrinę integralinių kreivių šeima, o atskirasis sprendinys yra šios kreivių šeimos atstovas.

Bendrasis sprendinys yra apibrėžiamas vienaties srityje. Sprendinys, kurio kiekviename taške netenkinama Koši uždavinio sprendinio vienaties sąlyga, vadinamas *ypatinguoju sprendiniu*.

P a v y z d y s. Nagrinėsime sistemą

$$y_1' = \sqrt{y_1}, \quad y_2' = y_1, \quad x \in (-\infty, +\infty), y_1 \geq 0, y_2 \in (-\infty, +\infty)$$

Puserdvėje $y_1 > 0$ funkcijos $f_1 = \sqrt{y_1}, f_2 = y_1$ yra tolydžios ir turi tolydžias dalines išvestines. Todėl sritis $y_1 > 0$ yra vienaties sritis. Tačiau funkcija f_1 plokštumos $y_1 = 0$ aplinkoje netenkina Lipšico sąlygos. Todėl nagrinėjama sistema gali turėti ypatingus sprendinius. Rasime juos.

Kai $y_1 > 0$, nagrinėjama diferencialinių lygčių sistema turi bendrą sprendinį

$$y_1 = (x/2 + C_1)^2, \quad y_2 = \frac{2}{3}(x/2 + C_1)^3 + C_2. \tag{3.38}$$

Be to, šios formulės apibrėžia diferencialinių lygčių sistemos sprendinį puserdvės $y_1 > 0$ kraštiniuose taškuose $y_1 = 0$.

Kai $y_1 = 0$, iš antrosios lygties randame $y_2 = C_2$. Taigi plokštumoje $y_1 = 0$ guli vienparametrinė sprendinių šeima

$$y_1 = 0, \quad y_2 = C_2,$$

kurios negalima įjungti į (3.38) sprendinių šeimą. Kiekvienas šios šeimos sprendinys yra ypatingas sprendinys, nes per kiekvieną jo tašką $y_1 = 0, y_2 = y_{20}$ eina (3.38) šeimos integralinė kreivė

$$y_1 = (x/2 + C_1)^2, \quad y_2 = \frac{2}{3}(x/2 + C_2)^3 + y_{20}.$$

P a s t a b a. Ypatingi sprendiniai gali atsirasti tik vienaties srities kraštiniuose taškuose. Kadangi srities dimensija lygi $n+1$, tai jos kraštinių taškų aibės dimensija bent vienetu mažesnė, t.y. ne didesnė uš n. Todėl gulinčios šioje aibėje integralinės kreivės negali priklausyti nuo n laisvų parametrų. Tačiau gali priklausyti nuo $n-1$ arba mažesnio skaičiaus laisvų parametrų.

A p i b r ė ž i m a s. Tapačiai nelygi konstantai tolydi funkciją $u : G \to \mathbb{R}$ vadinama (3.33) sistemos *pirmuoju integralu* (arba tiesiog *integralu*), jeigu su kiekvienu šios sistemos sprendiniu $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ yra teisinga tapatybė

$$u(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Taigi, kiekviename (3.33) sistemos integralinės kreivės taške integralas įgyja pastovią reikšmę. Be to, ši reikšmė priklauso nuo integralinės kreivės. Galima įrodyti, kad lygtis $u(x, y) = C$ erdvėje Oxy apibrėžia n-matį paviršių sudaryta iš (3.33) sistemos integralinių kreivių. Tokie paviršiai vadinami *integraliniais paviršiais*.

3.10 teorema. *Tolydžiai diferencijuojama funkcija $u : G \to \mathbb{R}$ yra (3.33) sistemos integralas tada ir tik tada, kai*

$$u_x(x, y) + \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(x, y) f_i(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in G. \tag{3.39}$$

◁ Tegu u yra (3.33) sistemos integralas. Pagal apibrėžimą

$$u(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$$

kieviename bet kurio (3.33) sistemos sprendinio taške. Todėl

$$\frac{d}{dx} u(x, \varphi(x)) = u_x(x, \varphi(x)) + \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(x, \varphi(x)) \varphi_i'(x) =$$

$$u_x(x, \varphi(x)) + \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(x, \varphi(x)) f_i(x, \varphi(x)) = 0.$$

Tarkime, tolydžiai diferencijuojama srityje G funkcija $u \not\equiv \text{const}$ tenkina (3.39) lygtį. Tada su bet kuriuo (3.33) sistemos sprendiniu $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ išvestinė

$$\frac{d}{dx} u(x, \varphi(x)) = u_x(x, \varphi(x)) + \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(x, \varphi(x)) f_i(x, \varphi(x)) = 0.$$

Todėl $u(x, \varphi(x)) = \text{const}$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$. ▷

Tegu u yra (3.33) sistemos integralas klasės C^1. Iš integralo apibrėžimo išplaukia, kad $\Phi(u)$ su kiekviena diferencijuojama funkcija Φ taip pat yra šios sistemos integralas. Taigi vienas sistemos integralas apibrėžia visą šeimą integralų. Todėl natūralu išskirti tokius integralus, kurių pagalba galima apibrėžti visus sistemos integralus.

Apibrėžimas. Sakysime, pirmieji integralai $u_1, \dots, u_m : G_0 \to \mathbb{R}$ yra *nepriklausomi*, jeigu vektoriai $u_{1y}, \dots, u_{my}$ yra tiesiškai nepriklausomi srityje G_0.

Kitais žodžiais tariant integralai $u_1, \dots, u_m$ yra tiesiškai nepriklausomi srityje G_0, jeigu iš vektorių $u_{1y}, \dots, u_{my}$ sudarytos matricos rangas lygus m kiekviename srities G_0 taške.

3.11 teorema. *Tegu srityje $G_0 \subset G$ yra patenkintos (3.33) sistemos sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremos sąlygos. Tada*

1. *Srityje G_0 egzistuoja n nepriklausomų (3.33) sistemos integralų $u_1, \dots, u_n$.*

2. *Jeigu $u_1, \dots, u_n$ yra (3.33) sistemos nepriklausomi integralai srityje G_0, tai $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ lygtis*

$$U(x, y) = U(x_0, y_0), \quad U = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_n)$$

   turi vienintelį sprendinį $y = \varphi(x)$ pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje ir šis sprendinys yra Koši uždavinio (3.33), (3.34) sprendinys.

3. *Jeigu $u_1, \dots, u_n$ yra (3.33) sistemos nepriklausomi integralai srityje G_0 ir u_{n+1} yra koks nors šios sistemos integralas srityje G_0, tai egzistuoja diferncijuojama funkcija $\Psi : u(G_0) \to \mathbb{R}$ tokia, kad*

$$u_{n+1}(x, y) = \Psi(u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)), \quad \forall (x, y) \in G_0.$$

◁ Pastarosios teoremos įrodymą galima rasti [3] knygoje. ▷

Apibrėžimas. Tegu $u_1, \dots, u_n$ yra (3.33) sistemos nepriklausomi integralai srityje G_0 ir $U = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_n)$. Tada lygybė

$$U(x, y) = C, \quad C = U(x_0, y_0), \ (x_0, y_0) \in G$$

yra vadinama *bendruoju* (3.33) sistemos integralu srityje G_0.

Taigi bendrasis integralas srityje G_0 apibrėžia bet kurį (3.33) sistemos sprendinį neišreikštiniu pavidalu. Ir atvirkščiai, bendrąjį integralą galima gauti iš bendrojo sprendinio $y = \varphi(x, C)$, jeigu išspręsime šią lygtį parametro C atžvilgiu.

3.6 AUTONOMINĖS SISTEMOS

Nagrinėjant autonomines sistemas dažnai nepriklausomas kintamasis yra žymimas raide t, o ieškoma funkcija raide x. Prisilaikydami šios tradicijos nagrinėsime autonominę sistemą[1]

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.40}$$

Tarkime, funkcija $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tolydi srityje Ω ir šioje srityje tenkina Lipšico sąlygą.

Iš kitų sistemų autonominė sistema išsiskiria viena svarbia savybe.

3.12 teorema. *Tegu $x = \varphi(t), t \in (a, b)$ yra (3.40) sistemos sprendinys. Tada $x = \psi(t) = \varphi(t + c), t \in (a - c, b - c), c \in \mathbb{R}$, taip pat yra (3.40) sistemos sprendinys.*

◁ Pagal funkcijos ψ apibrėžimą

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + c) = f(\varphi(t + c)) = f(\psi(t)).$$

Taigi integralinė kreivė $x = \varphi(t)$ gaunama iš integralinės kreivės $x = \psi(t)$ poslinkiu teigiama t ašies kryptimi dydžiu C. ▷

I š v a d o s:

1. Tarkime, Ω yra vienaties sritis ir $x = x(t, t_0, x_0)$ yra (3.40) sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $x(t_0) = x_0$. Tada $\forall t$ iš maksimalaus sprendinio egzistavimo intervalo yra teisinga lygybė

   $$x(t + c, t_0 + c, x_0) = x(t, t_0, x_0). \tag{3.41}$$

   Iš tikrųjų, kai $t = t_0$, reiškiniai kairėje ir dešinėje sutampa su x_0. Kadangi Ω yra vienaties sritis, tai jie sutampa $\forall t$ iš jų apibrėžimo intervalo.

2. Imkime (3.41) formulėje $c = -t_0$. Tada autonominės sistemos sprendinį galima užrašyti taip:

   $$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0) := \varphi(t - t_0, x_0).$$

   Iš čia išplaukia, kad autonominės sistemos sprendinys priklauso ne nuo laiko momento t, pradinio laiko momento t_0 ir pradinio taško x_0, o nuo laiko atkarpos $t - t_0$ ir pradinio taško x_0. Geometriškai šią savybę galima interpretuoti taip. Jeigu dvi autonominės sistemos trajektorijos turi bendrą tašką, tai jos sutampa. Iš tikrųjų, tegu $x_0 \in \Omega$ yra bendras dviejų trajektorijų taškas. Tada šias trajektorijas galima apibrėžti lygtimis

   $$x = \varphi(t - t_1, x_0), \quad x = \varphi(t - t_2, x_0).$$

   Akivaizdu, kad jos apibrėžia tą pačią kreivę.

[1] Normaliąją diferencialinių lygčių sistemą $\dot{x} = f(t, x)$ visada galima suvesti autonominę sistemą $\dot{x} = f(t, x)$, $\dot{t} = 1$. Tačiau tai nepašalina esminio skirtumo tarp autonominių ir neautonominių sistemų. Gauta autonominė sistema neturi pusiausvyros taškų.

Taigi autonominių sistemų trajektorijos fazinėje erdvėje, lygiai taip pat kaip ir neautonominių sistemų integralinės kreivės, nesikerta. Todėl tyriant autonomines sistemas tikslinga nagrinėti ne jų integralines kreives erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, o jų trajektorijas vienetu mažesnės dimensijos erdvėje $\mathbb{R}^n$.

Tegu $t_0 = 0$. Taškas $x_0 \in \Omega$ yra (3.40) sistemos *pusiausvyros taškas*, jeigu

$$\varphi(t, x_0) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Akivaizdu, kad taškas x_0 yra pusiausvyros taškas tada ir tik tada, kai $f(x_0) = 0$. Tašką $x_0 \in \Omega$ vadinsime (3.40) sistemos *paprastuoju tašku,* jeigu $f(x_0) \neq 0$. Jeigu taškas x_0 yra paprastasis (3.40) sistemos taškas ir funkcija f yra tolydi, tai kiekvienas taškas iš pakankamai mažos taško x_0 aplinkos taip pat bus paprastasis taškas.

Tegu $x = \varphi(t)$ yra (3.40) sistemos sprendinys, apibrėžtas $\forall t \in \mathbb{R}^1$. Jeigu šis sprendinys yra periodinė periodo $T > 0$ funkcija, tai jį atitinkanti trajektorija vadinama *uždara trajektorija* arba *ciklu*.

Tarkime, taškas x_0 yra paprastasis (3.40) sistemos taškas. Jeigu sprendinio $x = \varphi(t, x_0)$ trajektorija γ savęs nekerta, tai šis sprendinys yra neperiodinis. Įrodysime, kad trajektorija γ kerta save tik tuo atveju, kai ji yra uždara, o ją apibrėžiantis sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinis.

Tarkime, trajektorija γ kerta save. Tada egzistuoja tokie t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$, kad

$$\varphi(t_1, x_0) = \varphi(t_2, x_0).$$

Kadangi x_0 nėra pusiausvyros taškas, tai galime tarti, kad

$$\varphi(t, x_0) \neq \varphi(t_1, x_0), \quad \text{kai} \quad t \in (t_1, t_2).$$

Įrodysime, kad sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinė funkcija su periodu $\omega = t_2 - t_1$. Iš tikrųjų, funkcija ψ apibrėžta formule

$$\psi(t) = \varphi(t + \omega, x_0), \quad t \in [t_1 - \omega, t_2 - \omega] = [t_1 - \omega, t_1]$$

yra (3.40) sistemos sprendinys. Be to,

$$\varphi(t_1 + \omega, x_0) = \varphi(t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0).$$

Remiantis vienaties teorema, sprendiniai $x = \varphi(t + \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_1 - \omega, t_1]$. Analogiškai galima įrodyti, kad sprendiniai $x = \varphi(t - \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_2, t_2 + \omega]$. Taip samprotaudami toliau gausime, kad sprendinį $x = \varphi(t, x_0)$ galima pratęsti į visą realių skaičių ašį $\mathbb{R}$ ir yra teisinga tapatybė

$$\varphi(t + \omega, x_0) = \varphi(t, x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Taigi funkcija φ yra ω-periodinė, o ją atitinkanti trajektorija yra uždara. Kartu yra įrodyta tokia teorema.

3.13 teorema. *Autonominės sistemos trajektorijos gali būti tik tokių trijų rūšių:*

1. *Pusiausvyros taškas.*

2. *Uždara trajektorija. Ją atitinka ω-periodinis sprendinys.*

3. *Nekertanti savęs trajektorija. Ją atitinka neperiodinis sprendinys.*

Nagrinėjant (3.40) autonominę sistemą svarbu žinoti ar ji turi uždarų trajektorijų. Kai $n = 2$ nurodysime dvi pakankamas sąlygas garantuojančias, kad (3.40) sistema uždarų trajektorijų neturi.

3.14 teorema. *Tarkime, yra patenkinta kuri nors vieną iš šių sąlygų:*

1. *Vektorinis laukas $f = (f_1, f_2)$ yra potencialus*[1] *srityje Ω.*

2. *Vektorinio lauko divergencija*

$$\operatorname{div} f = f_{1x_1} + f_{2x_2}$$

srityje Ω turi pastovų ženklą.

Tada (3.40) autonominė sistema srityje Ω neturi uždarų trajektorijų.

◁ Tarkime priešingai, (3.40) autonominė sistema srityje Ω turi uždara trajektoriją $\gamma \subset \Omega$. Sritį, apribota kreive γ, pažymėkime raide D. Jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga, tai $f_{2x_1} = f_{1x_2}$ ir

$$0 = \int_D \big(f_{2x_1}(x) - f_{1x_2}(x)\big)\, dx = \int_D \operatorname{div} f^*(x)\, dx = \int_\gamma \big(f^*(x), n(x)\big)\, dl;$$

čia $n(x)$ yra vienetinis normalės vektorius trajektorijai γ taške x, išorinis srities D atžvilgiu, o vektorius f^* turi koordinates $f_1^* = f_2$ ir $f_2^* = -f_1$. Vektorius f^* yra statmenas vektoriui f. Tačiau vektorius f yra statmenas vektoriui n. Taigi vektoriai f^* ir n yra lygiagretūs ir

$$\int_\gamma \big(f^*(x), n(x)\big)\, dl \neq 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad (3.40) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga.

Tarkime, yra patenkinta antroji teoremos sąlyga. Tada

$$0 \neq \int_D \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_\gamma \big(f(x), n(x)\big)\, dl = 0,$$

nes vektoriai f ir n yra statmeni. Gauta prieštara įrodo, kad (3.40) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta antroji teoremos sąlyga. ▷

[1] Sakysime, vektorinis laukas f yra potencialus srityje Ω, jeigu šioje srityje egzistuoja diferencijuojama skaliarinė funkcija φ tokia, kad $f = \operatorname{grad} \varphi$.

P a v y z d y s. Tegu $f(x) = Ax, A \in \mathbb{R}^{2,2}$. Vektorinis laukas $f(x)$ yra potencialus, jeigu matrica A yra simetrinė. Vektorinės funkcijos f divergencija yra lygi matricos A pėdsakui, t.y. $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Sp} A$. Todėl tiesinė sistema

$$\dot{x} = Ax$$

plokštumoje $\mathbb{R}^2$ neturės uždarų trajektorijų, jeigu matrica A yra simetrinė arba jos pėdsakas $\operatorname{Sp} A \neq 0$.

Tarkime, $n > 1$ ir funkcija $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$. Be to, tegu srityje Ω (3.40) sistema neturi pusiausvyros taškų. Laisvai pasirinkime tašką $x_0 \in \Omega$. Tada bent viena iš funkcijų $f_1, \dots, f_n$ taške x_0 yra nelygi nuliui. Tarkime, $f_n(x_0) \neq 0$. Tada iš (3.40) sistemos galima eliminuoti parametrą t. Rezultate gausime neautonominę $n-1$ lygčių sistemą:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{f_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{3.42}$$

Šios sistemos dešinės pusės yra diferencijuojamos pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje funkcijos. Remiantis 3.11 teorema egzistuoja sritis Ω_0, priklausanti minėtai taško x_0 aplinkai, kurioje (3.42) sistema turi $n-1$ nepriklausomus integralus: $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$.

Parodysime, kad funkcija u yra (3.42) neautonominės sistemos integralas tada ir tik tada, kai ji yra (3.40) autonominės sistemos integralas. Iš tikrųjų, (3.42) sistemos sprendiniai randami iš (3.40) sistemos sprendinių $x = \varphi(t)$ ir atvirkščiai, pakeitus nepriklausomą kintamąjį fomulės $x_n = \varphi_n(t)$ pagalba. Tai padaryti galima, nes išvestinė $\dot{\varphi}_n = f_n(\varphi) \neq 0$. Kartu galime tvitinti, kad funkcija u yra pastovi išilgai (3.42) sistemos sprendinių tada ir tik tada, kai ji yra pastovi išilgai (3.40) sistemos sprendinių.

Remiantis šiais teiginiais bei 3.10, 3.11 teoremomis galime tvirtinti, kad autonominėms sistemoms yra teisingi tokie teiginiai:

3.15 teorema. *Tolydžiai diferencijuojama funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ yra (3.40) sistemos integralas srityje Ω tada ir tik tada, kai šioje srityje ji yra lygties*

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x) f_i(x) = 0$$

sprendinys.

3.16 teorema. *Tarkime, srityje Ω nėra (3.40) sistemos pusiausvyros taškų. Tada:*

1. *Kiekvienam srities Ω taškui x_0 galima nurodyti aplinką, kurioje egzistuoja lygiai $n-1$ nepriklausomi (3.40) sistemos integralai, nepriklausantys nuo kintamuojo t.*

2. *Jeigu $u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$ yra (3.40) sistemos integralai, nepriklausantys nuo kintamojo t ir integralai $u_1, \dots, u_{n-1}$ yra nepriklausomi,tai egzistuoja diferencijuojama funkcija Ψ tokia, kad $u_n = \Psi(u_1, \dots, u_{n-1})$.*

P a s t a b a. Jeigu $x_0 \in \Omega$ yra (3.40) sistemos pusiausvyros taškas, tai šio taško aplinkoje nepriklausomi integralai, nepriklausantys nuo kintamuojo t, gali ir egzistuoti ir neegzistuoti.

4 SKYRIUS

Aukštesnės eilės paprastosios diferencialinės lygtys

4.1 TIESINĖS LYGTYS

Tegu funkcijos $p_1, \dots, p_n, q : (a, b) \to \mathbb{R}$ yra tolydžios. Nagrinėsime tiesinę n – tos eilės diferencialinę lygtį

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x). \tag{4.1}$$

Jos kairiąją pusę pažymėsime $\mathrm{L}\, y$. Operatorius L vadinamas *tiesiniu diferencialiniu operatoriumi*. Jo apibrėžimo sritis yra funkcijų erdvė $\mathrm{C^n}(a, b)$. Kadangi funkcija y ir visos jos išvestinės iki n - tos eilės imtinai įeina į operatorių L tiesiškai, tai

1. $\mathrm{L}(\lambda\varphi) = \lambda\, \mathrm{L}\, \varphi, \quad \forall\varphi \in \mathrm{C^n}(a, b), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
2. $\mathrm{L}(\varphi + \psi) = \mathrm{L}\, \varphi + \mathrm{L}\, \psi, \quad \forall\varphi, \psi \in \mathrm{C^n}(a, b)$.

Paėmę (4.1) lygtyje $q = 0$, gausime tiesinę homogeninę n - tos eilės lygtį

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0. \tag{4.2}$$

Nehomogeninės lygties sprendimas susiveda į homogeninės lygties sprendimą (žr. 4.3). Todėl toliau nagrinėsime homogeninę lygtį.

Tegu funkcijos φ ir ψ yra (4.2) lygties sprendiniai, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada $\lambda\varphi$ ir $\varphi + \psi$ taip pat yra (4.2) lygties sprendiniai. Iš tikrųjų

$$\mathrm{L}(\lambda\varphi) = \lambda\, \mathrm{L}\, \varphi = \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$\mathrm{L}(\varphi + \psi) = \mathrm{L}\, \varphi + \mathrm{L}\, \psi = 0 + 0 = 0.$$

I š v a d a. Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ yra (4.2) lygties sprendiniai. Tada jų tiesinis darinys

$$\varphi = C_1\varphi_1 + \cdots + C_k\varphi_k, \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

taip pat yra (4.2) lygties sprendinys.

P a v y z d y s. Lygtis

$$y'' = 0$$

turi du atskirus sprendinius $y = 1$ ir $y = x$. Todėl jų tiesinis darinys

$$y = C_1 + xC_2$$

taip pat yra sprendinys.

Šias tiesinės homogeninės lygties sprendinių sąvybes galima performuluoti taip: tiesinės homogeninės lygties sprendinių aibė yra tiesinė erdvė. Nulinis elementas yra funkcija tapačiai lygi nuliui. Dviejų elementų sumos ir sandaugos iš skaičiaus operacijos apibrėžiamos kaip atitinkamos operacijos su funkcijomis. Įrodysime, kad šios erdvės dimensija lygi n.

Apibrėžimas. Sakysime, funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ yra *tiesiškai nepriklausomos* intervale (a,b), jeigu lygybė

$$C_1\varphi_1(x) + \dots + C_k\varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

yra galima tik tuo atveju, kai

$$C_1 = \dots = C_k = 0.$$

Priešingu atveju jos vadinamos *tiesiškai priklausomomis.* Tiksliau, jeigu egzistuoja konstantos $C_1, \dots, C_k$, iš kurių bent viena nelygi nuliui, tokios, kad

$$C_1\varphi_1(x) + \dots + C_k\varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b),$$

tai sakysime, kad funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ yra tiesiškai priklausomos.

Iš šio apibrėžimo matome, kad funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ yra tiesiškai priklausomos, jeigu bent viena iš jų lygi nuliui. Be to, jeigu prie tiesiškai priklausomų funkcijų prijungsime dar kelias funkcijas, tai gauta funkcijų sistema bus tiesiškai priklausoma. Pagaliau dvi funcijos yra tiesiškai priklausomos, kai jos yra proporcingos.

Pateiksime keletą tiesiškai priklausomų ir nepriklausomų funkcijų pavyzdžių.

1. Intervale $(-\infty, +\infty)$ funkcijos $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ yra tiesiškai nepriklausomos. Iš tikrųjų lygybė

   $$C_0 + C_1x + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} = 0, x \in (-\infty, +\infty),$$

   kurioje bent vienas koeficientas $C_k \neq 0$, negali būti teisinga visiems x, nes $n-1$ laipsnio algebrinė lygtis negali turėti daugiau $n-1$ sprendinių.

2. Intervale $(-\infty, +\infty)$ funkcijos $\sin x$ ir $\cos x$ yra tiesiškai nepriklausomos, nes jų santikis

   $$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \not\equiv const.$$

3. Intervale $(-\infty, +\infty)$ funkcijos $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ yra tiesiškai priklausomos, nes

   $$1 - \sin^2 x - \cos^2 x \equiv 0.$$

4. Tegu $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – skirtingi skaičiai (realūs arba kompleksiniai). Tada intervale $(-\infty, +\infty)$ funkcijos

   $$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$$

   yra tiesiškai nepriklausomos.

$\triangleleft$ Tarkime priešingai, funkcijos $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ yra tiesiškai priklausomos. Tada egzistuoja konstantos $C_1, \ldots, C_k$, iš kurių bent viena nelygi nuliui, tokios, kad

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_k e^{\lambda_k x} = 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Tegu $C_k \neq 0$. Padauginę paskutinę lygybę iš $e^{-\lambda_1 x}$, perrašysime ją taip:

$$C_1 + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \cdots + C_k e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

Kairėje ir dešinėje šios lygybės pusėse yra diferencijuojamos funkcijos. Todėl jų išvestinės taip pat sutampa

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \cdots + C_k(\lambda_k - \lambda_1) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

Taigi gavome tokią pačią lygybę, tik joje narių skaičius vienetu mažesnis. Tęsdami tokius samprotavimus k - tame žingsnyje, gausime

$$C_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_1) e^{(\lambda_k - \lambda_{k-1})x} = 0.$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $C_k = 0$. Gauta prieštara įrodo, kad funkcijos $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ yra tiesiškai nepriklausomos. $\triangleright$

Analogiškai galima įrodyti, kad funkcijos

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1} e^{\lambda_1 x},\\
&e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2} e^{\lambda_2 x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k} e^{\lambda_k x}
\end{aligned}$$

yra tiesiškai nepriklausomos intevale $(-\infty, +\infty)$; čia $m_1, \ldots, m_k$ – sveiki teigiami skaičiai.

Tegu funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{C^{n-1}}(a, b)$. Iš šių funkcijų ir jų išvestinių sudarome determinantą

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Determinantas W yra vadinamas funkcijų sistemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *Vronskio* determinantu.

4.1 teorema. *Jeigu funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomos, tai jas atitinkantis Vronskio determinantas tapačiai lygus nuliui.*

◃ Pagal apibrėžimą funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomos intervale (a,b), jeigu

$$C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

ir bent vienas iš koeficientų $C_1, \dots, C_n$ nelygus nuliui. Tarkime, $C_n \neq 0$. Tada

$$\varphi_n(x) = -\frac{C_1}{C_n}\varphi_1(x) - \cdots - \frac{C_{n-1}}{C_n}\varphi_{n-1}(x). \tag{4.3}$$

Funkcijas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ atitinka Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Pakeitę jame paskutinį stulpelį pagal (4.3) formulę, gausime determinantą

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \left(-\frac{C_1}{C_n}\varphi_1(x) - \cdots - \frac{C_{n-1}}{C_n}\varphi_{n-1}(x)\right) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \left(-\frac{C_1}{C_n}\varphi_1'(x) - \cdots - \frac{C_{n-1}}{C_n}\varphi_{n-1}'(x)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \left(-\frac{C_1}{C_n}\varphi_1^{(n-1)}(x) - \cdots - \frac{C_{n-1}}{C_n}\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)\right) \end{vmatrix}.$$

Šį determinantą galima išskaidyti į $n-1$ determinantų sumą, kiekvienas iš kurių turi du vienodus stulpelius. Todėl ši suma tapačiai lygi nuliui. Kartu tapačiai lygus nuliui ir Vronskio determinantas W. ▹

Tarkime, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties sprendiniai ir $W(x)$ yra šiuos sprendinius atitinkantis Vronskio determinantas.

4.2 teorema. *Teiginiai:*

1. $W(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$;
2. $W(x_0) = 0$, *kokiame nors taške* $x_0 \in (a,b)$;
3. *Sprendiniai* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – *tiesiškai priklausomi;*

yra ekvivalentūs.

◃ Įrodysime, kad $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Tarkime, $W(x) = 0, \forall x \in (a,b)$. Tada $W(x_0) = 0$ bet kuriame intervalo (a,b) taške x_0. Taigi iš $1 \Rightarrow 2$.

Tarkime, $W(x_0) = 0$ kokiame nors taške $x_0 \in (a,b)$. Tada tiesinės homogeninės lygčių sistemos

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + \cdots\cdots\cdots + C_n\varphi_n(x_0) & = & 0, \\ \quad\vdots & & \vdots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{cases}$$

determinantas lygus nuliui. Todėl ši sistema turi netrivialų sprendinį. Pažymėkime jį $C_1^0, \dots, C_n^0$. Funkcija

$$\varphi(x) = C_1^0\varphi_1(x) + \dots + C_n^0\varphi_n(x)$$

yra (4.2) lygties sprendinys. Be to,

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Tačiau funkcija $y(x) = 0$ taip pat yra (4.2) lygties sprendinys ir tenkina tas pačias pradines sąlygas. Todėl šie sprendiniai sutampa, t.y.

$$C_1^0\varphi_1(x) + \dots + C_n^0\varphi_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Taigi funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomos.

Tarkime dabar, funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomos. Tada vienas iš Vronskio determinanto $W(x)$ stulpelių yra tiesinis kitų stulpelių darinys. Todėl jis lygus nuliui. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties tiesiškai nepriklausomi sprendiniai intervale (a,b), tai jie yra tiesiškai nepriklausomi ir bet kokiame intervale $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$.

Determinanto

$$Q(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

išvestinė $\dfrac{dQ(x)}{dx}$ lygi

$$\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Todėl

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Kadangi funkcijos $\varphi_k, k = 1, \dots, n$ yra (4.2) lygties sprendiniai, tai

$$\varphi_k^{(n)} = -p_1(x)\varphi_k^{(n-1)} - \dots - p_n(x)\varphi_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Įstatę šias išraiškas į (4.4) formulę, gausime pirmos eilės tiesinę homogeninę lygtį

$$W'(x) = -p_1(x)W(x).$$

Jos sprendinys

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds}.$$

Pastaroji formulė vadinama *Liuvilio – Ostrogradskio* formule. Ji dar karta įrodo, kad pirmasis ir antrasis 4.2 teoremos teiginiai yra ekvivalentūs.

Kiekvienas (4.2) lygties sprendinys $\varphi_k, k = 1, \dots, n$ vienareikšmiškai apibrėžiamas jo ir jo išvestinių (iki $n-1$ eilės imtinai) reikšmėmis kokiame nors fiksuotame taške $x_0 \in (a, b)$. Šias pradines reikšmes galima užrašyti stulpeliu ir iš jų sudaryti matricą. Pažymėkime taip apibrėžtą matricą $\Phi(x_0)$ ir pavadinkime ją pradine matrica. Akivaizdu, kad

$$W(x_0) = \det \Phi(x_0).$$

Taigi (4.2) lygties sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, jeigu juos atitinkanti pradinė matrica yra neišsigimusi[1] , t.y.

$$\det \Phi(x_0) \neq 0.$$

Kartu ji yra neišsigimusi ir kiekviename intervalo (a, b) taške.

A p i b r ė ž i m a a s Sakysime, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties *sprendinių bazė*, jeigu bet kokį šios lygties sprendinį, vieninteliu būdu, galima išreikšti pavidalu

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Konstantos $C_1, \dots, C_n$ vadinamos sprendinio φ *koordinatėmis* šioje bazėje.

4.3 teorema. *Bet kokie (4.2) lygties sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, su neišsigimusia pradine matrica, yra šios lygties sprendinių bazė.*

$\triangleleft$ Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties sprendiniai ir pradinė matrica $\Phi(x_0)$ yra neišsigimusi. Be to, tegu φ yra bet koks (4.2) lygties sprendinys. Tiesinės nehomogeninės lygčių sistemos

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + \cdots\cdots + C_n\varphi_n(x_0) = \varphi(x_0), \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

[1] Tokie sprendiniai egzistuoja. Juos, pavyzdžiui, galima apibrėžti kaip (4.2) lygties sprendinius φ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tenkinančius pradines sąlygas:

$$\varphi_i^{(k)}(x_0) = \delta_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad x_0 \in (a, b).$$

Šiuo atveju $\Phi(x_0)$ yra vienetinė matrica ir jos determinantas lygus vienetui.

determinantas $\det \Phi(x_0)$ nelygus nuliui. Todėl pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį $C_1^0, \dots, C_n^0$. Tada

$$\varphi(x) = C_1^0 \varphi_1(x) + \cdots + C_n^0 \varphi_n(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

nes kairėje ir dešinėje šios lygybės pusėse yra (4.2) lygties sprendinys, tenkinantis tas pačias pradines sąlygas. Taigi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties sprendinių bazė, o $C_1^0, \dots, C_n^0$ yra sprendinio φ koordinatės šioje bazėje. ▹

Išvada. Jeigu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties tiesiškai nepriklausomi sprendiniai, tai bet kurį šios lygties sprendinį φ galima išreikšti sprendinių $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tiesiniu dariniu. Be to, bet kokie $n+1$ (4.2) lygties sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ yra tiesiškai priklausomi. Iš trikrųjų, jeigu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomi sprendiniai, tai pagal 4.3 teoremą

$$\varphi_{n+1}(x) = C_1 \varphi_1(x) + \cdots + C_n \varphi_n(x)$$

ir sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ yra tiesiškai priklausomi. Jeigu sprendiniai φ_1, $\dots$, φ_n yra tiesiškai priklausomi, tai sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ taip pat yra tiesiškai priklausomi.

Pagal 4.2 teoremą (4.2) lygties sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai iš jų sudarytas pradinės matricos determinantas yra nelygus nuliui kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$. Todėl pastarąją teoremą galima performuluoti taip.

4.4 teorema. *Bet kokie n tiesiškai nepriklausomi (4.2) lygties sprendiniai yra šios lygties sprendinių bazė.*

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra (4.2) lygties sprendinių bazė. Funkcija

$$\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x) + \cdots + C_n \varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

yra vadinama (4.2) lygties *bendruoju sprendiniu*.

Bendrasis sprendinys pasižymi šiomis savybėmis:

1. Kiekvienam konkrečiam parametrų $C_1, \dots, C_n$ rinkiniui funkcija φ, apibrėžta (4.5) formule, yra (4.2) lygties sprendinys.

2. Kiekvieną (4.2) lygties sprendinį galima išreikšti (4.5) formule, tinkamai parinkus parametrų $C_1, \dots, C_n$ reikšmes.

Sprendinių erdvės bazė, t.y. n tiesiškai nepriklausomų sprendinių, vadinama *fundamentaliąja sprendinių sistema*.

4.5 teorema. *Tarkime, diferencialinės lygtys*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = 0,$$
$$y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + q_n(x) y = 0,$$

su tolydžiais intervale (a, b) koeficientais $p_k, q_k, k = 1, \dots, n$ turi tą pačią fundamentaliąją sprendinių sistemą. Tada šios lygtys sutampa, t.y.

$$p_k(x) = q_k(x), k = 1, \dots, n, \quad \forall x \in (a, b).$$

◁ Tegu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra bendra abiejų lygčių fundamentalioji sprendinių sistema. Pagal 4.2 teoremos išvada jie yra tiesiškai nepriklausomi bet kokiame intervale $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Tarkime, priešingai, kad nagrinėjamos lygtys nesutampa. Tada egzistuoja indeksas $k : p_k(x) \neq q_k(x), \forall x \in (\alpha, \beta)$, o visi koekicientai su mažesniais indeksais yra lygūs. Atėmę antrąją lygtį iš pirmos, gausime

$$\big(p_k(x) - q_k(x)\big)y^{(n-k)} + \cdots + \big(p_n(x) - q_n(x)\big)y = 0.$$

Kadangi koeficientas $p_k(x) - q_k(x) \neq 0$, tai pastaroji lygtis yra $n-k$ eilės lygtis. Be to, intervale (α, β) ji turi n tiesiškai nepriklausomų sprendinių. Tačiau to būti negali, nes tiesinės lygties tiesiškai nepriklausomų sprendinių skaičius sutampa su jos eile. Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga ir

$$p_k(x) = q_k(x), k = 1, \ldots, n, \quad \forall x \in (a, b).$$

▷

I š v a d a. Tegu funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{C^n}(a, b)$ yra tiesiškai nepriklausomos intervale (a, b) ir jas atitinkantis Vronskio determinantas $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Tada

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) & y \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) & \dot{y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

yra tiesinė homogeninė n – tos eilės lygtis. Be to, šioje lygtyje koeficientas prie išvestinės $y^{(n)}$ lygus vienetui. Norint tuo įsitikinti reikia pastarojoje lygtyje išskleisti deteminantą paskutiniuoju stulpeliu. Akivaizdu, kad funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra (4.6) lygties sprendiniai. Pagal 4.5 teoremą, bet kuri kita lygtis, turinti tą pačią tiesiškai nepriklausomų sprendinių sistemą, sutampa su šią lygtimi. Taigi žinant tiesinės homogeninės n – tos eilės fundamentaliąją sprendinių sistema galima vienareikšmiškai atstatyti ir pačią lygtį.

4.2 KOMPLEKSINIŲ KOEFICIENTŲ ATVEJIS

Nagrinėsime tiesinę n – tos eilės diferencialinę lygtį

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{4.7}$$

su kompleksiniais koeficientais $p_1, \dots, p_n, q : (a, b) \to \mathbb{C}$. Kopleksinių koeficientų atveju (4.7) lygties sprendiniu vadinsime n kartų diferencijuojamą funkciją $\varphi = \psi + i\nu$:

$$\varphi^{(n)} + p_1(x)\varphi^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\varphi = q(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Jeigu $p_k = r_k + is_k, k = 1, 2, \dots, n$, $q = g + ih$, $y = u + iv$, funkcijos r_k, s_k, g, h, u, $v : (a, b) \to \mathbb{R}$, tai (4.7) lygtį galima išskaidyti į dviejų lygčių sistemą

$$u^{(n)} + r_1(x)u^{(n-1)} - s_1(x)v^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)u - s_n(x)v = g(x), \quad x \in (a, b),$$

$$v^{(n)} + s_1(x)u^{(n-1)} + r_1(x)v^{(n-1)} + \cdots + s_n(x)u + r_n(x)v = h(x), \quad x \in (a, b).$$

Ši sistema standartiniu būdu susiveda į $2n$ normaliųjų tiesinių diferencialinių lygčių sistemą. Tiesinės lygties su kompleksiniais koeficientais atveju pradinės sąlygos apibrėžiamos taip:

$$y(x_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0; \tag{4.8}$$

čia $y_1^0 = u_1^0 + iv_1^0, \dots, y_n^0 = u_n^0 + iv_n^0$ – fiksuoti kompleksiniai skaičiai. Atskirę (4.8) formulėje realias ir menamas dalys, gausime $2n$ realių pradinių sąlygų

$$u(x_0) = u_1^0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_n^0,$$

$$v(x_0) = v_1^0, \dots, v^{(n-1)}(x_0) = v_n^0.$$

Todėl teiginius, kurie įrodyti normaliosioms tiesinėms diferencialinių lygčių sistemoms, galima performuluoti tiesinėms n - tosios eilės lygtims su kompleksiniais koeficientais. Taigi yra teisinga teorema.

4.6 teorema. *Tegu $p_1, \dots, p_n, q : (a, b) \to \mathbb{C}$ yra tolydžios intervale (a, b) funkcijos, $x_0 \in (a, b)$ ir $y_1^0 = u_1^0 + iv_1^0, \dots, y_n^0 = u_n^0 + iv_n^0$ – fiksuoti kompleksiniai skaičiai. Tada (4.7), (4.8) Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį, apibrėžtą visame intervale (a, b).*

Be to, išlieka teisingi visi apibrėžimai ir teiginiai įrodyti 4.1 skyrelyje. Tereikia tik realių skaičių lauką $\mathbb{R}$ pakeisti į kompleksinių skaičių lauką $\mathbb{C}$. Suformuluosime 4.3 teoremos analogą kompleksinių sprendinių atveju.

4.7 teorema. *Bet kokie n kompleksiniai tiesiškai nepriklausomi homogeninės lygties*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{4.9}$$

sprendiniai yra šios lygties sprendinių bazė.

Tarkime, (4.9) lygties koeficientai $p_1, \dots, p_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, o $\varphi_1, \dots, \varphi_n : (a,b) \to \mathbb{C}$ – tiesiškai nepriklausomi šios lygties sprendiniai (virš kompleksinių skaičių lauko). Pagal 4.7 teoremą jie yra (4.9) lygties sprendinių bazė. Jeigu $\varphi_k = \psi_k + i\nu_k : (a,b) \to \mathbb{C}$ yra (4.9) lygties sprendinys, tai $\overline{\varphi}_k = \psi_k - i\nu_k$ taip pat yra šios lygties sprendinys. Be to, lygybė

$$\varphi_k^{(n)} + p_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\varphi_k = 0$$

yra ekvivalenti dviem lygybėm:

$$\psi_k^{(n)} + p_1(x)\psi_k^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\psi_k = 0,$$

$$\nu_k^{(n)} + p_1(x)\nu_k^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\nu_k = 0.$$

Taigi, jeigu φ_k yra (4.9) lygties su realiais koeficientais kompleksinis sprendinys, tai jo realioji ir menamoji dalys taip pat yra šios lygties sprendiniai.

Tarkime, pirmieji m sprendinių yra kompleksiniai, o kiti realūs. Tada juos galima sunumeruoti taip:

$$\varphi_1 = \psi_1 + i\nu_1, \overline{\varphi}_1 = \psi_1 - i\nu_1, \dots, \overline{\varphi}_m = \psi_m - i\nu_m, \varphi_{2m+1}, \dots, \varphi_n;$$

čia funkcijos

$$\psi_1, \nu_1, \dots, \psi_m, \nu_m, \varphi_{2m+1}, \dots, \varphi_n : (a,b) \to \mathbb{R}.$$

Funkcijos

$$\psi_1, \nu_1, \dots, \psi_m, \nu_m, \varphi_{2m+1}, \dots, \varphi_n$$

yra (4.9) lygties sprendinių bazė virš realių skaičių lauko. Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad lygybė

$$C_1\psi_1 + C_2\nu_1 + \dots + C_{2m-1}\psi_m + C_{2m}\nu_m + C_{2m+1}\varphi_{2m+1} + \dots + C_n\varphi_n = 0$$

yra ekvivalenti lygybei

$$\frac{1}{2}(C_1 - iC_2)\varphi_1 + \frac{1}{2}(C_1 + iC_2)\overline{\varphi}_1 + \dots + C_{2m+1}\varphi_{2m+1} + \dots + C_n\varphi_n = 0,$$

o pastaroji yra teisinga tik tuo atveju, kai

$$\frac{1}{2}(C_1 - iC_2) = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) = \dots = C_{2m+1} = \dots = C_n = 0,$$

t.y. kai

$$C_1 = \dots = C_n = 0.$$

4.3 KONSTANTŲ VARIJAVIMO METODAS

Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę n – tos eilės lygtį

$$\mathrm{L}y := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x), \quad x \in (a,b). \tag{4.10}$$

Tegu ψ yra koks nors atskiras šios lygties sprendinys intervale (a,b) ir $y = \psi + z$. Kadangi $\mathrm{L}\psi = q$, tai z turi tenkinti homogeninę lygtį

$$\mathrm{L}z := z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)z = 0.$$

Jeigu žinome šios lygties kokią nors fundamentaliąją sprendinių sistemą $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tai jos bendrasis sprendinys

$$z = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x).$$

Tačiau tada

$$y = \psi(x) + C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)$$

yra (4.10) lygties bendrasis sprendinys.

Taigi, jeigu žinome homogeninės lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai nehomogeninės lygties sprendimas susiveda į jos atskirojo sprendinio radimą. Pasirodo, kad nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį galima surasti, jeigu yra žinoma kokia nors homogeninės lygties fundamentalioji sprendinių sistema. Atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį ieškosime *konstantų varijavimo metodu.*

Tegu

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x); \tag{4.11}$$

čia $C_1, \ldots, C_n$ – ieškomos diferencijuojamos funkcijos, o $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – fundamentalioji homogeninės lygties sprendinių sistema. Suskaičiuosime funkcijos ψ išvestines ir pareikalausime, kad pabraukti nariai būtų lygūs nuliui.

$$\psi'(x) = C_1(x)\varphi_1'(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n'(x) + \underline{C_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n(x)},$$

$$\psi''(x) = C_1(x)\varphi_1''(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n''(x) + \underline{C_1'(x)\varphi_1'(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n'(x)},$$

$$\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi^{(n-1)}(x) &= C_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + \\
&\qquad \underline{C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x)}, \\
\psi^{(n)}(x) &= C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) + \\
&\qquad C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

Padauginę funkciją ψ iš p_n, jos pirmąją išvestinę iš p_{n-1}, ir t.t., o n-ąją iš 1 ir viską sudėję, gausime

$$\mathrm{L}\psi = C_1\,\mathrm{L}\varphi_1 + \cdots + C_n\,\mathrm{L}\varphi_n + C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} =$$

$$C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}.$$

Funkcija ψ tenkins (4.10) lygtį, jeigu paskutinis reiškinys yra lygus q. Taigi funkcijų $C_1', \dots, C_n'$ atžvilgiu, gavome n tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \quad\vdots \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = q(x). \end{cases}$$

Šios sistemos determinantas $W(x) \neq 0$. Todėl ji turi vienintelį sprendinį

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \dots, C_n'(x) = \frac{W_n(x)}{W(x)};$$

čia $W_k, k = 1, \dots, n$ yra determinantai, gaunami iš Vronskio determinanto W, pakeitus k - ąjį stulpelį į colon$(0, \dots, 0, q)$. Taigi

$$C_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)}\, ds + C_{k0};$$

čia C_{k0} – fiksuotos konstantos. Atmetę jas ir įstatę taip apibrėžtas funkcijas C_k į (4.11) formulę, gausime atskirąjį (4.10) lygties sprendinį.

Tarkime, yra žinomi m tiesiškai nepriklausomi homogeninės lygties

$$\mathrm{L}y := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{4.12}$$

sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Parodysime, kad šios lygties sprendimą galima suvesti į tiesinės homogeninės $n-m$-os eilės lygties sprendimą. Vietoje y apibrėžkime naują ieškomą funkciją z formule:

$$y(x) = \varphi_1(x) \int z(x)\, dx.$$

Tada

$$y'(x) = \varphi_1'(x) \int z(x)\, dx + \varphi_1(x)z(x),$$

$$y''(x) = \varphi_1''(x) \int z(x)\, dx + 2\varphi_1'(x)z(x) + \varphi_1(x)z'(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}(x) = \varphi_1^{(n)}(x) \int z(x)\, dx + \cdots + \varphi_1(x)z^{(n-1)}(x).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją y ir jos išvestines į (4.12), gausime lygtį

$$\mathrm{L}\varphi_1(x) \int z(x)\, dx + \varphi_1(x)z^{(n-1)}(x) + \cdots + Q(x)z(x) = 0.$$

Kadangi koeficientas $\mathrm{L}\varphi_1(x) = 0$, tai pastaroji lygtis yra tiesinė homogeninė $n-1$-os eilės lygtis. Padalinę ją iš φ_1, gausime lygtį

$$z^{(n-1)} + P_1(x)z^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)z = 0,$$

kurioje koeficientas prie $n-1$-os eilės išvestinės lygus vienetui. Be to,

$$z_k = \frac{d}{dx}\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big), \quad k = 2, \dots, m \quad \Big(\varphi_k(x) = \varphi_1(x)\int z_k(x)\,dx\Big)$$

yra $m-1$ tiesiškai nepriklausomi šios lygties sprendiniai (patikrinkite). Taigi lygties eilę sumažinome vienetu ir žinome $m-1$ tiesiškai nepriklausomą sprendinį. Todėl m kartų apibrėžę naują ieškomą funkciją, gausime tiesinę homogeninę $n-m$-os eilės lygtį.

P a v y z d y s. Tarkime, yra žinomas antros eilės lygties

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.13}$$

netrivialus sprendinys $y = \varphi(x)$. Apibrėžę naują ieškomą funkciją z formule

$$y(x) = \varphi(x)\int z(x)\,dx$$

gausime

$$y'(x) = \varphi'(x)\int z(x)\,dx + \varphi(x)z(x),$$

$$y''(x) = \varphi''(x)\int z(x)\,dx + 2\varphi'(x)z(x) + \varphi(x)z'(x).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkcijos y ir jos išvestinių y', y'' reikšmes į (4.13), gausime funkcijos z atžvilgiu tiesinę homogeninę lygtį

$$\varphi(x)z' + \big(p(x)\varphi(x) + 2\varphi'(x)\big)z = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(\varphi^2(x)z\big)' = -p(x)\varphi^2(x)z,$$

kurios bendrasis sprendinys

$$\varphi^2(x)z = Ce^{-\int p(x)\,dx} \;\Leftrightarrow\; z = C\varphi^{-2}(x)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Todėl

$$y = \varphi(x) \quad \text{ir} \quad y = \varphi(x)\int e^{-\int p(x)\,dx}\varphi^{-2}(x)\,dx$$

yra (4.13) lygties sprendiniai. Akivaizdu, kad jie yra tiesiškai nepriklausomi. Todėl jų tiesinis darinys yra (4.13) lygties bendrasis sprendinys.

4.4 TIESINĖS HOMOGENINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS

Tegu $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$. Nagrinėsime tiesinę homogeninę lygtį

$$\mathrm{L}\, y := y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0. \tag{4.14}$$

Šios lygties atskirojo sprendinio ieškosime pavidalu

$$y = e^{\lambda x}.$$

Visu pirma pastebėsime, kad realiems λ yra teisinga formulė

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}, \quad \forall n = 1, 2, \dots .$$

Be to, ji išlieka teisinga ir kompleksiniams λ. Norint tuo įsitikinti, reikia pasinauduoti Oilerio formule

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Kadangi operatorius L yra tiesinis, tai

$$\mathrm{L}\, e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n);$$

čia $\lambda \in \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$. Reiškinys skliaustuose yra n – ojo laipsnio polinomas. Pažymėkime

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n.$$

Polinomas $P(\lambda)$ vadinamas *charakteristiniu polinomu*. Lygtis

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

vadinama *charakteristine lygtimi*.

Lygybės

$$\mathrm{L}\, e^{\lambda x} = e^{\lambda x} P(\lambda)$$

dešinėje pusėje pirmasis daugiklis $e^{\lambda x} \neq 0$. Todėl funkcija $y = e^{\lambda x}$ yra (4.14) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai λ yra charakteristinio polinomo šaknis.

Iš tiesinės algebros yra žinoma, kad n-ojo laipsnio polinomas turi lygiai n šaknų $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dalis jų gali būti kompleksinės. Be to, kai kurios iš jų gali sutapti. Atskirai išnagrinėsime konkrečius galimus atvejus.

1. Charakteristinio polinomo P šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos ir realios. Tada funkcijos

   $$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

   yra tiesiškai nepriklausomi (4.14) lygties sprendiniai (žr. 4.1 skyrelį). Kadangi jų skaičius lygus n, tai jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą. Šių sprendinių tiesinis darinys

   $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

   yra (4.14) lygties bendrasis sprendinys (su realiais koeficientais $C_1, \dots, C_n$).

2. Carakteristinio polinomo P šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos, tačiau tarp jų yra ir kompleksinės. Tada Funkcijos

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

yra tiesiškai nepriklausomi (4.14) lygties kompleksiniai sprendiniai. Jų yra lygiai n. Todėl jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą ir

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

yra šios lygties bendrasis sprendinys. Čia $C_1, \dots, C_n$ – laisvos kompleksinės konstantos.

Tarkime, šaknys

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1, \dots, \lambda_{2m-1} = \alpha_m + i\beta_m, \lambda_{2m} = \alpha_m - i\beta_m$$

yra kompleksinės, o šaknys

$$\lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n -$$

realios. Kiekvieną porą kompleksinių jungtinių šaknų

$$\lambda_{2k-1} = \alpha_k + i\beta_k, \quad \lambda_{2k} = \alpha_k - i\beta_k$$

atitinka pora kompleksinių sprendinių

$$e^{(\alpha_k + i\beta_k)x}, \quad e^{(\alpha_k - i\beta_k)x}.$$

Kadangi (4.14) lygties koeficientai yra realūs, tai šių sprendinių realios ir menamos dalys

$$e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x, \quad e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x$$

taip pat yra šios lygties sprendiniai. Taigi kiekvieną kompleksiškai jungtinių (4.14) lygties sprendinių porą galima pakeisti dviem realiais šios lygties sprendiniais. Sprendiniai

$$e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x, e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x, k = 1, \dots, m, \quad e^{\lambda_{2m+1} x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

yra tiesiškai nepriklausomi (žr. 4.1 skyrelį) ir jų yra lygiai n. Todėl jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą ir

$$y = \sum_{k=1}^{m} \Big(C_k e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x + \tilde{C}_k e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x \Big) + \sum_{k=2m+1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}$$

yra šios lygties bendrasis sprendinys, $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

3. Carakteristinio polinomo P šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ yra realios ir kartotinės, kiekviena iš šaknų λ_k yra n_k kartotinumo, $n_k \geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{m} n_k = n$.

Tegu λ_k yra n_k kartotinumo šaknis. Tada

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{n_k} Q_k(\lambda)$$

ir

$$P(\lambda_k) = P'(\lambda_k) = \cdots = P^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0;$$

čia Q_k yra $n - n_k$ laipsnio polinomas.

Reiškinys

$$\frac{d^s}{d\lambda_k^s} \mathrm{L}\, e^{\lambda_k x} = \mathrm{L}\Big(x^s e^{\lambda_k x}\Big).$$

Kartu

$$\frac{d^s}{d\lambda_k^s} \mathrm{L}\, e^{\lambda_k x} = \frac{d^s}{d\lambda_k^s}\Big(e^{\lambda_k x} P(\lambda_k)\Big) =$$

$$\frac{d^s}{d\lambda^s}\Big(e^{\lambda x}(\lambda - \lambda_k)^{n_k} Q_k(\lambda)\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0, \quad \forall s = 1, \ldots, n_k - 1.$$

Todėl funkcijos

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{n_k-1} e^{\lambda_k x}$$

yra (4.14) lygties sprendiniai. Taigi kiekvieną n_k kartotinumo šaknį λ_k atitinka n_k sprendinių. Šaknis $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ atitinka sprendiniai

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x},$$

$$\ldots\ldots$$

$$e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{n_m-1} e^{\lambda_m x}.$$

Šie sprendiniai yra tiesiškai nepriklausomi (žr. 4.1 skyrelį). Jų yra lygiai n. Todėl jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą. Bendrąjį (4.14) lygties sprendinį galima užrašyti taip:

$$y = \sum_{k=1}^{m} P_k(x) e^{\lambda_k x};$$

čia

$$P_k(x) = C_{k1} + xC_{k2} + \cdots + x^{n_k-1} C_{kn_k}.$$

4. Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ yra (4.14) lygties skirtingos $n_1, \ldots, n_m$ kartotinumo kompleksinės šaknys.

   Jeigu $\lambda = \alpha + i\beta$ yra charakteristinio polinomo kompleksinė k kartotinumo šaknis, tai jungtinė kompleksinė šaknis $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ taip pat yra k kartotinumo. Todėl

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

$$e^{\overline{\lambda} x}, xe^{\overline{\lambda} x}, \ldots, x^{k-1} e^{\overline{\lambda} x}$$

yra (4.14) lygties tiesiškai nepriklausomi kompleksiniai sprendiniai (įrodymas yra toks pats kaip 3 atveju). Atskirę realią ir menamą dalis, gausime $2k$ (4.14) lygties realius sprendinius

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Taigi kiekvieną kompleksiškai jungtinę charakteristinio polinomo šaknų porą $\lambda, \overline{\lambda}$ kartotinumo k atitinka $2k$ tiesiškai nepriklausomų (4.14) lygties sprendinių.

Tegu $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, k = 1, \dots, m$. Tada

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x},$$

$$\dots\dots$$

$$e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{n_m-1}e^{\lambda_m x}$$

yra (4.14) lygties tiesiškai nepriklausomi kompleksiniai sprendiniai. Be to, jų yra lygiai n. Todėl jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą (virš kompleksinių skaičių lauko). Šių sprendinių realios ir menamos dalys

$$e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \dots, x^{n_k-1}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,$$

$$e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \dots, x^{n_k-1}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,$$

$k = 1, 2, \dots, m$ yra (4.14) lygties realūs sprendiniai. Jie yra tiesiškai nepriklausomi ir jų yra lygiai n. Todėl jie apibrėžia (4.14) lygties fundamentaliąją realių sprendinių sistemą (virš realių skaičių lauko). Šiuo atveju bendrąjį (4.14) lygties sprendinį galima užrašyti taip:

$$y = \sum_{k=1}^{m} P_k(x)e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x + \sum_{k=1}^{m} R_k(x)e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x;$$

čia

$$P_k(x) = C_{k1} + xC_{k2} + \dots + x^{n_k-1}C_{kn_k}.$$

$$R_k(x) = C^*_{k1} + xC^*_{k2} + \dots + x^{n_k-1}C^*_{kn_k}.$$

P a s t a b a. Atvejis, kai dalis šaknų yra realios ir kartotinės, o kita menamos ir kartotinės nagrinėjamas analogiškai.

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime diferencialinės lygties
$$y'' + 4y' + 3y = 0$$
bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ šaknys $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ yra realios ir skirtingos. Todėl nagrinėjama diferencialinė lygtis turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-3x}$, o jų tiesinis darinys
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$
yra bendrasis šios diferencialinės lygties sprendinys.

2. Rasime diferencialinės lygties
$$y^{(4)} + 4y = 0$$
bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties $\lambda^4 + 4 = 0$ šaknys $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$ yra kompleksinės. Be to, šaknys λ_1, λ_2 ir λ_3, λ_4 yra kompleksiškai jungtinės. Jas atitinka dvi poros kompleksiškai jungtinių sprendinių:
$$e^{(1\pm i)x} = e^x(\cos x \pm i \sin x), \quad e^{(-1\pm i)x} = e^{-x}(\cos x \pm i \sin x)$$
Šių sprendinių realiosios ir menamos dalys
$$e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ e^{-x} \cos x,\ e^{-x} \sin x$$
yra realūs tiesiškai nepriklausomi sprendiniai. Jų tiesinis darinys
$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)e^{-x}$$
yra bendrasis nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendinys.

3. Rasime diferencialinės lygties
$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$$
bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties
$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0$$
šaknys $\lambda_{1,2,3} = 0$, $\lambda_{4,5} = 3$ yra realios ir kartotinės. Šaknį $\lambda = 0$ atitinka trys realūs sprendiniai: 1, x ir x^2, o šaknį $\lambda = 3$ du realūs sprendiniai: e^{3x} ir xe^{3x}. Tačiau tada jų tiesinis darinys
$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)e^{3x}$$
yra bendrasis nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendinys.

4.5 TIESINĖS NEHOMOGENINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS

Nehomogeninės lygties

$$\mathrm{L}\, y := y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = q(x), \quad q \in \mathrm{C}(a,b), \tag{4.15}$$

su pastoviais koeficientais $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ atskirąjį sprendinį galima rasti konstantų varijavimo metodu. Tačiau, kai funkcija

$$q(x) = Q(x)e^{\mu x}, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i, \quad q_i \in \mathbb{R}, \quad q_m \neq 0, \tag{4.16}$$

šį sprendinį galima rasti neapibrėžtinių koeficientų metodu.

4.8 teorema. *Tegu (4.15) lygties koeficientai $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$, o funkcija q yra apibrėžta (4.16) formule. Tada*

1. *Jeigu μ nėra charakteristinio polinomo šaknis, tai (4.15) lygtis turi atskirą sprendinį*
$$y = R(x)e^{\mu x}, \quad R(x) = \sum_{i=0}^{m} r_i x^i, \quad r_m \neq 0.$$
2. *Jeigu μ yra charakteristinio polinomo šaknis ir k yra jos kartotinumas, tai (4.15) lygtis turi atskirą sprendinį*
$$y = x^k R(x)e^{\mu x}, \quad R(x) = \sum_{i=0}^{m} r_i x^i, \quad r_m \neq 0.$$

Be to, abiem atvejais polinomas R apibrėžiamas vienareikšmiai.

$\triangleleft$ Funkcija $y = x^k R(x)e^{\mu x}, k \geq 0$ yra (4.15) lygties sprendinys, tada ir tik tada, kai

$$\mathrm{L}\big(x^k R(x)e^{\mu x}\big) = Q(x)e^{\mu x} = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i e^{\mu x}. \tag{4.17}$$

Reiškinys

$$\mathrm{L}\Big(x^k R(x)e^{\mu x}\Big) = \mathrm{L}\big(\sum_{i=0}^{m} r_i x^{i+k} e^{\mu x}\big) = \sum_{i=0}^{m} r_i\, \mathrm{L}\big(x^{i+k} e^{\mu x}\big) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} r_i \frac{d^{i+k}}{d\mu^{i+k}}\, \mathrm{L}\, e^{\mu x} = \sum_{i=0}^{m} r_i \frac{d^{i+k}}{d\mu^{i+k}} \Big(P(\mu)e^{\mu x}\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \Big(r_i \sum_{j=0}^{i+k} C_{i+k}^{j} P^{(j)}(\mu) x^{i+k-j}\Big) e^{\mu x}.$$

Pagal prielaidą μ yra charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis (jeigu μ nėra charakteristinio polinomo šaknis, tai laikome, kad jos kartotinumas lygus nuliui). Todėl

$$P(\mu) = P'(\mu) = \cdots = P^{(k-1)}(\mu) = 0, \quad P^{(k)}(\mu) \neq 0$$

ir

$$\mathrm{L}\big(x^k R(x) e^{\mu x}\big) = \sum_{i=0}^{m} \Big(r_i \sum_{j=k}^{i+k} C_{i+k}^{j} P^{(j)}(\mu) x^{i+k-j} \Big) e^{\mu x}. \tag{4.18}$$

Sulyginę (4.17) ir (4.18) formulėse koeficientus prie vienodų x laipsniu, gausime

$$\begin{array}{rlcl}
x^0: & \sum\limits_{i=0}^{m} r_i C_{k+i}^{k+i} P^{(k+i)}(\mu) & = & q_0, \\
x^1: & \sum\limits_{i=1}^{m} r_i C_{k+i}^{k+i-1} P^{(k+i-1)}(\mu) & = & q_1, \\
\vdots & \qquad\vdots & \vdots & \vdots \\
x^s: & \sum\limits_{i=s}^{m} r_i C_{k+i}^{k+i-s} P^{(k+i-s)}(\mu) & = & q_s, \\
x^m: & r_m C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\mu) & = & q_m.
\end{array}$$

Kadangi $P^{(k)}(\mu) \neq 0$, tai kiekvienoje iš šių lygybių koeficiento r_i, su mažiausiu indeksu i, daugiklis nelygus nuliui. Todėl koeficientas r_m vienareikšmiai apibrėžiamas iš paskutiniosios lygybės. Po to koeficientas r_{m-1} vienareikšmiai apibrėžiamas iš priešpaskutiniosios lygybės ir t.t. Taigi visi koeficientai $r_1, \ldots, r_m$ randami vienareikšmiai. $\triangleright$

P a s t a b a. Teorema ir jos įrodymas lieka teisingi ir tuo atveju, kai $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$, o funkcija $q : (a, b) \to \mathbb{C}$.

P a s t a b a. Neapibrėžtųjų koeficientų metodą galima taikyti ir tuo atveju, kai

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i(x), \quad q_i(x) = Q_i(x) e^{\mu_i x};$$

čia $Q_i, i = 1, \ldots, m$ yra m_i laipsnio polinomas.

P a s t a b a. Neapibrėžtųjų koeficientų metodą galima taikyti ir tuo atveju, kai

$$q(x) = Q(x) e^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{4.19}$$

$$q(x) = Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x; \tag{4.20}$$

čia Q yra m-ojo laipsnio polinomas. Šiuo atveju reikia pasinauduoti formulėmis

$$\operatorname{Re} Q(x) e^{(\alpha + i\beta)x} = Q(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \operatorname{Im} Q(x) e^{(\alpha + i\beta)x} = Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ir pastebėti, kad funkcija $y = \varphi + i\psi$ yra lygties

$$\mathrm{L}\, y = Q(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

sprendinys tada ir tik tada, kai jos realioji dalis φ yra lygties

$$\mathrm{L}\, y = Q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

sprendinys, o menamoji dalis ψ yra lygties

$$\mathrm{L}\, y = Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

sprendinys.

Išvada. Tarkime, funkcija q yra apibrėžta (4.19) arba (4.20) formulėmis ir μ yra charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis. Tada (4.15) lygtis turi atskirą sprendinį

$$y = x^k e^{\alpha x}\Big(B(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x\Big);$$

čia B ir R yra m-ojo laipsnio polinomai su neapibrėžtiniais koeficientais.

Pavyzdžiai:

1. Rasime nehomogeninės diferencialinės lygties

$$y'' + y = 4xe^x$$

bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties $\lambda^2 + 1 = 0$ šaknys $\lambda_{1,2} = \pm i$ yra kompleksinės. Todėl homogeninė lygtis turi du kompleksiškai jungtinius sprendinius

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Šių sprendinių realioji ir menamoji dalys yra homogeninės lygties ralūs tiesiškai nepriklausomi sprendiniai. Todėl jų tiesinis darinys

$$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$$

yra homogeninės lygties bendrasis sprendinys.

Rasime nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį. Kadangi $1 \neq \pm i$, pastarąjį sprendinį galima ieškoti pavidalu

$$y_a = (Ax + B)e^x.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į nehomogeninę diferencialinę lygtį, gausime tapatybę

$$(Ax + 2A + B)e^x + (Ax + B)e^x = 4xe^x.$$

Suprastinę ją iš e^x ir sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių rasime: $A = 2$, $B = -2$. Taigi $y_a = (2x - 2)e^x$. Kartu bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x.$$

2. Rasime nehomogeninės diferencialinės lygties

$$y'' - 2y' + y = e^x/x$$

bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ šaknys $\lambda_{1,2} = 1$ yra realios ir kartotinės. Todėl homogeninė lygtis turi realius sprendinius e^x ir xe^x. Jų tiesinis darinys

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

yra homogeninės lygties bendrasis sprendinys.

Rasime atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį. Kadangi nagrinėjamos diferencialinės lygties dešinė pusė neturi specialaus pavidalo, tai atskirojo sprendinio ieškosime konstantų varijavimo metodu. Tegu

$$y_a = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x;$$

čia C_1 ir C_2 yra nežinomos funkcijos. Joms rasti sudarome diferencialinių lygčių sistemą

$$\left\{\begin{array}{ccccc} C_1'(x)e^x & + & C_2'(x)xe^x & = & 0 \\ C_1'(x)(e^x)' & + & C_2'(x)(xe^x)' & = & e^x/x. \end{array}\right.$$

Šios sistemos determinantas

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Pagal Kramerio formulę

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & xe^x + e^x \end{vmatrix}}{w(x)} = -1 \quad \Rightarrow C_1(x) = x + C_{10},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix}}{w(x)} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow C_2(x) = \ln|x| + C_{20}.$$

Atmetę čia constantas C_{10} ir C_{20} randame nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį

$$y_a = xe^x + \ln|x| \cdot xe^x.$$

Bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys

$$y = -xe^x + \ln|x| \cdot xe^x + (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Tiesinę lygtį

$$\mathrm{L}\, y := y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = q(x) \tag{4.21}$$

su kintamais koeficientais $p_1, \dots, p_n$ kartais pavyksta, įvedus naują nepriklausomą kintamąjį, suvesti į lygtį su pastoviais koeficientais. Tegu $\tau = g(x)$ yra naujas nepriklausomas kintamasis. Tada

$$\begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{dy}{d\tau} g', \\ y'' & = & \dfrac{d^2y}{d\tau^2} g'^2 + \dfrac{dy}{d\tau} g'', \\ \vdots & \vdots & \quad \vdots \\ y^{(n)} & = & \dfrac{d^ny}{d\tau^n} g'^n + \ldots + \dfrac{dy}{d\tau} g^{(n)}. \end{array}$$

Įstatę šias funkcijos y išvestinių reikšmes į (4.21) lygtį ir padalinę iš g'^n, gausime n-os eilės tiesinę lygtį

$$\frac{d^ny}{d\tau^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{d\tau} + \frac{p_n}{g'^n} y = \frac{q}{g'^n}.$$

Koeficientas prie funkcijos y bus pastovus, jeigu

$$g'^n = Cp_n,$$

t.y. kai

$$\tau = g(x) = \int \sqrt[n]{Cp_n(x)}\, dx. \tag{4.22}$$

Taigi (4.21) lygtį su kintamais koeficientais galima (įvedus naują nepriklausomą kintamąjį τ) suvesti į lygtį su pastoviais koeficientais tik tuo atveju, kai naujasis kintamasis yra apibrėžtas (4.22) formule.

P a v y z d y s. Nagrinėsime *Oilerio lygtį*

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = q(x);$$

čia $p_1, \dots, p_n$ – pastovūs koeficientai. Taškas $x = 0$ yra šios lygties ypatingas taškas. Tačiau kiekviename iš intervalų $(-\infty, 0)$ ir $(0, +\infty)$ yra patenkintos sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremų sąlygos. Išnagrinėsime atvejį kai $x > 0$.

Pagal (4.22) formulę

$$\tau = \int \sqrt[n]{Cp_n x^{-n}}\, dx = \sqrt[n]{Cp_n} \ln x.$$

Paėmę čia $C = p_n^{-1}$, gausime keitinį

$$\tau = \ln x$$

Suskaičiuosime išvestines

$$\begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{dy}{d\tau} \cdot \dfrac{1}{x}, \\ y'' & = & \dfrac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{dy}{d\tau} \cdot \Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = \Big(\dfrac{d^2y}{d\tau^2} - \dfrac{dy}{d\tau}\Big) \dfrac{1}{x^2}, \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ y^{(n)} & = & \Big(\dfrac{d^ny}{d\tau^n} + \ \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)! \dfrac{dy}{d\tau}\Big) \dfrac{1}{x^n}. \end{array}$$

Įstatę šias funkcijos y išvestinių reikšmes į Oilerio lygtį, gausime lygtį

$$\frac{d^n y}{d\tau^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d\tau^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{d\tau} + a_n y = q(e^\tau)$$

su pastoviais koeficientais $a_1, \ldots, a_n$.

4.6 TIESINĖS 2-OS EILĖS LYGTIES SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS SPRENDINIŲ TYRIMAS

Tiesinę antros eilės lygtį

$$\mathrm{L}\, y := y'' + 2ay' + by = q(x) \tag{4.23}$$

su pastoviais realiais koeficicientais a, b atitinka charakteristinė lygtis

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0.$$

Šios lygties šaknys

$$\lambda_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \lambda_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Išskirsime tokius atvejus:

1. Šaknys λ_1, λ_2 yra realios ir skirtingos, t.y.
$$a^2 - b > 0.$$
2. Šaknys λ_1, λ_2 yra realios ir sutampa, t.y
$$a^2 - b = 0.$$
3. Šaknys λ_1, λ_2 yra kompleksinės ir jų realioji dalis nelygi nuliui, t.y.
$$a^2 - b < 0, \quad a \neq 0.$$
4. Šaknys λ_1, λ_2 yra menamos, t.y.
$$a = 0, \quad b > 0.$$

Kiekvieną iš šių atveju išnagrinėsime atskirai.

1. Tegu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ir $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$. Tada bendrasis homogeninės lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ sprendinys
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$
Atskirą (4.23) lygties sprendinį galima rasti konstantų varijavimo metodu. Sudarome sistemą
$$C_1' e^{\lambda_1 x} + C_2' e^{\lambda_2 x} = 0, \quad C_1' \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2' \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = q(x).$$
Jos sprendinys
$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{-\lambda_1 s}\, ds,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{-\lambda_2 s}\, ds.$$

Todėl atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį galima apibrėžti taip:

$$\psi(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{-\lambda_1 s}\, ds + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{-\lambda_2 s}\, ds;$$

Čia integravimo rėžius x_1, x_2 reikia parinkti taip, kad integralai su atitinkamais rėžiais konverguotų.

Tegu ψ yra aprėžtas (4.23) lygties atskirasis sprendinys. Tada

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \psi(x)$$

yra bendrasis šios lygties sprendinys. Jeigu $\lambda_1 > 0$, tai taip apibrėžtas sprendinys bus aprėžtas tada ir tik tada, kai $C_1 = C_2 = 0$. Jeigu $\lambda_2 < 0$, tai visi (4.23) lygties sprendiniai yra aprėžti. Be to, $y(x) \to \psi(x)$, kai $x \to \infty$.

2. Tegu $\lambda_1 = \lambda_2 = -a, a^2 = b$ ir $a \neq 0$. Tada bendrasis homogeninės lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ sprendinys

$$y = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax}.$$

Atskirasis (4.23) lygties sprendinys

$$\psi(x) = e^{-ax} \int\limits_{x_1}^{x} (x - s) q(s) e^{as}\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų varijavimo metodu. Bendrasis (4.23) lygties sprendinys

$$y = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax} + \psi(x).$$

Tarkime, funkcija q yra aprėžta, $\max |q(x)| \leq M$. Išskirsime du atvejus: $a > 0$ ir $a < 0$. Tegu $a > 0$. Imkime $x_1 = -\infty$. Tada

$$|\psi(x)| \leq e^{-ax} M \int\limits_{-\infty}^{x} (x - s) e^{as}\, ds = M/a^2$$

ir galima įrodyti, kad $\psi(x) \to 0$, kai $x \to \pm\infty$. Be to, jeigu funkcija q yra periodinė su periodu ω, tai galima įrodyti, kad funkcija ψ taip pat yra periodinė su periodu ω. Analogiški teiginiai yra teisingi ir atveju $a < 0$. Čia tik reikia paimti $x_1 = \infty$.

3. Tegu $\lambda_1 = -\alpha - i\beta, \lambda_2 = -\alpha + i\beta, \alpha = a, \beta = \sqrt{b - a^2}$. Tada bendrasis homogeninės lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ sprendinys

$$y = C_1 e^{-\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{-\alpha x} \sin \beta x.$$

Atskirasis (4.23) lygties sprendinys

$$\psi(x) = \frac{\sin \beta x}{\beta} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \cos \beta s\, ds - \frac{\cos \beta x}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \sin \beta s\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų varijavimo metodu. Paėmę $x_1 = x_2$ perrašysime pastarąją formulę taip:

$$\psi(x) = \frac{1}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \sin(x - s)\beta\, ds.$$

Tarkime, funkcija q yra aprėžta, $\max |q(x)| = M$. Išskirsime du atvejus: $\alpha > 0$ ir $\alpha < 0$. Tegu $\alpha > 0$. Imkime $x_1 = -\infty$. Tada

$$|\psi(x)| \le M/\alpha\beta.$$

Tarkime toliau, $q(x) \to 0$, kai $x \to \pm\infty$. Tada galima įrodyti, kad $\psi(x) \to 0$, kai $x \to \pm\infty$. Be to, jeigu funkcija q yra periodinė su periodu ω, tai funkcija ψ tap pat yra ω – periodinė.

Analogiški teiginiai yra teisingi ir atveju $a < 0$. Čia tik reikia paimti $x_1 = \infty$.

Teigiamoms α reikšmėms bendrasis (4.23) lygties sprendinys

$$y = C_1 e^{-\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{-\alpha x} \sin \beta x + \psi(x),$$

yra aprėžtas, kai $x > 0$. Neigiamoms α reikšmėms jis yra aprėžtas, kai $x < 0$.

4. Tegu $a = 0, \beta = \sqrt{b}, b > 0,\ \lambda_1 = -i\beta,\ \lambda_2 = +i\beta$. Šiuo atveju (4.23) lygtį galime perrašyti taip:

$$y'' + \beta^2 y = q(x). \tag{4.24}$$

Homogeninės lygties

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

bendrasis sprendinys

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

Atskirasis (4.24) lygties sprendinys

$$\psi(x) = -\frac{\cos \beta x}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) \sin \beta s\, ds + \frac{\sin \beta x}{\beta} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) \cos \beta s\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų varijavimo metodu. Bendrasis (4.24) lygties sprendinys

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + \psi(x) = C \sin(\beta x + \tau) + \psi(x);$$

čia $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tau = \operatorname{arctg}(C_2/C_1)$. Jis yra aprėžtas tada ir tik tada, kai yra aprėžtas atskirasis (4.24) lygies sprendinys ψ.

Funkcija ψ yra aprėžta, jeigu yra aprėžti integralai:

$$Q_s(x, x_1) = \int_{x_1}^{x} q(s) \sin \beta s \, ds, \quad Q_c(x, x_2) = \int_{x_2}^{x} q(s) \cos \beta s \, ds.$$

Tačiau, jeigu šie integralai yra neaprėžti, tai dar nereiškia, kad funkcija ψ taip pat yra neaprėžta.

Tarkime, funkcija q yra aprėžta ir periodinė su periodu ω. Tada galima įrodyti, kad integralai Q_s, Q_c yra aprėžti, jeigu $\beta\omega \neq 2\pi m$. Jeigu $\beta\omega = 2\pi m$, tai šie integralai yra aprėžti tada ir tik tada, kai[1]

$$\int_0^{\omega} q(s) \sin \beta s \, ds = 0, \quad \int_0^{\omega} q(s) \cos \beta s \, ds = 0. \tag{4.25}$$

Tegu $x_1 = x_2 = -\infty$. Tada atskirasis (4.24) lygties sprendinys

$$\psi(x) = -\frac{\cos \beta x}{\beta} \int_{-\infty}^{x} q(s) \sin \beta s \, ds + \frac{\sin \beta x}{\beta} \int_{-\infty}^{x} q(s) \cos \beta s \, ds =$$

$$\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{x} q(s) \sin(x - s)\beta \, ds.$$

Kai $\beta\omega \neq 2\pi m$, jis yra aprėžtas. Jeigu yra patenkintos (4.25) sąlygos, tai atskirasis sprendinys yra aprėžtas ir kai $\beta\omega = 2\pi m$. Be to, abiem atvejais

$$\psi(x + \omega) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{x+\omega} q(s) \sin(x + \omega - s)\beta \, ds =$$

[1] Tarkime, funkciją q galima skleisti Furje eilute

$$q(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{2\pi k}{\omega} y + b_k \sin \frac{2\pi k}{\omega} y \Big);$$

čia

$$a_0 = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} q(s) \, ds, \; a_k = \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} q(s) \cos \frac{2\pi k}{\omega} s \, ds, \; b_k = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} q(s) \sin \frac{2\pi k}{\omega} s \, ds.$$

Todėl 4.25 sąlyga reiškia, kad šiame skleidinyje koeficientai a_m ir b_m lygūs nuliui.

$$\frac{1}{\beta}\int\limits_{-\infty}^{x} q(s+\omega)\sin(x-s)\beta\,ds = \psi(x),$$

t.y. atskirasis sprendinys ψ yra periodinė su periodu ω funkcija.

Tarkime, y yra (4.24) lygties periodinis sprendinys su periodu T. Tada

$$y'(x+T) = y'(x), \quad y''(x+T) = y''(x).$$

Todėl reiškinys kairėje (4.24) lygties pusėje yra periodinė su periodu T funkcija. Kartu šios lygties dešinė pusė yra periodinė su periodu T funkcija. Taigi T yra funkcijos q periodas. Tačiau funkcijos q periodas yra ω. Todėl $T = m\omega$, m – sveikas teigiamas skaičius.

Kiekvieną (4.24) lygties sprendinį galima išreikšti formule

$$y(x) = C\sin(\beta x + \tau) + \psi(x);$$

čia ψ – atskirasis (4.24) lygties sprendinys.

Tarkime, atskirasis sprendinys ψ yra periodinė su periodu ω funkcija. Tada bendrasis sprendinys y yra periodinė su periodu T funkcija tada ir tik tada, kai $\beta T = 2\pi k$, k – sveikas teigiamas skaičius. Jeigu $\beta\omega = 2\pi m$, tai bendrasis sprendinys y yra periodinė su periodu $T = \omega$ funkcija.

Tarkime, $\beta\omega = 2\pi m$ ir (4.25) sąlygos yra nepatenkintos. Funkcija

$$\psi(x) = -\frac{\cos\beta x}{\beta}\int\limits_{0}^{x} q(s)\sin\beta s\,ds + \frac{\sin\beta x}{\beta}\int\limits_{0}^{x} q(s)\cos\beta s\,ds =$$

$$\frac{1}{\beta}\int\limits_{n\omega}^{x} q(s)\sin\beta(x-s)\,ds.$$

yra atskirasis (4.24) lygties sprendinys. Kiekvieną nepriklausomo kintamojo reikšmę x atitinka sveikas teigiamas skaičius n toks, kad $x - n\omega < \omega$. Todėl atskirąjį sprendinį ψ galima perrašyti taip:

$$\psi(x) = \frac{1}{\beta}\int\limits_{0}^{n\omega} q(s)\sin\beta(x-s)\,ds + \frac{1}{\beta}\int\limits_{n\omega}^{x} q(s)\sin\beta(x-s)\,ds.$$

Antrasis iš šių integralų yra aprėžtas, o pirmasis integralas

$$\frac{1}{\beta}\int\limits_{0}^{n\omega} q(s)\sin\beta(x-s)\,ds = n\int\limits_{0}^{\omega} q(s)\sin\beta s\,ds \to \infty,$$

kai $n \to \infty$. Todėl atskirasis sprendinys $\psi(x) \to \infty$, kai $x \to \infty$. Taigi atskirasis sprendinys ψ yra neaprėžtas. Kartu yra neaprėžtas ir bet kuris (4.24) lygties sprendinys. Tokia situacija yra vadinama rezonansu.

P a v y z d y s. Nagrinėsime lygtį

$$y'' + \beta^2 y = A \sin \alpha x, \quad A > 0.$$

Išskirsime du atvejus:

1. $\alpha \neq \beta$;
2. $\alpha = \beta$.

Pirmuoju atveju atskirasis sprendinys

$$\psi(x) = \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2} \sin \alpha x.$$

Bendrasis sprendinys

$$y = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2} \sin \alpha x = C \sin(\beta x + \tau) + \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2} \sin \alpha x;$$

čia $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\tau = \operatorname{arctg}(C_2/C_1)$. Taigi pirmuoju atveju visi sprendiniai yra aprėžti.

Antruoju atveju atskirasis sprendinys

$$\psi(x) = -\frac{Ax}{2\beta} \cos \beta x.$$

Bendrasis sprendinys

$$y = C \sin(\beta x + \tau) - \frac{Ax}{2\beta} \cos \beta x.$$

Taigi antruoju atveju visi sprendiniai yra neaprėžti ir turime rezonansą.

Priminsime, kad $q(x) = A \sin \alpha x$. Todėl funkcijos q periodas $\omega = 2\pi/\alpha$. Jeigu $\beta = \alpha = 2\pi/\omega$, tai integralas

$$\int_0^\omega q(s) \sin \beta s \, ds = A \int_0^\omega \sin \alpha s \sin \beta s \, ds = \frac{A}{2}\omega \neq 0.$$

Taigi antruoju atveju (4.25) sąlygos yra nepatenkintos.

4.7 KRAŠTINIS UŽDAVINYS

Tiesinės n-os eilės lygties

$$\mathrm{L}\, y := y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y = q(x), \quad x \in (a,b), \quad q \in \mathrm{C}(a,b) \tag{4.26}$$

bendrasis sprendinys turi n laisvųjų konstantų. Koši uždavinio atveju yra n pradinių sąlygų, kurios vienareikšmiškai apibrėžia ieškomąjį sprendinį. Bendruoju atveju galimos ir kitokios sąlygos. Jas galima apibrėžti įvairiai. Tačiau jeigu šių sąlygų yra n ir jos yra nepriklausomos, tai galime tikėtis, kad jos vienareikšmiškai apibrėžia ieškomąjį sprendinį. Tokių sąlygų pavyzdys yra kraštinės sąlygos:

$$\mathbb{L}_i(y) := \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_{ik} y^{(k-1)}(a) + \beta_{ik} y^{(k-1)}(b)\big) = \sigma_i, \quad i = 1,\dots,n;$$

čia $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \sigma_i$ – fiksuoti realieji skaičiai.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad pradinės sąlygos yra atskiras kraštinių sąlygų atvejis, kai

$$\beta_{ik} = 0, \forall i,k = 1,\dots,n, \quad \alpha_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kai}\, i = k; \\ 0, & \text{kai}\, i \neq k. \end{cases}$$

Kai $n = 2$ dažnai yra nagrinėjamos kraštinės sąlygos

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \sigma_1, \quad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \sigma_2.$$

Tegu

$$\mathbb{L} = \mathrm{colon}(\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n), \quad \sigma = \mathrm{colon}(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

Tada kraštines sąlygas galima užrašyti taip:

$$\mathbb{L} y = \sigma. \tag{4.27}$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžtos kraštinės sąlygos yra tiesinės, t.y.

$$\mathbb{L}(y+\tilde{y}) = \mathbb{L}y + \mathbb{L}\tilde{y},$$

$$\mathbb{L}(\lambda y) = \lambda \mathbb{L} y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ieškosime (4.26) lygties sprendinio, tenkinančio (4.27) kraštines sąlygas. Toks uždavinys vadinamas *kraštiniu uždaviniu*. Jeigu $q(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ ir $\sigma = 0$, tai (4.26), (4.27) kraštinis uždavinys vadinamas *homogeniniu*. Priešingu atveju kraštinis uždavinis vadinamas *nehomogeniniu*.

Pradžioje nagrinėsime homogeninį kraštinį uždavinį

$$\mathrm{L}\, y = 0, \quad \mathbb{L} y = 0. \tag{4.28}$$

Akivaizdu, kad funkcija $y(x) = 0, x \in [a,b]$ yra šio uždavinio sprendinys. Išvesime būtiną ir pakankamą sąlygą kada (4.28) uždavinys turi tik trivialų sprendinį.

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ fundamentalioji sprendinių sistema. Tada šios lygties bendrasis sprendinys

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Pareikalavę, kad jis tenkintų kraštinę sąlygą $\mathbb{L}y = 0$, gausime n tiesinių algebrinių lygčių sistemą

$$\mathbb{L}_i y = C_1\mathbb{L}_i(\varphi_1) + \cdots + C_n\mathbb{L}_i(\varphi_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.29}$$

Šios sistemos determinantas

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbb{L}_1(\varphi_1) & \mathbb{L}_1(\varphi_2) & \dots & \mathbb{L}_1(\varphi_n) \\ \mathbb{L}_2(\varphi_1) & \mathbb{L}_2(\varphi_2) & \dots & \mathbb{L}_2(\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}_n(\varphi_1) & \mathbb{L}_n(\varphi_2) & \dots & \mathbb{L}_n(\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Iš tiesinės algebros yra žinoma, kad (4.29) sistema turi tik trivialų sprendinį tada ir tik tada, kai $\Delta \neq 0$. Taigi (4.28) kraštinis uždavinys turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kai $\Delta = 0$.

P a s t a b a. Jeigu (4.28) uždavinys yra Koši uždavinys, tai determinantas Δ yra Vronskio determinantas.

Kraštinį uždavinį su nehomogeninėmis kraštinėmis sąlygomis visada galima redukuoti į kraštinį uždavinį su homogeninėmis kraštinėmis sąlygomis. Iš tikrųjų, tegu h – kokia nors n kartų diferencijuojama funkcija ir $\mathbb{L}h = \sigma$. Tada apibrėžę naują ieškomą funkciją

$$u = y - h,$$

gausime to paties pavidalo lygtį

$$\mathrm{L}\, u = \mathrm{L}\, y - \mathrm{L}\, h = q - \mathrm{L}\, h = \tilde{q},$$

tačiau jau su homogenine kraštine sąlyga

$$\mathbb{L}u = \mathbb{L}y - \mathbb{L}h = \sigma - \sigma = 0.$$

Todėl toliau nagrinėsime kraštinį uždavinį

$$\mathrm{L}\, y = q, \tag{4.30}$$

$$\mathbb{L}y = 0. \tag{4.31}$$

4.9 teorema. *Tarkime (4.28) uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Tada (4.30), (4.31) kraštinis uždavinys turi vienintelį sprendinį. Be to, jį galima apibrėžti formule*

$$\varphi(x) = \int\limits_a^b G(x, s) q(s)\, ds; \tag{4.32}$$

čia funkcija G yra apibrėžta kvadrate $Q = [a, b] \times [a, b]$ ir tenkina sąlygas:

1. *Funkcija G ir visos jos išvestinės pagal kintamąjį x iki $(n-2)$-os eilės imtinai yra tolydžios kvadrate Q.*

2. *Išvestinė $\partial^{n-1}G/\partial x^{n-1}$ yra tolydi, kai $x \neq s$. Įstrižainėje $s = x$ ji turi trūkį*
$$\frac{\partial^{n-1}G(s+0,s)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(s-0,s)}{\partial x^{n-1}} = 1.$$

3. *Kiekvienam fiksuotam $s \in [a,b]$, funkcija G, kaip kintamojo x funkcija, tenkina homogeninę lygtį $\mathrm{L}\, y = 0$ (kai $x \neq s$) ir (4.31) homogeninę kraštinę sąlygą.*

◁ Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra homogeninės lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ fundamentalioji sprendinių sistema. Tada (žr. 4.1 skyrelį) funkcija

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_a^x \frac{W_{nk}(s)}{W(s)} q(s)\, ds$$

yra (4.30) lygties bendrasis sprendinys; čia W yra Vronskio determinantas, o determinantai W_{nk} yra Vronskio determinanto adjunktai, gaunamai išbraukus elementą esantį k-jo stulpelio ir n-os eilutės sankirtoje.

Pažymėkime

$$K^*(x,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \frac{W_{nk}(s)}{W(s)};$$

čia $a \le s \le x \le b$. Tada

$$K^*(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \dots & \varphi_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \varphi_2^{(n-2)}(s) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{4.33}$$

Apibrėžkime funkciją

$$K(x,s) = \begin{cases} K^*(x,s), & \text{kai } a \le s \le x \le b, ; \\ 0, & \text{kai } a \le x \le s \le b. \end{cases}$$

Laisvas konstantas $C_1, \dots, C_n$ apibrėžkime taip:

$$C_k = \int_a^b c_k(s) q(s)\, ds;$$

čia $c_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ – tolydžios funkcijos. Tada

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) q(s)\, ds, \tag{4.34}$$

$$G(x,s)=\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\varphi_k(x)+K(x,s). \tag{4.35}$$

Funkcijos K^* išvestinės pagal kintamąjį x iki $n-2$ eilės imtinai taške $x=s$ lygios nuliui, nes ji yra proporcinga determinantui su dviem vienodom eilutėm. Todėl funkcija G tenkina pirmąją teoremos sąlygą. Be to,

$$\frac{\partial^{n-1}G(s+0,s)}{\partial x^{n-1}}-\frac{\partial^{n-1}G(s-0,s)}{\partial x^{n-1}}=$$

$$\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \dots & \varphi_n(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \varphi_2^{(n-2)}(s) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(s)\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=1.$$

Todėl funkcija G tenkina antrąją teoremos sąlygą.

Su kiekviena fiksuota parametro s reikšme funkcija $G(x,s)$ yra funkcijų $\varphi_1,\dots,\ \varphi_n$ tiesinis darinys. Todėl, kai $x\neq s$, funkcija $G(x,s)$ kintamojo x atžvilgiu tenkina homogeninę lygtį $\mathrm{L}\,G(x,s)=0$. Priminsime, kad apibrėžiant funkciją G tolydžias funkcijas $c_1,\dots,c_n$ pasirinkome laisvai. Pareikalaukime, kad funkcija G tenkintų homogeninę kraštinę sąlygą

$$\mathbb{L}G=0.$$

Perrašykime šią sąlygą taip:

$$\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\mathbb{L}_j\varphi_k+\mathbb{L}_jK=0,\quad j=1,2,\dots,n.$$

Šios sistemos determinantas $\Delta\neq 0$, nes homogeninis kraštinis uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Be to, funkcijos $\mathbb{L}_jK$, kaip kintamojo $s\in[a,b]$ funkcijos, yra tolydžios. Todėl pastaroji sistema vienareikšmiškai apibrėžia segmente $[a,b]$ tolydžias funkcijas $c_1,\dots,c_n$, o funkcija G su taip parinktomis funkcijomis $c_1,\dots,c_n$ tenkina homogeninę kraštinę sąlygą. Kartu homogeninę kražtinę sąlygą tenkina ir funkcija y:

$$\mathbb{L}y=\int_a^b\mathbb{L}G(x,s)q(s)\,ds=0.$$

Taigi įrodėme, kad (4.30), (4.31) kraštinio uždavinio sprendinys egzistuoja, jį galima apibrėžti (4.34) formule ir funkcija G tenkina visas tris teoremos sąlygas. Beliko įrodyti, kad (4.34) formule apibrėžtas sprendinys yra vienintelis.

Tegu $y_1,\ y_2$ – du (4.30), (4.31) kraštinio uždavinio sprendiniai. Tada jų skirtumas yra homogeninio kraštinio uždavinio sprendinys. Tačiau pagal teoremos sąlyga toks uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Todėl šis skirtumas yra tapačiai lygus nuliui, t.y. $y_1(x)=y_2(x),\forall x\in[a,b]$. $\triangleright$

Funkcija G, tenkinanti 1) – 3) teoremos sąlygas, vadinama *Gryno funkcija*. Teoremoje įrodėme, kad Gryno funkcija egzistuoja, jeigu homogeninis kraštinis uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Jeigu pastaroji sąlyga yra patenkinta, tai 4.9 teoremos 1) – 3) sąlygos vienareikšmiškai apibrėžia funkciją G. Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad dviejų Gryno funkcijų skirtumas yra homogeninio kraštinio uždavinio sprendinys.

P a s t a b a. Iš 4.9 teoremos įrodymo išplaukia, kad (4.30), (4.31) kraštinio uždavinio sprendimas susiveda į Gryno funkcijos konstravimą. Atkreipsime dėmesį į tai, kad Gryno funkcija priklauso nuo operatorių L ir $\mathbb{L}$ koeficientų, tačiau nepriklauso nuo funkcijos q.

P a v y z d y s. Tegu $n = 2$. Nagrinėsime kraštinį uždavinį

$$\mathrm{L}\, y := y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x),$$

$$\mathbb{L}_1 y = \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = 0,$$

$$\mathbb{L}_2 y = \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0.$$

Bendruoju atveju Gryno funkcija yra apibrėžiama kaip homogeninės lygties tiesiškai nepriklausomų sprendinių tiesinis darinys. Nagrinėjamu atveju homogeninė lygtis $\mathrm{L}\, y = 0$ turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius φ_1, φ_2. Juos galima parinkti taip, kad pirmasis sprendinys φ_1 tenkintų pirmąją, o antrasis sprendinys φ_2 antrąją kraštines sąlygas. Todėl Gryno funkciją galima apibrėžti taip:

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & \text{kai } a \le s \le x \le b, \\ c_2(s)\varphi_2(x), & \text{kai } a \le x \le s \le b. \end{cases}$$

Iš tikrųjų, taip apibrėžta Gryno funkcija automatiškai tenkina 4.9 teoremos trečią sąlygą. Be to, ji tenkins pirmą ir antrą teoremos sąlygas, jeigu

$$c_1(s)\varphi_1(s) = c_2(s)\varphi_2(s),$$

$$c_2(s)\varphi_2'(s) = c_1(s)\varphi_1'(s) + 1.$$

Šios sąlygos c_1, c_2 atžvilgiu apibrėžia nehomogeninę dviejų tiesinių algebrinių lygčių sistemą, kurios determinantas yra nelygus nuliui. Todėl pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį.

P a s t a b a. Homogeninis kraštinis uždavinys visada turi trivialų sprendinį. Tačiau jis gali turėti ir netrivialų sprendinį. Nagrinėkime kraštinius uždavinius:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, y(\pi/2) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Pirmasis iš jų turi tik trivialų sprendinį $y = 0$. Antrasis uždavinys, be trivialaus sprendinio $y = 0$, turi ir netrivialų sprendinį $y = \sin x$. Taigi netrivialaus sprendinio egzistavimas priklauso ne tik nuo lygties bei kraštinių sąlygų koeficientų, bet ir nuo intervalo, kuriame ieškomas sprendinys.

Galimi ir tokie uždaviniai, kai tiesiogiai kraštinės sąlygos nėra apibrėžiamos. Išnagrinėsime tokio uždavinio pavyzdį. Tarkime, reikia rasti lygties

$$\mathrm{L}\, y := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x), \tag{4.36}$$

periodinį sprendinį; čia $p_1, \ldots, p_n$ – tolydžios funkcijos, o q – periodinė su periodu ω funkcija.

Tarkime, $y = \varphi(x)$ yra (4.36) lygties ω periodinis sprendinys. Tada jis tenkina kraštines sąlygas:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{L}_1\varphi & = & \varphi(0) - \varphi(\omega) = 0 \\ \mathbb{L}_2\varphi & = & \dot\varphi(0) - \dot\varphi(\omega) = 0 \\ \vdots & \vdots & \quad\vdots \\ \mathbb{L}_n\varphi & = & \varphi^{(n-1)}(0) - \varphi^{(n-1)}(\omega) = 0. \end{array} \tag{4.37}$$

Teisingas ir atvirkščias teiginys. Tegu $y = \varphi(x)$ yra (4.36) lygties sprendinys, tenkinantis (4.37) kraštines sąlygas. Tada funkcija $y = \psi(x) = \varphi(x + \omega)$ taip pat yra (4.36) lygties sprendinys. Be to,

$$\psi(0) = \varphi(\omega) = \varphi(0), \ldots, \psi^{(n-1)}(0) = \varphi^{(n-1)}(\omega) = \varphi^{(n-1)}(0).$$

Vadinasi sprendiniai ψ ir φ tenkina tas pačias pradines sąlygas. Pagal Koši uždavinio sprendinio vienaties teoremą jie sutampa, t.y. $\varphi(x + \omega) = \varphi(x), \forall x$.

Taigi (4.36) lygtis turi ω periodinį sprendinį tada ir tik tada, kai (4.36), (4.37) kraštinis uždavinys turi sprendinį. Pagal 4.9 teoremą pastarasis uždavinys turi vienintelį sprendinį, jeigu atitinkamas homogeninis uždavinys turi tik trivialų sprendinį.

Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra charqakteristinio polinomo P šaknys. Tarkime, paprastumo dėlei, kad jos visos yra skirtingos. Tada bendrasis homogeninės lygties $\mathrm{L}\, y = 0$ sprendinys

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Pareikalavę, kad jis tenkintų (4.37) kraštines sąlygas, gausime

$$\begin{array}{rcrl} C_1\Big(1 - e^{\lambda_1\omega}\Big) & + \cdots + & C_n\Big(1 - e^{\lambda_n\omega}\Big) & = 0, \\ C_1\lambda_1\Big(1 - e^{\lambda_2\omega}\Big) & + \cdots + & C_n\lambda_n\Big(1 - e^{\lambda_n\omega}\Big) & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ C_1\lambda_1^{n-1}\Big(1 - e^{\lambda_1\omega}\Big) & + \cdots + & C_n\lambda_n^{n-1}\Big(1 - e^{\lambda_n\omega}\Big) & = 0. \end{array} \tag{4.38}$$

Ši sistema turi vienintelį sprendinį $C_1 = \cdots = C_n = 0$, jeigu jos determinantas yra nelygūs nuliui. Taigi (4.36) lygtis turi vienintelį ω periodinį sprendinį, jeigu

$$\Big(1 - e^{\lambda_1\omega}\Big) \cdots \Big(1 - e^{\lambda_n\omega}\Big) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.39}$$

Kadangi Vandermondo determinantas

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

tai (4.39) nelygybė yra teisinga tada ir tik tada, kai

$$\lambda_k \neq \frac{2\pi i}{\omega} m, \quad k = 1, \ldots, n, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Analogiškas teiginys yra teisingas ir tuo atveju, kai šaknys $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra kartotinės.

5 SKYRIUS

Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos

Šiame skyriuje nagrinėsime pirmos eilės tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_1' & = & p_{11}(x)y_1 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x), \\ y_2' & = & p_{21}(x)y_1 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + q_2(x), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & p_{n1}(x)y_1 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x); \end{cases}$$

čia $p_{ij}, q_i \in \mathrm{C}(a,b)$, $i,j = 1,\dots,n$. Pažymėję

$$y = \mathrm{colon}(y_1,\dots,y_n), q = \mathrm{colon}(q_1,\dots,q_n), P = \{p_{ij}\},$$

perrašysime ją vektorinėje formoje

$$y' = P(x)y + q(x). \tag{5.1}$$

Pagal 3.4 teoremą (5.1) sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a,b)$$

egzistuoja, yra vienintelis ir jį galima pratęsti į visą intervalą (a,b).

Jeigu $q(x) = 0$, tai sistema vadinama homogenine. Priešingu atveju – nehomogenine. Iš pradžių nagrinėsime homogeninių lygčių sistemą. Po to, 5.2 skyrelyje, parodysime, kad tiesinės nehomogeninės lygčių sistemos sprendimas susiveda į tiesinės homogeninės lygčių sistemos sprendimą.

5.1 TIESINĖS HOMOGENINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Nagrinėsime tiesinių homogeninių lygčių sistemą

$$y' = P(x)y. \tag{5.2}$$

Jos sprendiniai turi svarbių išskirtinių savybių.

5.1 lema. *Tiesinės homogeninės lygčių sistemos sprendinių aibė yra tiesinė erdvė, t.y.*

1. *Jeigu vektorinė funkcija φ yra (5.2) sitemos sprendinys, tai $c\varphi$ taip pat yra šios sistemos sprendinys, c – skaliarinė konstanta;*

2. *Jeigu vektorinės funkcijos φ ir ψ yra (5.2) sitemos sprendiniai, tai $\varphi + \psi$ taip pat yra šios sistemos sprendinys.*

$\triangleleft$ Tegu vektorinės funkcijos φ ir ψ yra (5.2) sitemos sprendiniai. Tada

$$P(x)c\varphi = cP(x)\varphi = c\varphi' = \frac{d}{dx}(c\varphi),$$

$$P(x)(\varphi + \psi) = P(x)\varphi + P(x)\psi = \varphi' + \psi' = \frac{d}{dx}(\varphi + \psi).\triangleright$$

Išvada. Jeigu vektorinės funkcijos $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ yra (5.2) sistemos sprendiniai, tai jų tiesinis darinys

$$c_1\varphi^1 + \dots + c_m\varphi^m$$

taip pat yra (5.2) sistemos sprendinys.

5.2 lema. *Tegu $y = \varphi + i\psi$ yra kompleksinis (5.2) lygčių sistemos, su realiais koeficientais $p_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, sprendinys. Tada jo realioji ir menamoji dalys taip pat yra šios diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai.*

$\triangleleft$ Pagal (5.1) lemą

$$\varphi' + i\psi' = P(x)\varphi + iP(x)\psi.$$

Sulyginę realią ir menamą dalis, gausime

$$\varphi' = P(x)\varphi, \quad \psi' = P(x)\psi.\triangleright$$

Apibrėžimas. Sakysime, vektorinės funkcijos $\varphi^1, \dots, \varphi^m : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ yra *tiesiškai nepriklausomos*, jeigu lygybė

$$c_1\varphi^1(x) + \dots + c_m\varphi^m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

yra galima tik tuo atveju, kai $c_1 = \dots = c_m = 0$. Priešingu atveju sakysime, kad vektorinės funkcijos $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ yra *tiesiškai priklausomos.*

Vektorinės funkcijos $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ yra tiesiškai priklausomos, jeigu egzistuoja konstantos $c_1, \dots, c_m$, iš kurių bent viena nelygi nuliui, tokios, kad

$$c_1\varphi^1(x) + \dots + c_m\varphi^m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Jeigu vektorinės funkcijos $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ yra tiesiškai priklausomos, tai kiekviename fiksuotame taške $x_0 \in (a, b)$ vektoriai $\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^m(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi. Atvirštinis teiginys yra neteisingas. Tačiau, jeigu vektoriai $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ yra (5.2) sistemos sprendiniai ir jie yra tiesiškai priklausomi kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$, tai jie yra tiesiškai priklausomi visame intervale (a, b). Tiksliau yra teisinga teorema.

5.1 teorema. *Tegu $\varphi^1, \dots, \varphi^m : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ yra (5.2) sistemos sprendiniai ir kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$ vektoriai $\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^m(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi, t.y.*

$$c_1\varphi^1(x_0) + \dots + c_m\varphi^m(x_0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0.$$

Tada

$$c_1\varphi^1(x) + \dots + c_m\varphi^m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

$\triangleleft$ Pagal 5.1 lemos išvadą funkcija

$$\varphi(x) = c_1\varphi^1(x) + \cdots + c_m\varphi^m(x)$$

yra (5.2) sistemos sprendinys. Be to, taške $x_0 \in (a,b)$ jis tenkina homogeninę pradinę sąlygą

$$\varphi(x_0) = c_1\varphi^1(x_0) + \cdots + c_m\varphi^m(x_0) = 0.$$

Vektorinė funkcija $\psi(x) \equiv 0$ taip pat tenkina (5.2) sistemą ir tą pačią homogeninę pradinę sąlygą. Pagal sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą (žr. 3.4 teoremą) šie sprendiniai sutampa, t.y. $\varphi(x) = 0, \forall x \in (a,b)$. $\triangleright$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ yra (5.2) sistemos *sprendinių erdvės bazė*, jeigu bet kokį šios sistemos sprendinį, vieninteliu būdu, galima išreikšti pavidalu

$$\varphi(x) = c_1\varphi^1(x) + \cdots + c_n\varphi^n(x), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Konstantos $c_1, \ldots, c_n$ vadinamos sprendinio φ *koordinatėmis* šioje bazėje.

5.2 teorema. *Bet kokie n tiesiškai nepriklausomi (5.2) sistemos sprendiniai yra šios sistemos sprendinių erdvės bazė.*

$\triangleleft$ Tegu $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ – n tiesiškai nepriklausomi (5.2) sistemos sprendiniai. Pagal 5.1 teoremą vektoriai $\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)$ yra tiesiškai nepriklausomi, $\forall x_0 \in (a,b)$. Todėl šie vektoriai yra erdvės $\mathbb{R}^n$ bazė.

Laisvai pasirenkame (5.2) sistemos sprendinį ψ. Vektorius $\psi(x_0) \in \mathbb{R}^n$. Išreiškę jį per bazinius vektorius $\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)$, gausime

$$\psi(x_0) = c_1\varphi^1(x_0) + \cdots + c_n\varphi^n(x_0).$$

Iš šios lygybės matome, kad vektoriai $\psi(x_0), \varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi taške x_0. Pagal 5.1 teoremą jie yra tiesiškai priklausomi visame intervale (a,b) (su tais pačiais koeficientais), t.y.

$$\psi(x) = c_1\varphi^1(x) + \cdots + c_n\varphi^n(x). \triangleright$$

I š v a d a. Bet kokie (5.2) sistemos sprendiniai $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ yra šios sistemos sprendinių erdvės bazė, jeigu kokiame nors taške $x_0 \in (a,b)$ vektoriai $\varphi^1(x_0), \ldots, \varphi^n(x_0)$ yra tiesiškai nepriklausomi. Be to, bet kokie $n+1$ šios sistemos sprendiniai $\varphi^1, \ldots, \varphi^n, \varphi^{n+1}$ yra tiesiškai priklausomi.

Atkreipsime demesį į tai, kad (5.2) sistemos sprendinių erdvės bazė egzistuoja. Vektorius $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ galima apibrėžti kaip Koši uždavinių

$$\begin{array}{lcll}
y' & = & P(x)y, & y(x_0) = (1,0,\ldots,0), \\
y' & = & P(x)y, & y(x_0) = (0,1,\ldots,0), \\
\vdots & & & \qquad\vdots \\
y' & = & P(x)y, & y(x_0) = (0,\ldots,0,1);
\end{array}$$

sprendinius.

Sprendinių erdvės bazė dažnai yra vadinama *fundamentaliąja sprendinių sistema.* Tegu $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ yra (5.2)sistemos fundamentalioji sprendinių sistema. Tada funkcija

$$\varphi(x) = c_1\varphi^1(x) + \cdots + c_n\varphi^n(x) \tag{5.3}$$

su laisvais koeficientais $c_1, \dots, c_n$ yra (5.2) sistemos bendrasis sprendinys. Iš tikrųjų, funkcija φ, apibrėžta (5.3) formule, yra (5.2) sistemos sprendinys su kiekvienu konstantų rinkiniu $c_1, \dots, c_n$. Tegu $y = \psi(x)$ yra koks nors (5.2) sistemos sprendinys. Tada tiesinė algebrinių lygčių sistema

$$\psi(x_0) = c_1\varphi^1(x_0) + \cdots + c_n\varphi^n(x_0)$$

turi vienintelį netrivialų sprendinį $c_1^0, \dots, c_n^0$. Funkcija

$$\varphi_0(x) = c_1^0\varphi^1(x) + \cdots + c_n^0\varphi^n(x)$$

taip pat yra (5.2) sistemos sprendinys tenkinantis sąlygą $\varphi_0(x_0) = \psi(x_0)$. Pagal sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą $\varphi_0(x) = \psi(x), \forall x \in (a, b)$. Taigi funkciją ψ galima išreikšti (5.3) formule.

Tegu $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ – fundamentalioji sprendinių sistema, Φ – iš vektorių φ^1, $\dots$, φ^n sudaryta matrica. Matrica Φ vadinama *fundamentaliaja matrica*, o determinantas $W(x) = \det \Phi(x)$ – *Vronskio determinantu.* Pažymėję $c = \mathrm{colon}(c_1, \dots, c_n)$ bendrąjį (5.2) sistemos sprendinį galime užrašyti taip:

$$\varphi(x) = \Phi(x)c. \tag{5.4}$$

Tegu Φ yra (5.2) sistemos fundamentalioji matrica ir Ψ yra kokia nors kita šios sistemos fundamentalioji matrica. Tada egzistuoja neišsigimusi matrica C tokia, kad

$$\Phi(x) = \Psi(x)C. \tag{5.5}$$

5.3 teorema. *Teiginiai*

1. $W(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$;
2. $W(x_0) = 0$, *kokiame nors taške* $x_0 \in (a, b)$;
3. *Sprendiniai* $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ *– tiesiškai priklausomi;*

yra ekvivalentūs.

$\triangleleft$ Įrodysime, kad $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Implikacija $1 \Rightarrow 2$ yra akivaizdi. Tarkime, $W(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$. Tada vektoriai $\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi. Pagal 5.1 teoremą sprendiniai $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ yra tiesiškai priklausomi. Taigi iš $2 \Rightarrow 3$. Tarkime, sprendiniai $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ yra tiesiškai priklausomi. Tada vektoriai $\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)$, $x \in (a, b)$ yra tiesiškai priklausomi ir iš jų sudarytas determinantas yra lygus nuliui. $\triangleright$

Tegu $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ – fundamentalioji sprendinių sistema, $W = \det \Phi$ – ją atitinkantis Vronskio determinantas, $\varphi^k = \operatorname{colon}(\varphi_{k1}, \dots, \varphi_{kn})$, $k = 1, \dots, n$. Tada

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{k1} & \dots & \varphi_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(x) & \cdots & \varphi_{kn} & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Jo išvestinė

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi'_{k1} & \dots & \varphi_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(x) & \cdots & \varphi'_{kn} & \dots & \varphi_{nn}(x). \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

Kiekviena iš funkcijų φ^k yra (5.2) sistemos sprendinys. Todėl

$$\varphi'_{ki} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\varphi_{kj}$$

ir

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}\varphi_{kj} & \dots & \varphi_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(x) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{nj}\varphi_{kj} & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Išskleidę determinantą po sumos ženklu, gausime sumą determinantų su koeficientais p_{ij}, iš kurių vienas prie koeficiento p_{ii} lygus $W(x)$, o kiti lygūs nuliui. Taigi

$$W'(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ii}\Big) W(x).$$

Ši lygtis yra pirmos eilės tiesinė homogeninė diferencialinė lygtis. Jos sprendinys

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x)\, dx \right\}. \tag{5.7}$$

Pastaroji formulė vadinama Liuvilio formule.

Nagrinėjant (5.2) sistemą lygiagrečiai patogu nagrinėti *jungtinę* sistemą

$$y' = -P^*(x)y; \tag{5.8}$$

čia P^* – transponuota matrica matricai P. Tarkime, $\Phi(x)$ yra (5.2) sistemos fundamentalioji matrica. Tada

$$\Phi^{-1}(x)\Phi(x) = E;$$

čia E – vienetinė matrica. Jos išvestinė

$$\frac{d}{dx}\big(\Phi^{-1}(x)\Phi(x)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(\Phi^{-1}(x)\big)\Phi(x) + \Phi^{-1}(x)P(x)\Phi(x) = 0.$$

Suprastinę abi šios lygybės puses iš neišsigimusios matricos $\Phi(x)$, gausime formulę

$$\frac{d}{dx}\big(\Phi^{-1}(x)\big) = -\Phi^{-1}(x)P(x).$$

Iš tiesinės algebros žinome, kad $(AB)^* = B^*A^*$. Todėl pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$\frac{d}{dx}\big(\Phi^{-1}(x)\big)^* = -P^*(x)\big(\Phi^{-1}(x)\big)^*.$$

Taigi matrica $\big(\Phi^{-1}(x)\big)^*$ yra jungtinės sistemos fundamentalioji matrica. Jeigu $\Psi(x)$ yra kokia nors jungtinės sistemos fundamentalioji matrica, tai egzistuoja neišsigimusi matrica C tokia, kad

$$\Psi(x) = \big(\Phi^{-1}(x)\big)^*C \;\Rightarrow\; \Psi^*(x) = C^*\Phi^{-1}(x) \;\Rightarrow\; \Psi^*(x)\Phi(x) = C^*. \tag{5.9}$$

Tegu $\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ir $\psi = \mathrm{colon}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ yra atitinkamai (5.2) ir (5.8) sistemų sprendiniai. Tada

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{i=1}^n \varphi_i\psi_i\Big) = \sum_{i=1}^n \varphi_i'\psi_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i\psi_i' =$$

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}\varphi_j\psi_i - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}\psi_j\varphi_i = 0,$$

jeigu $p_{ij} = p_{ji}$. Taigi, jeigu žinome kokį nors (5.8) sistemos kokį nors sprendinį ψ ir matrica P yra simetrinė, tai neintegruodami (5.2) sistemos galime parašyti jos bendrąjį integralą

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i\psi_i = const. \tag{5.10}$$

Jeigu $P^*(x) = -P(x)$, tai (5.2) sistema vadinama *savijunge.* Savijungės sistemos koeficientai turi tenkinti sąlygą

$$p_{ij}(x) = -p_{ji}(x).$$

Iš šios sąlygos gauname $p_{ii} = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Sąvijungės sistemos atveju (5.9) formulėje galima imti $\Psi(x) = \Phi(x)$. Taigi savijungėms sistemoms yra teisinga formulė

$$\Phi^*(x)\Phi(x) = C : \tag{5.11}$$

čia C – pastovioji matrica.

Tegu $\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – koks nors savijungės sistemos sprendinys. Pagal (5.11) formulę

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x) = const.$$

Todėl kiekvienas atskiras savijungės sistemos sprendinys yra aprėžtas. Tiksliau kiekvieno savijungės sistemos sprendinio euklidinis ilgis yra pastovus.

5.2 NEHOMOGENINĖS TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Tegu $\psi = \mathrm{colon}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ yra koks nors tiesinės nehomogeninės lygčių sistemos

$$y' = P(x)y + q(x), \quad p_{ij}, q_i \in \mathrm{C}(a,b), i,j = 1,2,\dots,n \tag{5.12}$$

sprendinys. Padarę keitinį $y = u + \psi$, gausime tiesinę homogeninę lygčių sistemą

$$u' = P(x)u. \tag{5.13}$$

Tarkime $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ yra šios sistemos fundamentalioji sprendinių sistema intervale (a,b), $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ – fundamentalioji matrica. Tada jos bendrasis sprendinys

$$u = c_1\varphi^1(x) + \dots + c_n\varphi^n(x) = \Phi(x)c, \quad c = \mathrm{colon}(c_1, \dots, c_n).$$

Kartu

$$y = \psi(x) + c_1\varphi^1(x) + \dots + c_n\varphi^n(x) = \psi(x) + \Phi(x)c \tag{5.14}$$

yra (5.12) sistemos sprendinys. Įrodysime, kad (5.14) formulė apibrėžia bendrąjį (5.12) sistemos sprendinį juostoje $x \in (a,b)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Akivaizdu, kad kiekvienam konstantų rinkiniui $c_1, \dots, c_n$ (5.14) formulė apibrėžia (5.12) sistemos sprendinį. Tegu $y = \varphi(x)$ yra Koši uždavinio

$$y' = P(x)y + q(x), \quad y(x_0) = x_0$$

sprendinys. Tiesinė algebrinių lygčių sistema

$$\psi(x_0) + c_1\varphi^1(x_0) + \dots + c_n\varphi^n(x_0) = y_0$$

turi vienintelį sprendinį, nes jos determinantas nelygus nuliui. Pažymėkime jį $c_1^0, \dots, c_n^0$. Tada funkcijos

$$y = \varphi(x) \text{ ir } \quad y = \psi(x) + c_1^0\varphi^1(x) + \dots + c_n^0\varphi^n(x)$$

yra to paties Koši uždavinio sprendiniai. Pagal Koši uždavinio sprendinių vienaties teoremą jie sutampa. Taigi kiekvieną Koši uždavinio sprendinį galima išreikšti (5.14) formule.

I š v a d a. Bendrasis (5.12) sistemos sprendinys išreiškiamas formule

$$y = \psi(x) + u(x);$$

čia ψ – koks nors atskirasis (5.12) sistemos sprendinys, o u – bendrasis (5.13) sistemos sprendinys.

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – fundamentalioji (5.13) sistemos sprendinių sistema, Φ – iš jų sudaryta fundamentalioji matrica. Rasime atskirąjį (5.12) sistemos sprendinį. Jį ieškosime konstantų varijavimo metodu.

Apibrėžkime funkciją

$$\psi(x) = \Phi(x)c(x);$$

čia $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ – vektorinė funkcija. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (5.12) sistemą, gausime

$$\Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = P(x)\Phi(x)c(x) + q(x).$$

Fundamentalioji matrica Φ tenkina homogeninę sistemą, t.y.

$$\Phi'(x) = P(x)\Phi(x).$$

Todėl vektorinė funkcija c turi tenkinti sistemą

$$\Phi(x)c'(x) = q(x).$$

Šios sistemos determinantas

$$W(x) = \det \Phi(x) \neq 0.$$

Todėl ją galima išspręsti c' atžvilgiu, t.y.

$$c'(x) = \Phi^{-1}(x)q(x).$$

Suintegravę šią lygybę nuo x_0 iki x, gausime

$$c(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\tau)q(\tau)\, d\tau + c_0;$$

čia c_0 – pastovus vektorius. Atmetę jį randame atskirąjį (5.12) sistemos sprendinį

$$\psi(x) = \Phi(x) \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\tau)q(\tau)\, d\tau. \tag{5.15}$$

Bendrasis (5.13) sistemos sprendinys

$$u = \Phi(x)c;$$

čia $c \in \mathbb{R}^n$ – pastovus vektorius. Todėl (5.12) sistemos bendrasis sprendinys

$$y = \Phi(x) \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\tau)q(\tau)\, d\tau + \Phi(x)c. \tag{5.16}$$

5.3 TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS

Nagrinėsime sistemą

$$y' = Py + q(x), \tag{5.17}$$

kurioje matricos P elementai p_{ij} yra pastovūs realieji skaičiai, vektoriaus q elementai $q_i \in \mathrm{C}(a,b)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Šios sistemos sprendimas susiveda į homogeninės sistemos

$$y' = Py \tag{5.18}$$

sprendimą. Iš tikrųjų, jeigu žinome kokią nors (5.18) sistemos fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai konstantų varijavimo metodu galime rasti (5.17) sistemos atskirąjį sprendinį. Kartu galime rasti ir jos bendrąjį sprendinį. Todėl toliau nagrinėsime (5.18) sistemą.

Atskirojo (5.18) sistemos sprendinio ieškosime pavidalu

$$y = ae^{\lambda x}, \quad a = \mathrm{colon}(a_1,\ldots,a_n).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (5.18) sistemą, gausime

$$\lambda a e^{\lambda x} = Pae^{\lambda x} \iff Pa = \lambda a.$$

Tai yra tiesinė homogeninė n algebrinių lygčių sistema $a_1,\ldots,a_n$ atžvilgiu.

A p i b r ė ž i m a s Parametro λ reikšmė, su kuria egzistuoja netrivialus sistemos $Pa = \lambda a$ sprendinys, vadinama matricos P *tikrine reikšme*, o ją atitinkantis netrivialus sprendinys a – *tikriniu vektoriumi*.

Sistema $Pa = \lambda a$ turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kai

$$p(\lambda) := \det(P - \lambda E) = 0. \tag{5.19}$$

Taigi λ yra matricos P tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai λ yra (5.19) lygties šaknis. Ši lygtis vadinama *charakteristine lygtimi* (5.18) sistemai. Parametro λ atžvilgiu kairioji charakteristinės lygties pusė yra n-ojo laipsnio polinomas $p(\lambda)$. Jis vadinamas *charakteristiniu polinomu*. Iš tiesinės algebros yra žinoma, kad n-ojo laipsnio polinomas turi lygiai n šaknų. Tegu $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ yra charakteristinio polinomo šaknys. Atskirai išnagrinėsime tris atvejus:

1. Šaknys $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ yra skirtingos ir realios.
2. Šaknys $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ yra skirtingos, tačiau tarp jų yra kompleksinės.
3. Kai kurios iš šaknų $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ yra kartotinės.

Iš pradžiu išnagrinėsime atvejį, kai šaknys $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ yra skirtingos ir realios. Šiuo atveju funkcija

$$p(\lambda) = \det(P - \lambda E)$$

lygi nuliui taškuose $\lambda = \lambda_i$, $i = 1,\ldots,n$. Jos išvestinė $p'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} \neq 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$. Todėl matricos $P - \lambda_i E$ rangas lygus $n-1$, $\forall i = 1,\ldots,n$. Tačiau tada algebrinių lygčių sistema

$$(P - \lambda_i E)a^i = 0,$$

turi vienintelį, daugiklio tikslumu, netrivialų sprendinį

$$a^i = \mathrm{colon}(a_1^i, \dots, a_n^i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

o vektorinės funkcijos

$$a^1 e^{\lambda_1 x}, \dots, a^n e^{\lambda_n x} \tag{5.20}$$

yra (5.18) sistemos sprendiniai. Be to, jie yra tiesiškai nepriklausomi (patikrinkite). Todėl vektorinės funkcijos (5.20) yra fundamentalioji sprendinių sistema.

Išnagrinėsime antrąjį atvejį. Tarkime, šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos, tačiau tarp jų yra kompleksinės. Tegu viena iš kompleksinių šaknų $\sigma = \alpha + i\beta$. Tada $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$ taip pat yra kompleksinė šaknis, t.y. kompleksinės šaknys įeina poromis. Šaknį σ atitinka algebrinių lygčių sistema

$$(P - \sigma E)a = 0.$$

Kadangi visos šaknys yra skirtingos, tai ši sitema turi vienintelį, daugiklio tikslumu, netrivialų kompleksinį sprendinį $a = u + iv$ ir

$$ae^{\sigma x} = (u + iv)e^{(\alpha + i\beta)x} = (u + iv)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

yra (5.18) sistemos kompleksinis sprendinys[1]. Atskyrę jame realią ir menamą dalis, gausime du realius (5.18) sistemos sprendinius

$$(u\cos\beta x - v\sin\beta x)e^{\alpha x}, \quad (v\cos\beta x + u\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Lengvai galima įsitikinti, kad kompleksiškai jungtinę šaknį $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$ atitinka ta pati realių sprendinių pora. Kartu kiekvieną kompleksiškai jungtinių šaknų porą atitinka du realūs sprendiniai, o skirtingas n šaknų atitinka lygiai n realių sprendinių. Be to, šie sprendiniai yra tiesiškai nepriklausomi. Norint tuo įsitikinti reikia grįžti nuo trigonometrinių prie rodiklinių funkcijų.

Išnagrinėsime trečiąjį atvejį. Tarkime, dalis šaknų $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra kartotinės. Jeigu kurios nors šaknies, pavyzdžiui λ_1, kartotinumas lygus vienetui, tai nepriklausomai nuo to kokios yra kitos šaknys, ją visada atitinka sprendinys $ae^{\lambda_1 x}$, $a = \mathrm{colon}(a_1, \dots, a_n)$ – netrivialus algebrinių lygčių sistemos $\big(P - \lambda_1 E\big)a = 0$ sprendinys.

Tegu λ^* yra charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad šią šaknį atitinka sprendinys

$$P_{k-1}(x)e^{\lambda^* x}, \quad P_{k-1}(x) = \mathrm{colon}(P_{k-1}^1(x), \dots, P_{k-1}^n(x));$$

čia $P_{k-1}^1(x), \dots, P_{k-1}^n(x)$ yra $s \le k-1$ laipsnio polinomai, turintis visumoje lygiai k laisvų koeficientų.

[1] Kompleksinė funkcija $y = u + iv$ yra (5.18) sistemos sprendinys, jeigu

$$u' + iv' = Pu + iPv.$$

Tuo atveju, kai matricos P koeficientai yra realūs, kompleksinio sprendinio realioji ir menamoji dalys taip pat yra (5.18) sistemos sprendiniai.

Kai $k = 1$ šaknį λ^* atitinka vienintelis, daugiklio tikslumu, netrivialus sprendinys

$$ae^{\lambda^* x}, \quad a = \operatorname{colon}(a_1, \ldots, a_n).$$

Todėl vieną iš koeficientų $a_1, \ldots, a_n$ galime pasirinkti laisvai.

Tarkime, suformuluotas teiginys yra teisingas, kai $k = r$. Įrodysime, kad jis yra teisingas, kai $k = r + 1$. Tegu λ^* yra kokia nors charakteristinio polinomo $r + 1$ kartotinumo šaknis. Šią šaknį, daugiklio tikslumu, atitinka netrivialus sprendinys

$$ae^{\lambda^* x}, \quad a = \operatorname{colon}(a_1, \ldots, a_n).$$

Vienas iš koeficientų $a_1, \ldots, a_n$ yra nelygus nului. Todėl jį galima pasirinkti laisvai. Pavyzdžiui, jeigu $a_1 \neq 0$, tai galime imti $a_1 = 1$.

Apibrėžkime naują ieškomą funkciją u formule

$$y = Qu; \tag{5.21}$$

čia

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (5.18) sistemą, gausime

$$Qu' = PQu \iff u' = Q^{-1}PQu. \tag{5.22}$$

Matricos Q determinantas $\det Q = 1$. Todėl egzistuoja atvirštinė matrica Q^{-1} ir $\det Q^{-1} = 1$. Be to,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -a_n & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pagal vektoriaus a apibrėžimą $Pa = \lambda^* a$. Pasinaudoję šią savybe tiesiogiai galime įsitikinti, kad

$$Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} \lambda^* & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} - a_2 p_{12} & \ldots & p_{2n} - a_2 p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{n2} - a_n p_{12} & \ldots & p_{nn} - a_n p_{1n} \end{pmatrix}.$$

Pagal indukcinę prielaidą

$$\det(P - \lambda E) = (\lambda - \lambda^*)^{r+1} f(\lambda), \quad f(\lambda)|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0.$$

Pasinaudoję gauta matricos $Q^{-1}PQ$ išraiška (5.22) sitemą galime perrašyti taip:

$$\begin{cases} u_1' &= \lambda^* u_1 \quad + p_{12}u_2 + \ldots + p_{1n}u_n \\ u_2' &= (p_{22} - a_2 p_{12})u_2 + \ldots + (p_{2n} - a_2 p_{1n})u_n \\ \vdots & \\ u_n' &= (p_{n2} - a_n p_{12})u_2 + \ldots + (p_{nn} - a_n p_{1n})u_n \end{cases} \tag{5.23}$$

Atmetę joje pirmąją lygtį, gausime sitemą

$$\begin{cases} u_2' &= (p_{22} - a_2 p_{12})u_2 + \ldots + (p_{2n} - a_2 p_{1n})u_n, \\ \vdots & \\ u_n' &= (p_{n2} - a_n p_{12})u_2 + \ldots + (p_{nn} - a_n p_{1n})u_n. \end{cases} \tag{5.24}$$

Charakteristinis (5.23) sistemos polinomas

$$\det(Q^{-1}PQ - \lambda E) = \det Q^{-1}(P - \lambda E)Q =$$

$$\det Q^{-1} \det(P - \lambda E) \det Q = \det(P - \lambda E) = (\lambda - \lambda^*)^{r+1} f(\lambda).$$

Antra vertus

$$\det(Q^{-1}PQ - \lambda E) = (\lambda - \lambda^*)\Delta(\lambda);$$

čia $\Delta(\lambda)$ yra (5.24) sistemos charakteristinis polinomas. Sulyginę pastarasias formules, gausime

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^r f(\lambda), \quad f(\lambda)|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0.$$

Taigi λ^* yra (5.24) sistemos charakteristinio polinomo r kartotinumo šaknis. Pagal indukcinę prielaidą šią šaknį atitinkantį (5.24) sistemos sprendinį galima išreikšti formule

$$u_2 = P^2_{r-1}(x)e^{\lambda^* x}, \ldots, u_n = P^n_{r-1}(x)e^{\lambda^* x};$$

čia $P^2_{r-1}, \ldots, P^n_{r-1}$ yra $s \le r-1$ laipsnio polinomai, kuriose laisvų konstantų yra r. Įstatę taip apibrėžtas funkcijas į pirmąją (5.23) sistemos lygtį ir suintegravę ją pagal kintamąjį x, gausime šios lygties sprendinį

$$u_1 = P^1_r(x)e^{\lambda^* x}$$

su nauja laisva konstanta. Įstatę $u_1, \ldots, u_n$ į (5.21), gausime

$$y = QP_r(x)e^{\lambda^* x}, \quad P_r(x) = \mathrm{colon}(P^1_r, P^2_{r-1}, \ldots, P^n_{r-1}).$$

Belieka tik pastebėti, kad vektoriaus $QP_r(x)$ koordinatės yra $s \le r$ laipsnio polinomai ir juose laisvųjų konstantų yra lygiai $r+1$.

P a s t a b a. Kartotinės šaknies atveju atskiruosius homogeninės sistemos sprendinius galima ieškoti ir kitu metodu. Tarkime, λ yra charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis. Pirmą atskirąjį sprendinį ieškome pavidalu

$$\varphi^1 = a^1 e^{\lambda x};$$

čia a^1 yra koks nors homogeninės sistemos $Pa^1 = \lambda a^1$ netrivialus sprendinys (tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę λ). Antrą sprendinį ieškome pavidalu

$$\varphi^2 = a^2 e^{\lambda x} + a^1 x e^{\lambda x};$$

čia a^2 yra koks nors nehomogeninės sistemos $Pa^2 = \lambda a^2 + a^1$ netrivialus sprendinys (prijungtinis vektorius). Tęsdami tokius skaičiavimus, k-ąjį sistemos sprendinį ieškome pavidalu

$$\varphi^k = a^k e^{\lambda x} + a^{k-1} x e^{\lambda x} + \ldots + a^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda x};$$

čia a^k yra koks nors nehomogeninės sistemos $Pa^k = \lambda a^k + a^{k-1}$ netrivialus sprendinys.

Tegu λ^* yra charakteristinio polinomo k karotinumo kompleksinė šaknis. Tada jungtinė šaknis $\bar{\lambda}^*$ taip pat yra k kartotinumo šaknis. Šaknį λ^* atitinka kompleksinis sprendinys $P_{k-1}(x)e^{\lambda^* x}$ su k kompleksinių laisvų konstantų. Atskirę jame realią ir menamą dalis, gausime porą realių sprendinių. Kiekviename iš jų yra k laisvų konstantų. Taigi kiekvieną realią charakteristinio polinomo šaknį k kartotinumo atitinka sprendinys su k laisvų konstantų. Kiekvieną kompleksinių k kartotinumo šaknų porą atitinka realus sprendinys su $2k$ laisvų konstantų. Visumą charakteristinio polinomo šaknų atitinka sprendinys su n laisvų konstantų. Iš jo galima išskirti lygiai n realių, teisiškai nepriklausomų sprendinių, t.y. galime sukonstruoti fundamentaliąją sprendinių sistemą. Kartu galime rasti bendrąjį homogeninės sistemos sprendinį.

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} y,$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

šaknys $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ yra realios ir skirtingos. Todėl atskirus nagrinėjamos sistemos sprendinius ieškome pavidalu:

$$\varphi^1 = \mathrm{colon}(b_1, b_2)e^{-x}, \quad \varphi^2 = \mathrm{colon}(d_1, d_2)e^{3x}.$$

Įstatę pirmąjį sprendinį į sistemą gausime algebrinę homogeninę dviejų lygčių sitemą

$$\begin{cases} -b_1 = b_1 - b_2, \\ -b_2 = -4b_1 + b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b_1 - b_2 = 0, \\ -4b_1 + 2b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ gausime atskirąjį sprendinį $\varphi^1 = \text{colon}(1, 2)e^{-x}$. Įstatę į nagrinėjamą sistemą sprendinį φ^2 gausime sistemą

$$\begin{cases} 3d_1 = d_1 - d_2, \\ 3d_2 = -4d_1 + d_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2d_1 + d_2 = 0, \\ 4d_1 + 2d_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $d_1 = 1$, $d_2 = -2$ rasime atskirąjį sprendinį $\varphi^2 = \text{colon}(1, -2)e^{3x}$. Taigi bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 = \begin{pmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{3x} \\ 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

2. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 3y_2 + y_3, \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} y,$$

$y = \text{colon}(y_1, y_2, y_3)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

šaknys $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, $\lambda_3 = 1 - 2i$. Šaknį λ_1 atitinkantį atskirąjį sprendinį galime ieškoti pavidalu $\varphi^1 = \text{colon}(b_1, b_2, b_3)e^x$. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_1 = b_1 + b_2, \\ b_2 = -b_1 + b_2 - b_3 \\ b_3 = +3b_2 + b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} b_2 = 0, \\ -b_1 - b_3 = 0, \\ 3b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$ gausime $b_3 = -1$. Taigi atskirasis sprendinys $\varphi^1 = \text{colon}(1, 0, -1)e^x$. Šaknį λ_2 atitinka kompleksinis sprendinys $\tilde{\varphi} = \text{colon}(d_1, d_2, d_3)e^{(1+2i)x}$ su kompleksinėm laisvom konstantom d_1, d_2, d_3. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} (1+2i)d_1 = d_1 + d_2, \\ (1+2i)d_2 = -d_1 + d_2 - d_3 \\ (1+2i)d_3 = +3d_2 + d_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2id_1 = d_2, \\ 2id_2 = -d_1 - d_3, \\ 2id_3 = 3d_2. \end{cases}$$

kintamųjų d_1, d_2, d_3 atžvilgiu. Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $d_2 = 2i$ randame: $d_1 = 1$, $d_3 = 3$. Todėl kompleksinis sprendinys

$$\tilde{\varphi} = \text{colon}(1, 2i, 3)e^{(1+2i)x}.$$

Atskyrę jame ralią ir menamą dalis gausime du realius sprendinius

$$\varphi^1 = \operatorname{colon}(\cos 2x, -2\sin 2x, 3\cos 2x)e^x,$$
$$\varphi^2 = \operatorname{colon}(\sin 2x, 2\cos 2x, 3\sin 2x)e^x.$$

Kompleksinę šaknį λ_3 atitinka ta pati realių sprendinių pora. Taigi bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 = e^x \begin{pmatrix} c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x \\ -2c_2\sin 2x + 2c_3\cos 2x \\ -c_1 + 3c_2\cos 2x + 3c_3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

3. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_2 + 2y_3, \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} y,$$

$y = \operatorname{colon}(y_1, y_2, y_3)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

šaknys $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Šaknį λ_1 atitinkantį atskirąjį sprendinį galime ieškoti pavidalu $\varphi^1 = \operatorname{colon}(b_1, b_2, b_3)e^{2x}$. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2b_1 = b_1 - b_2 + b_3, \\ 2b_2 = b_1 + b_2 - b_3 \\ 2b_3 = -b_2 + 2b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 = 0, \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0, \\ b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$ gausime $b_3 = 1$. Taigi atskirasis sprendinys $\varphi^1 = \operatorname{colon}(1, 0, 1)e^{2x}$. Antrosios charakteristinio polinomo šaknies kartotinumas lygus dviem. Todėl kitų atskirų sprendinių galima ieškoti pavidalu

$$\tilde{\varphi} = \operatorname{colon}(b_1 + b_2x, d_1 + d_2x, \gamma_1 + \gamma_2x)e^x.$$

Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime lygybes

$$\begin{cases} b_2 + (b_1 + b_2x) = (b_1 + b_2x) - (d_1 + d_2x) + (\gamma_1 + \gamma_2x), \\ d_2 + (d_1 + d_2x) = (b_1 + b_2x) + (d_1 + d_2x) - (\gamma_1 + \gamma_2x) \\ \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2x) = -(d_1 + d_2x) + 2(\gamma_1 + \gamma_2x). \end{cases}$$

Sutraukę panašius narius jas perrašysime taip:

$$\begin{cases} (\gamma_2 - d_2)x + \gamma_1 - d_1 - b_2 = 0, \\ (b_2 - \gamma_2)x + b_1 - \gamma_1 - d_2 = 0, \\ (\gamma_2 - d_2)x + \gamma_1 - d_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Šios lygybės bus teisingos su visais $x \in \mathbb{R}$ tada ir tik tada, kai

$$\begin{cases} \gamma_2 - d_2 = 0, \\ b_2 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_2 - d_2 = 0, \\ \gamma_1 - d_1 - b_2 = 0, \\ b_1 - \gamma_1 - d_2 = 0, \\ \gamma_1 - d_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Kadangi šaknies kartotinumas $r = 2$, tai pastarosios algebrinės šešių lygčių sistemos sprendinių aibė priklauso nuo dviejų laisvų konstantų. Išsprendę šią sistemą atžvilgiu konstantų b_2 ir γ_1 randame:

$$\gamma_2 = b_2,\ d_2 = b_2,\ d_1 = \gamma_1 - b_2,\ b_1 = \gamma_1 + b_2.$$

Tegu $b_2 = 1, \gamma_1 = 0$. Tada $\gamma_2 = 1$, $d_2 = 1$, $d_1 = -1$, $b_1 = 1$. Kai $b_2 = 0, \gamma_1 = 1$ turime $\gamma_2 = 0$, $d_2 = 0$, $d_1 = 1$, $b_1 = 1$. Taigi antrąją kartotinumo $r = 2$ šaknį atitinka du tiesiškai nepriklausomi sprendiniai

$$\varphi^2 = \operatorname{colon}(1 + x, -1 + x, x)e^x, \quad \varphi^3 = \operatorname{colon}(1, 1, 1)e^x,$$

o bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 = \begin{pmatrix} c_1e^{2x} + c_2(1 + x)e^x + c_3e^x \\ c_2(x - 1)e^x + c_3e^x \\ c_1e^{2x} + c_2xe^x + c_3e^x \end{pmatrix}.$$

4. Rasime nehomogeninės sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + q_1(x), \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 + q_2(x) \end{cases} \iff y' = Py + q(x),\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$y = \operatorname{colon}(y_1, y_2)$, $q = \operatorname{colon}(q_1, q_2)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

šaknys $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ yra kompleksinės. Jas atitinka homogeninės sistemos kompleksiniai sprendiniai

$$\psi^{1,2} = \begin{pmatrix} u_1 \pm iv_1 \\ u_2 \pm iv_2 \end{pmatrix} e^{(-1\pm i)x}$$

Konstantas $u_1 = 1, v_1 = 1, u_2 = -2, v_2 = 0$, daugiklio tikslumu, randame iš lygties

$$(-1 + i)\begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix}.$$

Kompleksinis sprendinys

$$\psi^1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{(-1+i)x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}(\cos x + i\sin x) =$$

$$e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x - \sin x & + & i(\cos x + \sin x) \\ -2\cos x & - & i2\sin x \end{pmatrix} =$$

$$e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x - \sin x) \\ -2\cos x \end{pmatrix} + ie^{-x}\begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2\sin x \end{pmatrix}.$$

Jo realioji ir menamoji dalys yra realūs homogeninės sistemos sprendiniai. Todėl homogeninės sistemos bendrasis sprendinys

$$y_h = c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x - \sin x) \\ -2\cos x \end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2\sin x \end{pmatrix} =$$

$$c_1\varphi^1(x) + c_2\varphi^2(x).$$

Atskirojo nehomogeninės sistemos sprendinio ieškosime pavidalu

$$y_a = \Phi(x)c(x) = c_1(x)\varphi^1(x) + c_2(x)\varphi^2(x);$$

čia $c = \operatorname{colon}(c_1, c_2)$ – ieškoma vektorinė funkcija, o Φ – fundamentalioji matrica, sudaryta iš vektorių φ^1, φ^2. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į nehomogeninę sistemą, gausime lygtį

$$\Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = P\Phi(x)c(x) + q(x) \Leftrightarrow c'(x) = \Phi^{-1}(x)q(x).$$

Atvirkštinė matrica

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{2}e^x \begin{pmatrix} -2\sin x & -\cos x - \sin x \\ 2\cos x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}$$

Todėl

$$c(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{2}e^s \begin{pmatrix} -2\sin s & -\cos s - \sin s \\ 2\cos s & \cos s - \sin s \end{pmatrix} q(s)\,ds + c_0.$$

Atmetę čia pastovų vektorių c_0 randame atskirąjį sprendinį

$$y_a(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2\cos x & -2\sin x \end{pmatrix}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} e^s \begin{pmatrix} -2\sin s & -\cos s - \sin s \\ 2\cos s & \cos s - \sin s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \end{pmatrix} ds.$$

Taigi nehomogeninės sistemos bendrasis sprendinys

$$y = c_1\varphi^1(x) + c_2\varphi^2(x) + y_a(x).$$

5.4 FUNDAMENTALIOSIOS MATRICOS STRUKTŪRA

Konstruojant (5.18) tiesinių diferencialinių lygčių sistemos fundamentaliąją matricą 5.3 skyrelyje nuosekliai ieškojome jos atskirus tiesiškai nepriklausomus sprendinius. Čia pateiksime kitą fundamentaliosios matricos konstravimo metodą.

Iš pradžių nagrinėsime tiesinę homogeninę sistemą

$$y' = Py, \quad P \in \mathbb{R}^{n,n},\ y = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n). \tag{5.25}$$

Jos sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{5.26}$$

ieškosime pavidalu

$$y(x) = e^{xP}c, \quad c = \mathrm{colon}(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

Rasime šios funkcijos išvestinę. Remiantis (1.37) formule,

$$y'(x) = Pe^{xP}c = Py(x).$$

Todėl funkcija $y(x) = e^{xP}c$ yra (5.25) sistemos sprendinys. Pareikalavę, kad taške $x = x_0$ jis tenkintų (5.26) pradinę sąlygą, gausime

$$e^{x_0P}c = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = e^{-x_0P}y_0$$

Iš čia išplaukia, kad funkcija

$$y(x) = e^{(x-x_0)P}y_0 \tag{5.28}$$

yra (5.25) sistemos sprendinys, tenkinantis (5.26) pradinę sąlygą. Pagal vienaties teoremą bet kuris kitas sprendinys, tenkinantis (5.26) pradinę sąlygą, sutampa su šiuo sprendiniu savo apibrėžimo srityje. Todėl formulė (5.27) apibrėžia bendrąjį (5.25) sistemos sprendinį.

Norint rasti (5.25) sistemos fundamentaliąją sprendinių matricą, reikia rasti matricos e^{xP} arba kokios nors kitos fundamentalios matricos stulpelius. Tegu Q yra tokia neišsigimusi matrica, kad $P = QJQ^{-1}$, J – Žordano matrica. Tada

$$e^{xP} = Qe^{xJ}Q^{-1}$$

yra (5.25) sistemos fundamentalioji matrica. Matrica $e^{xP}Q = Qe^{xJ}$ taip pat yra (5.25) sistemos fundamentalioji matrica. Todėl pakanka rasti fundamentaliosios matricos Qe^{xJ} stulpelius.

Žordano matrica

$$J = \mathrm{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\}, \quad s_1 + \dots + s_m = n.$$

Ją atitinkanti eksponentė

$$e^{xJ} = \mathrm{diag}\{e^{xJ_{s_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{xJ_{s_m}(\lambda_m)}\};$$

čia $J_{s_i}(\lambda_i)$ yra Žordano langeliai. Be to,

$$e^{xJ_{s_i}(\lambda_i)} = e^{x\lambda_i}\begin{pmatrix} 1 & x & \dots & \frac{x^{s_i-2}}{(s_i-2)!} & \frac{x^{s_i-1}}{(s_i-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{x^{s_i-3}}{(s_i-3)!} & \frac{x^{s_i-2}}{(s_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ir $q_1, \dots, q_n$ yra matricų Qe^{xJ} ir Q stulpeliai. Tada

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{\lambda_1 x} q_1, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_{s_1} &= e^{\lambda_1 x}\Big(\tfrac{x^{s_1-1}}{(s_1-1)!} q_1 + \dots + x q_{s_1-1} + q_{s_1}\Big) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_{n-s_m+1} &= e^{\lambda_m x} q_{n-s_m+1}, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_n &= e^{\lambda_m x}\Big(\tfrac{x^{s_m-1}}{(s_m-1)!} q_{n-s_m+1} + \dots + x q_{n-1} + q_n\Big). \end{aligned}$$

Jeigu matrica P neturi kartotinių tikrinių reikšmių, t.y. $s_1 = \dots = s_n = 1$, tai vektoriai

$$\varphi_i = e^{\lambda_i x} q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Vektoriai φ_i turi tokį patį pavidalą ir tuo atveju, kai matrica P turi kartotines tikrines reikšmes, tačiau kiekvieną kartotinę tikrinę reikšmę atitinkantis Žordano langelis yra diagonalus. Vektorius $q_1, \dots, q_n$ galima rasti iš sąlygos

$$PQ = QJ.$$

P a v y z d y s. Rasime sistemos

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2, \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

fundamentaliąją matricą. Matricos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

tikrinės reikšmės $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Tikrinis vektorius $\varphi = \mathrm{colon}(1, 1)$ randamas iš lygties $P\varphi = 2\varphi$. Prijungtinis vektorius $\psi = \mathrm{colon}(1, 2)$ randamas iš lygties $P\psi = \varphi + 2\psi$. Tegu Q yra matrica, sudaryta iš vektorių φ ir ψ, t.y. $Q = (\varphi, \psi)$. Tada Žordano matrica

$$J = Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrica

$$xJ = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2xE + xT.$$

Matricos E ir T komutuoja. Todėl

$$e^{xJ} = e^{2xE}e^{xT} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nagrinėjamos sistemos fundamentalioji matrica

$$e^{xP} = Qe^{xJ}Q^{-1} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}.$$

Toliau nagrinėsime *tiesinę nehomogeninę* sistemą

$$y' = Py + q(x); \tag{5.29}$$

čia $q = \mathrm{colon}(q_1, \dots, q_n)$ – žinoma vektorinė funkcija. Iš pradžių tarkime, kad $q(x) = 0$. Tada pastaroji sistema yra homogeninė ir jos bendrasis sprendinys

$$y_h(x) = e^{xP}c, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atskirojo nehomogeninės sistemos sprendinio ieškosime konstantu varijavimo metodu

$$y_a(x) = e^{xP}c(x);$$

čia $c = c(x)$ – ieškoma vektorinė funkcija. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (5.29) sistemą, gausime

$$Pe^{xP}c(x) + e^{xP}c'(x) = Pe^{xP}c(x) + q(x).$$

Suprastinę panašius narius, gausime

$$c'(x) = e^{-xP}q(x).$$

Suintegravę šią lygtį nuo x_0 iki x, randame

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\tau P}q(\tau)\,d\tau + \tilde{c}.$$

Atmetę čia pastovų vektorių $\tilde{c}$, randame nehomogeninės sistemos atskirąjį sprendinį

$$y_a(x) = e^{xP}\int_{x_0}^{x} e^{-\tau P}q(\tau)\,d\tau = \int_{x_0}^{x} e^{(x-\tau)P}q(\tau)\,d\tau.$$

Bendrasis nehomogeninės sistemos sprendinys

$$y(x) = y_h(x) + y_a(x) = e^{xP}c + \int_{x_0}^{x} e^{(x-\tau)P}q(\tau)\,d\tau. \tag{5.30}$$

Šis sprendinys tenkins (5.26) pradinę sąlygą, jeigu

$$c = e^{-x_0 P} y_0.$$

Įstatę pastarąją vektoriaus c išraišką į (5.30), gausime (5.29) sistemos sprendinį

$$y(x) = e^{(x-x_0)P} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-\tau)P} q(\tau)\, d\tau, \tag{5.31}$$

tenkinantį (5.26) pradinę sąlygą.

P a v y z d y s. Rasime sistemos

$$y' = Py + q(x)$$

sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $y(0) = 0$. Čia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \end{pmatrix}.$$

Matricos P tikrinės reikšmės $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$. Šias tikrines reikšmes atitinka kompleksiniai tikriniai vektoriai $u + iv$ ir $u - iv$, $u = \mathrm{colon}(1, -2)$, $v = \mathrm{colon}(1, 0)$. Jie randami iš lygčių:

$$P(u+iv) = (-1+i)(u+iv), \quad P(u-iv) = (-1-i)(u-iv).$$

Iš vektorių u ir v sudarome matricą

$$Q = (u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atvirkštinė matrica

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricą P atitinka Žordano matrica

$$J = Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E + T.$$

Matricos $-E$ ir T komutuoja. Todėl

$$e^{xJ} = e^{-xE} e^{xT}.$$

Matricos $-xE$ eksponentė

$$e^{-xE} = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} = e^{-x}E.$$

Matricos T laipsniai

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T^5 = T$$

ir t.t. Todėl matricos xT eksponentė

$$e^{xT}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Padauginę matricą e^{-xE} iš matricos e^{xT}, gausime

$$e^{xJ}=e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Taigi matrica

$$e^{xP}=Qe^{xJ}Q^{-1}=e^{-x}\begin{pmatrix} \sin x+\cos x & \sin x \\ -2\sin x & \cos x-\sin x \end{pmatrix}.$$

Pagal prielaidą $y(0)=0$. Todėl nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y(x)=\int\limits_0^x e^{(x-\tau)P}q(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^x e^{-(x-\tau)}\begin{pmatrix} \sin(x-\tau)+\cos(x-\tau) & \sin(x-\tau) \\ -2\sin(x-\tau) & \cos(x-\tau)-\sin(x-\tau) \end{pmatrix}q(\tau)\,d\tau.$$

5.5 TIESINĖS SISTEMOS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS KANONINIS PAVIDALAS

Tegu $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ – pastovioji matrica. Nagrinėsime homogeninę sistemą

$$y' = Py. \tag{5.32}$$

Keitiniu

$$y = Qu, \quad \det Q \neq 0,$$

ji susiveda į sistemą

$$u' = Q^{-1}PQu.$$

Pagal 1.3 teoremą matricą Q galima parinkti taip, kad

$$Q^{-1}PQ = J;$$

čia J – Žordano matrica. Kartu 5.32 sistema galima suvesti į paprastesnę sistemą

$$u' = Ju. \tag{5.33}$$

Ši sistema vadinama *kanonine.* Tegu

$$J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \ldots, J_{s_m}(\lambda_m)\}.$$

Tada (5.33) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{array}{rcl}
u_1' &=& \lambda_1 u_1 + u_2, \\
u_2' &=& \lambda_1 u_2 + u_3, \\
\vdots && \vdots \\
u_{s_1}' &=& \lambda_1 u_{s_1}, \\
\vdots && \vdots \\
u_{n-s_m+1}' &=& \lambda_m u_{n-s_m+1} + u_{n-s_m+2}, \\
u_{n-s_m+2}' &=& \lambda_m u_{n-s_m+2} + u_{n-s_m+3}, \\
\vdots && \vdots \\
u_n' &=& \lambda_m u_n.
\end{array}$$

Pastaroji sistema turi svarbų privalumą prieš bendro pavidalo sistemą. Visu pirma ji išsiskaido į m nepriklausomų sistemų. Kiekvieną iš šių sistemų galima suintegruoti atskirai. Bendrąjį sistemos sprendinį lengvai galima apibrėžti nuosekliai ją integruojant, pradedant nuo paskutinės sistemos lygties. Antra – nagrinėjant įvairius diferencialinių lygčių teorijos klausimus, pakanka šiuos klausimus ištirti kanoninėms sistemoms.

Tegu $n = 2$. Matricos P tikrinės reikšmės

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\operatorname{Sp} P \pm \sqrt{D}), \quad D = (\operatorname{Sp} P)^2 - 4\det P.$$

randamos iš charakteristinės lygties $\det(P - \lambda E) = 0$, kurią galima užrašyti taip:

$$\lambda^2 - (\operatorname{Sp} P)\lambda + \det P = 0;$$

čia $\operatorname{Sp} P = \sum_{i=1}^{2} p_{ii}$. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Sp} P, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det P.$$

Dvimačiu atveju Žordano matrica J gali turėti vieną iš keturių pavidalų:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix};$$

čia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta$ – realūs skaičiai.

Išskirsime tris atvejus:

1. Matricos P tikrinės reikšmės yra realios ir skirtingos (tai bus tada ir tik tada, kai $D > 0$). Šiuo atveju tikrines reikšmes λ_1, λ_2 atitinka du tiesiškai nepriklausomi tikriniai vektoriai a, b. Jie randami iš lygčių

$$Py = \lambda_i y, \quad i = 1, 2.$$

Tegu Q yra matrica, sudaryta iš šių vektorių. Tada

$$PQ = (Pa, Pb) = (\lambda_1 a, \lambda_2 b) = QJ_1;$$

čia

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}PQ = J_1$.

2. Matricos P tikrinės reikšmės yra realios ir sutampa, t.y. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (tai bus tada ir tik tada, kai $D = 0$). Šiuo atveju yra galimos dvi skirtingos situacijos, kai matrica P yra diagonali ir nediagonali. Tarkime, matrica P yra diagonali. Tada

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E;$$

čia E – tapati matrica. Šiuo atveju bet kokiai neišsigimusiai matricai Q yra teisinga lygybė

$$Q^{-1}PQ = P.$$

Tai reiškia, kad matricos P ekvivalentiškumo klasėje yra tik viena matrica P ir $P = J_2$.

Jeigu matrica P yra nediagonali, tai matricos $P - \lambda E$ rangas lygus vienetui ir matrica P turi tik vieną (daugiklio tikslumu) tikrinį vektorių a. Jį randame iš lygties $Pa = \lambda a$. Prijungtinį vektorių b randamas iš lygties

$$Pb = a + \lambda b.$$

Tegu Q yra matrica, sudaryta iš vektorių a, b. Tada

$$PQ = (Pa, Pb) = (\lambda a, a + \lambda b) = QJ_3;$$

čia

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}PQ = J_3$.

3. Tarkime, matricos P tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ yra kompleksinės (tai bus tada ir tik tada, kai $D < 0$). Šiuo atveju jas atitinka du kompleksiškai jungtiniai tikriniai vektoriai $y = u + iv$, $\bar{y} = u - iv$. Jie randami iš lygties

$$P(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Atskyrę šioje lygtyje realią ir menamą dalis, gausime

$$Pu = \alpha u - \beta v, \quad Pv = \beta u + \alpha v.$$

Tegu $Q = (u, v)$. Tada

$$PQ = (Pu, Pv) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v) = QJ_4;$$

čia

$$J_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}PQ = J_4$.

Kai $n = 3$, Žordano matrica J gali turėti vieną iš keturių pavidalų

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix};$$

čia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atkreipsime dėmesį, kad pirmąją, antrąją ir ketvirtąją Žordano matricas galima išskaidyti į blokus, kurių eilė lygi vienetui arba dviem. Tokia blokinė Žordano matricos struktūra leidžia kanoninę sistemą išskaidyti į kelias nepriklausomas sistemas. Pavyzdžiui, (5.33) sistemą, kai $J = J_4$, galima išskaidyti taip:

$$u_1' = \lambda_1 u_1, \qquad \begin{cases} u_2' = \alpha u_2 + \beta u_3, \\ u_3' = -\beta u_2 + \alpha u_3, \end{cases}$$

Kai $n = 4$, Žordano matrica J turi vieną iš trijų pavidalų:

$$J_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

čia M ir N antros eilės Žordano langeliai, λ_1 ir $\lambda \in \mathbb{R}$. Kai $J = J_1$, kanoninė sistema išsiskaido į dvi dviejų lygčių sistemas:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

o kai $J = J_2$ – į vieną vienos lygties ir vieną trijų lygčių sistemas:

$$u_1' = \lambda_1 u_1, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_2' &=& \lambda u_2 + u_3, \\ u_3' &=& \lambda u_3 + u_4, \\ u_4' &=& \lambda u_4 \end{array} \right. .$$

5.6 KANONINIŲ SISTEMŲ PLOKŠTUMOJE FAZINIAI PORTRETAI

Tegu P yra antros eilės kvadratinė matrica ir J yra ją atitinkanti Žordano matrica. Tada tiesinę sistemą
$$y' = Py$$
atitinka kanoninė sistema
$$y' = Jy. \tag{5.34}$$
Ištirsime šios sistemos pusiausvyros taškų charakterį, priklausomai nuo charakteristinio polinomo $p(\lambda)$ šaknų, t.y. nuo matricos P tikrinių reikšmių λ_1, λ_2. Kadangi panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa, tai

$$\operatorname{Sp} P = \operatorname{Sp} J = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det P = \det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Tarkime, matricos J tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra realios, skirtingos ir nelygios nuliui. Tada (5.34) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.35}$$

Išskirsime tris atvejus:

1. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra neigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det P > 0$, $D > 0$ ir $\operatorname{Sp} P < 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Tada $|y_1(x)| \to 0$ ir $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Taigi visos nagrinėjamos sistemos trajektorijos artėja į koordinačių pradžią. Eliminavę iš (5.35) lygčių kintamąjį x, gausime lygtį

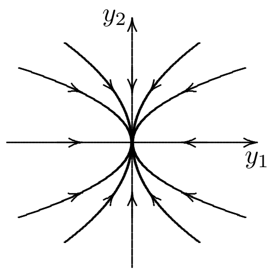
$$y_1 = c|y_2|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c = c_1/|c_2|^{\lambda_1/\lambda_2}.$$

Iš jos išplaukia, kad (5.34) sistemos trajektorijos yra parabolės[1]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 > 1$. Todėl visos jos liečia ašį y_2 (žr. 5.1 pav.)

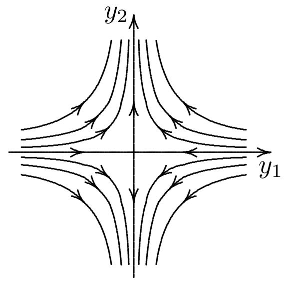
2. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra priešingų ženklų. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det P < 0$, $D > 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2$. Tiksliau tegu $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Tada $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, tai trajektorijos yra hiperbolės[2] (žr. 5.2 pav.).

3. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra teigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det P > 0$, $D > 0$ ir $\operatorname{Sp} P > 0$. Tegu $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Tada $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 > 0$, tai trajektorijos yra parabolės[3]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 < 1$. Todėl jos visos liečia ašį y_1 (žr. 5.3 pav).

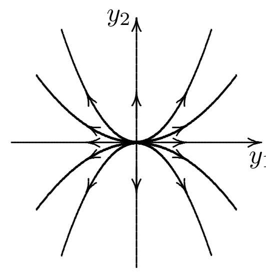
[1] Iš tikrųjų tikrosios parabolės yra gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 2$.
[2] Iš tikrųjų tikrosios hiperbolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = -1$.
[3] Iš tikrųjų tikrosios parabolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$.



5.1 pav.



5.2 pav.



5.3 pav.

Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 5.1 ir 5.3 paveikslėliuose, vadinamas *mazgo* tašku, o pusiausvyros taškas, pavaizduotas 5.2 paveikslėlyje – *balno* tašku.

Tarkime, tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 sutampa ir nelygios nuliui. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det P > 0$ ir $D = 0$. Tegu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Išskirsime du atvejus:

1. Tarkime, matrica J yra diagonali. Tada (5.34) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

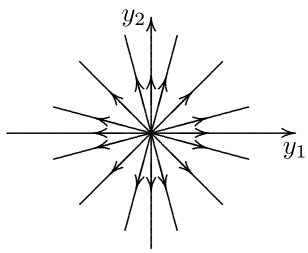
Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda x}.$$

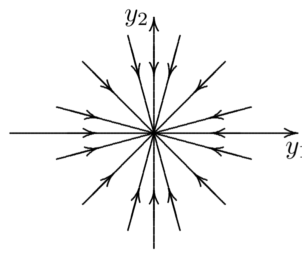
Tegu $\lambda > 0$. Tada $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį x, gausime lygtį

$$y_1 = k y_2, \quad k = c_1/c_2.$$

Taigi sistemos trajektorijos yra spinduliai, išeinantys iš koordinačių pradžios, kai $\lambda > 0$, ir įeinantys į koordinačių pradžią, kai $\lambda < 0$ (žr. 5.5 ir 5.4 pav.). Pusiausvyros taškai, pavaizduoti 5.5 ir 5.4 paveikslėliuose, vadinami *žvaigzdiniais* mazgais.



5.5 pav.



5.4 pav.

2. Matrica J nėra diagonali. Tada turime sistemą

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda x}.$$

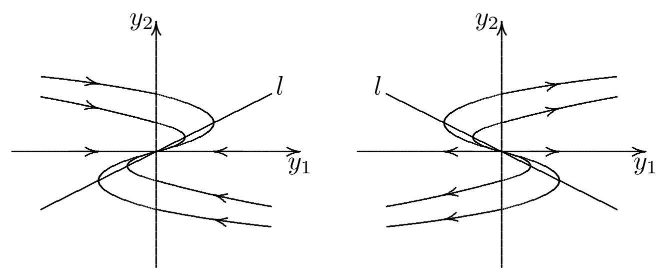
Jeigu $\lambda > 0$, tai $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį x, gausime sitemos trajektorijų lygtį

$$y_1 = \frac{c_1}{c_2} y_2 + \frac{1}{\lambda} y_2 \ln \frac{y_2}{c_2}.$$

Išvestinė $dy_1/dy_2 \to \infty$, kai $y_2/c_2 \to +0$. Todėl visos trajektorijos liečia ašį y_1 koordinačių pradžios taške. Geometrinė vieta taškų, kuriuose trajektorijos keičia kryptį, apibrėžiama lygtimi $y_1' = 0$. Iš pirmosios sistemos lygties gauname, kad tai yra tiesė

$$l: \lambda y_1 + y_2 = 0.$$

Fazinis sitemos portretas, kai $\lambda < 0$ ir $\lambda > 0$, pavaizduotas 5.6 ir 5.7 paveikslėliuose. Abiem atvejais pusiausvyros taškas vadinamas *išsigimusio mazgo* tašku.



5.6 pav. 5.7 pav.

Tarkime, tikrinės reikšmės yra kompleksiškai jungtinės: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Tai bus tada ir tik tada, kai $D < 0$. Šiuo atveju (5.34) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y_2' = -\beta y_1 + \alpha y_2$$

(žr. 5.5 skyrelį). Įvedę polines koordinates

$$y_1 = r\cos\theta, \quad y_2 = r\sin\theta,$$

gausime sistemą

$$r' = \alpha r, \quad \theta' = -\beta.$$

Jos sprendinys

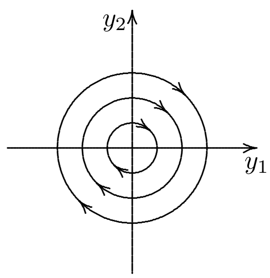
$$r = r_0 e^{\alpha x}, \quad \theta = \theta_0 - \beta x.$$

Taigi

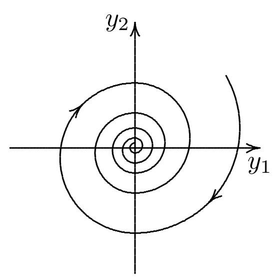
$$y_1 = r_0 e^{\alpha x} \cos(\theta_0 - \beta x), \quad y_2 = r_0 e^{\alpha x} \sin(\theta_0 - \beta x).$$

Jeigu $\alpha < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to +\infty$. Jeigu $\alpha > 0$, tai egzistuoja seka $\{x_k\}$ tokia, kad $|y_1(x_k)| \to \infty$, $|y_2(x_k)| \to \infty$, kai $x_k \to +\infty$. Jeigu $\alpha = 0$, tai visos trajektorijos yra $2\pi/\beta$ periodinės funkcijos.

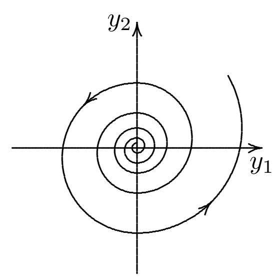
Tarkime, $\alpha = 0$, t.y. tikrinė reikšmė λ yra grynai menama (tai bus tada ir tik tada, kai $\operatorname{Sp} P = 0$). Šiuo atveju trajektorijos yra koncentriški apskritimai su centru koordinačių pradžioje (žr. 5.8 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 5.8 paveikslėlyje, vadinamas *centro* tašku. Tegu $\alpha \neq 0$. Tada trajektorijos yra spiralės. Kai $x \to \infty$ ir $\alpha < 0 (\Leftrightarrow \operatorname{Sp} P < 0)$, fazinis taškas juda spirale, artėdamas prie koordinačių pradžios (žr. 5.9 pav.), o kai $\alpha > 0$ ($\Leftrightarrow \operatorname{Sp} P > 0$), fazinis taškas juda spirale, toldamas nuo koordinačių pradžios į begalybę (žr. 5.10 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 5.9, 5.10 paveikskėliuose, vadinamas *židinio* tašku. Visais atvejais judėjimą prieš ar pagal laikrodžio rodyklę, nusako koeficiento β ženklas.



5.8 pav.



5.9 pav.



5.10 pav.

Tarkime, $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Jeigu $\lambda_1 = 0$, o $\lambda_2 \neq 0$, tai (5.34) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = c_1, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas. Kai $\lambda_2 > 0$ ($\lambda_2 < 0$), trajektorijos yra iš y_1 ašies išeinantys (įeinantys) spinduliai, lygiagretūs y_2 ašiai. Fazinis sistemos portretas, kai $\lambda_2 > 0$ ir $\lambda_2 < 0$, pavaizduotas 5.11 ir 5.12 paveikslėliuose.

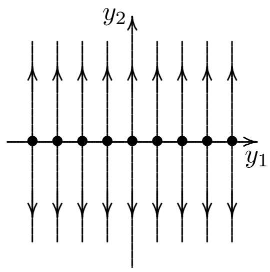
Jeigu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ir matrica J nėra nulinė, tai (5.34) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 0.$$

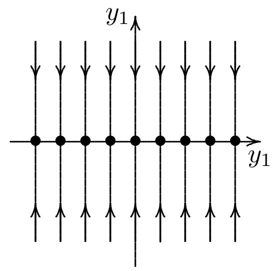
Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = c_2 x, \quad y_2(x) = c_2.$$

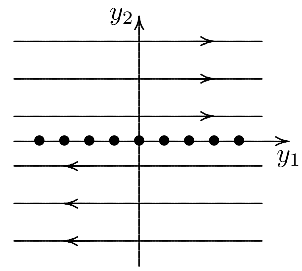
Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas, o trajektorijos yra tiesės, lygiagrečios y_1 ašiai. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 5.13 paveikslėlyje.



5.11 pav.

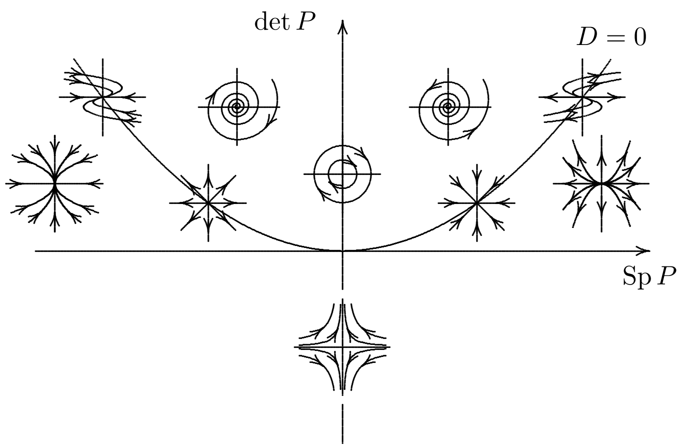


5.12 pav.



5.13 pav.

Kanoninės sistemos $y' = Jy$ pusiausvyros taško charakteris priklauso nuo Žordano matricos J tikrinių reikšmių. Tiksliau, nuo charakteristinio polinomo $p(\lambda)$ koeficientų $\operatorname{Sp} J$ ir $\det J$. Kadangi panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa, tai $\operatorname{Sp} J = \operatorname{Sp} P$, $\det J = \det P$. Todėl tiesinių sistemų $y' = Py$ pusiausvyros taškus galima klasifikuoti lygiai taip pat kaip ir jas atitinkančių kanoninių sistemų pusiausvyros taškus. Pavyzdžiui, jeigu kokios nors kanoninės sistemos $y' = Jy$ pusiausvyros taškas yra židinys, tai visų ją atitinkančių tiesinių sistemų pusiausvyros taškai taip pat yra židiniai.



5.14 pav.

Kiekvieną fiksuotą reikšmių $\operatorname{Sp} P$ ir $\det P$ porą atitinka charakteristinis polinomas $p(\lambda)$. Savo ruožtu charakteristinis polinomas $p(\lambda)$ vienareikšmiškai apibrėžia kanoninę sistemą $y' = Jy$ bei jos pusiausvyros tašką. Kartu yra apibrėžiamas ir su šia sistema susijusios tiesinės sistemos $y' = Py$ pusiausvyros taškas. Taigi kiekvieną reikšmių $\operatorname{Sp} P$, $\det P$ porą atitinka tam tikras tieisnės sistemos $y' = Py$ pusiausvyros taškas. Ši atitinkamybė geometriškai pavaizduota 5.14 paveikslėlyje

Tegu Q yra neišsigimusi matrica, kurios pagalba matrica P suvedama į Žordano pavidalą J. Tada transformacija $y = Qu$ deformuoja kanoninės sistemos $u' = Ju$ fazinį portretą į tiesinės sistemos $y' = Py$ fazinį portretą. Kadangi tokia transformacija yra tiesinė ir tolydi, tai trajektorijų geometrinis vaizdas išlieka toks pats. Jos gali būti tik kiek ištemptos (suspaustos) ir pasuktos apie koordinačių pradžią. Pavyzdžiui, sistema

$$y_1' = \frac{5}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_2, \quad y_2' = \frac{4}{3}y_1 - \frac{5}{3}y_2$$

tiesine transformacija

$$y_1 = 2u_1 + u_2, \quad y_2 = u_1 + 2u_2$$

suvedama į kanoninį pavidalą

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = -u_2.$$

Šiuo atveju Žordano matricos tikrinės reikšmės $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Todėl pusiausvyros taškas yra balno taškas. Kanoninės sistemos bendrasis sprendinys

$$u_1 = c_1 e^x, \quad u_2 = c_2 e^{-x}.$$

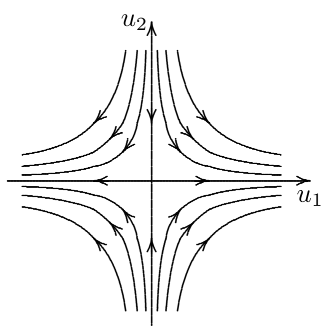
Fazinis sitemos portretas pavaizduotas 5.15 paveikslėlyje. Grįžę prie kintamųjų y_1, y_2, gausime

$$y_1 = 2c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad y_2 = c_1 e^x + 2c_2 e^{-x}.$$

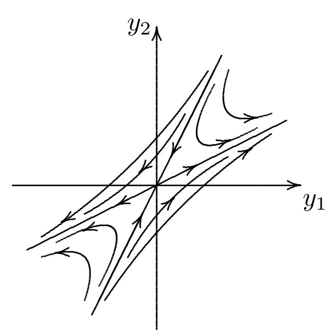
Iš šių lygčių eliminavę kintamąji x, gausime nagrinėjamos sistemos trajektorijų lygtį

$$(y_2 - 2y_1)(y_1 - 2y_2) = c;$$

čia $c = 9c_1c_2$. Taigi nagrinėjamos sitemos trajektorijos yra hiperbolės. Jų fazinis portetas pavaizduotas 5.16 paveikslėlyje.



5.15 pav.



5.16 pav.

5.7 NEHOMOGENINĖS SISTEMOS PERIODINIAI SPRENDINIAI

Tegu $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ – pastovi matrica, $q = \mathrm{colon}(q_1, \ldots, q_n)$, q_i – tolydžios ω periodinės funkcijos, $\omega > 0$. Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę sistemą

$$y' = Py + q(x). \tag{5.36}$$

5.4 teorema. *Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – tikrinės matricos P reikšmės, $\lambda_m \neq \frac{2\pi ki}{\omega}$, $i = \sqrt{-1}$, $\forall m = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada (5.36) sistema turi vienintelį ω periodinį sprendinį.*

$\triangleleft$ Tegu Φ – homogeninės sistemos fundamentalioji matrica. Tada bendrasis (5.36) sistemos sprendinys (žr. (5.16) formulę)

$$y(x) = \Phi(x)c + \int_0^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds;$$

čia c – pastovus vektorius. Nagrinėjamu atveju fundamentaliąją matricą galima apibrėžti taip:

$$\Phi(x) = e^{Px}.$$

Tada

$$y(x) = e^{Px}c + \int_0^x e^{P(x-s)}q(s)\,ds.$$

Pasinaudoję šia formule ir funkcijos q periodiškumo sąlyga, gausime

$$y(x+\omega) = e^{P(x+\omega)}c + \int_0^{x+\omega} e^{P(x+\omega-s)}q(s)\,ds = e^{P(x+\omega)}c + \int_{-\omega}^{x} e^{P(x-s)}q(s)\,ds =$$

$$e^{Px}e^{P\omega}c + \int_0^x e^{P(x-s)}q(s)\,ds + \int_{-\omega}^0 e^{P(x-s)}q(s)\,ds.$$

Funkcija y tenkins periodiodiškumo sąlygą $y(x+\omega) = y(x)$, jeigu

$$e^{Px}e^{P\omega}c + \int_{-\omega}^0 e^{P(x-s)}q(s)\,ds = e^{Px}c.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$e^{P\omega}c + \int_{-\omega}^0 e^{P(-s)}q(s)\,ds = c.$$

Į gautą lygybę galima žiūrėti kaip tiesinę nehomogeninę algebrinių lygčių sistemą

$$\left(e^{P\omega} - E\right)c = -\int\limits_{-\omega}^{0} e^{P(-s)}q(s)\,ds$$

vektoriaus c atžvilgiu. Ji turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kai matrica $e^{P\omega} - E$ yra neišsigimusi. Pagal 1.6 teoremą matricos $e^{\omega P}$ tikrinės reikšmės yra $e^{\lambda_1\omega}, \ldots, e^{\lambda_n\omega}$. Todėl matrica $e^{\omega P} - E$ bus neišsigimusi tada ir tik tada, kai $e^{\lambda_m\omega} \neq 1$, $\forall m = 1, \ldots, n$, t.y. kai $\lambda_m\omega \neq 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. $\triangleright$

5.8 TIESINĖS SISTEMOS SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS

Tegu $P = \{p_{ij}\}$ yra kvadratinė n-tos eilės matrica, kurios koeficientai p_{ij} – tolydžios ω periodinės funkcijos, $\omega > 0$. Tokias matricas vadinsime ω *periodinėmis*. Iš pradžių nagrinėsime tiesinę homogeninę sistemą

$$y' = P(x)y. \tag{5.37}$$

5.5 teorema. *Tegu P – ω periodinė tolydi matrica. Tada kiekvieną (5.37) sistemos fundamentaliąją matricą Φ galima išreikšti sandauga*

$$\Phi(x) = B(x)e^{Ax}; \tag{5.38}$$

čia B – neišsigimusi ω periodinė matrica, o A – matrica su pastoviais koeficientais.

◁ Laisvai pasirenkame kokia nors (5.37) sistemos fundamentaliąją matricą Φ. Tada

$$\Phi'(x+\omega) = P(x+\omega)\Phi(x+\omega).$$

Pagal teoremos sąlygą $P(x+\omega) = P(x)$. Todėl

$$\Phi'(x+\omega) = P(x)\Phi(x+\omega).$$

Iš čia išplaukia, kad matrica $\Psi(x) = \Phi(x+\omega)$ taip pat yra fundamentalioji. Tada (žr. 5.1 skyrelį) egzistuoja neišsigimusi pastovioji matrica C tokia, kad

$$\Psi(x) = \Phi(x)C. \tag{5.39}$$

Matrica C yra vadinama *monodromijos matrica*. Pagal 1.11 teoremą teoremą egzistuoja jos logaritmas $\operatorname{Ln} C$. Apibrėžkime matricas

$$A = \frac{1}{\omega}\operatorname{Ln} C, \quad B(x) = \Phi(x)e^{-Ax}.$$

Iš antrosios formulės išplaukia, kad

$$\Phi(x) = B(x)e^{Ax}$$

ir (5.38) sąlyga yra patenkinta. Pasinaudoję pirmąja formule, gausime

$$B(x+\omega) = \Phi(x+\omega)e^{-A(x+\omega)} = \Phi(x)Ce^{-A(x+\omega)} =$$

$$\Phi(x)e^{A\omega}e^{-A\omega}e^{-Ax} = \Phi(x)e^{-Ax} = B(x).$$

Taigi matrica B yra ω periodinė. ▷

Tegu $\tilde{\Phi}$ yra kita (5.37) sistemos fundamentalioji matrica ir $\tilde{C}$ yra ją atitinkanti monodromijos matrica, t.y.

$$\tilde{\Phi}(x+\omega) = \tilde{\Phi}(x)\tilde{C}.$$

Tada egzistuoja neišsigimusi pastovioji matrica Q tokia, kad

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)Q.$$

Tačiau tada

$$\Phi(x+\omega) = \tilde{\Phi}(x+\omega)Q^{-1} = \tilde{\Phi}(x)\tilde{C}Q^{-1} = \Phi(x)Q\tilde{C}Q^{-1}.$$

Sulyginę šią ir (5.39) formules, gausime

$$C = Q\tilde{C}Q^{-1}.$$

Taigi visos monodromijos matricos yra panašios. Kartu galime tvirtinti, kad visų monodromijos matricų tikrinės reikšmės yra vienodos. Pažymėkime šias tikrines reikšmes $\mu_1, \dots, \mu_n$. Tikrinės reikšmės $\mu_1, \dots, \mu_n$ yra vadinamos (5.37) sistemos *multiplikatoriais*.

Iš fundamentaliųjų matricų aibės išskirkime normuotą taške $x = 0$ fundamentaliąją matricą Φ. Priminsime, kad fundamentalioji matrica Φ yra vadinama normuota taške $x = 0$, jeigu $\Phi(0) = E$, E – vienetinė matrica. Normuotą fundamentaliąją matricą atitinka monodromijos matrica C. Ją galima rasti iš formulės

$$\Phi(\omega) = \Phi(0)C = C.$$

Iš šios formulės taip pat išplaukia, kad

$$\det \Phi(\omega) = \det C = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n.$$

Pagal Liuvilio formule

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(0) \exp\Big\{\int_0^x \sum_{i=1}^n p_{ii}(s)\,ds\Big\} = \exp\Big\{\int_0^x \sum_{i=1}^n p_{ii}(s)\,ds\Big\}.$$

Todėl

$$\det \Phi(\omega) = \exp\Big\{\int_0^\omega \sum_{i=1}^n p_{ii}(s)\,ds\Big\} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n. \tag{5.40}$$

5.6 teorema. *Tegu P – ω periodinė tolydi matrica. Tada:*

1. *Jeigu μ yra (5.37) sistemos multiplikatorius, tai egzistuoja šios sistemos sprendinys φ toks, kad*

$$\varphi(x+\omega) = \mu\varphi(x). \tag{5.41}$$

2. *Jeigu egzistuoja (5.37) sistemos netrivialus sprendinys φ toks, kad yra teisinga (5.41) formulė, tai μ yra (5.37) sistemos multiplikatorius.*

$\triangleleft$ Tegu μ yra (5.37) sistemos multiplikatorius, Φ – šios sistemos normuota fundamentalioji matrica. Pagal (5.40) formule

$$\det(\Phi(\omega) - \mu E) = 0.$$

Kartu galime tvirtinti, kad μ yra matricos $\Phi(\omega)$ tikrinė reikšmė. Šią tikrinę reikšmę atitinka tikrinis vektorius y_0.

Tegu φ yra (5.37) sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $\varphi(0) = y_0$. Tada jį galima išreikšti formule

$$\varphi(x) = \Phi(x)y_0.$$

Priminsime, kad monodromijos matrica $C = \Phi(\omega)$. Todėl

$$\varphi(x+\omega) = \Phi(x+\omega)y_0 = \Phi(x)Cy_0 = \Phi(x)\Phi(\omega)y_0 = \Phi(x)\mu y_0 = \mu\varphi(x).$$

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tegu φ yra (5.37) sistemos netrivialus sprendinys tenkinantis (5.41) sąlygą. Papildikime šį sprendinį iki fundamentaliosios sprendinių sistemos, t.y. tegu $\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – fundamentalioji sprendinių sistema. Šią sprendinių sistemą atitinka monodromijos matrica C. Pagal apibrėžimą

$$(\varphi(x+\omega), \varphi_2(x+\omega), \dots, \varphi_n(x+\omega)) = (\varphi(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))C, \quad C = \{c_{ij}\}.$$

Sulyginę šių matricų pirmuosius stulpelius, gausime

$$\varphi(x+\omega) = c_{11}\varphi(x) + c_{21}\varphi_2(x) + \dots + c_{n1}\varphi_n(x) = \mu\varphi(x).$$

Perrašykime šią lygybę taip:

$$(c_{11} - \mu)\varphi(x) + c_{21}\varphi_2(x) + \dots + c_{n1}\varphi_n(x) = 0.$$

Kadangi funkcijos $\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomos, tai pastaroji formulė yra teisinga tada ir tik tada, kai $c_{11} = \mu$, $c_{21} = \dots = c_{n1} = 0$. Taigi monodromijos matrica

$$C = \begin{pmatrix} \mu & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Todėl μ yra jos tikrinė reikšmė. Kartu μ yra (5.37) sistemos multiplikatorius. $\triangleright$

Išvada. Jeigu bent vienas (5.37) sistemos multiplikatorius lygus vienetui, tai ši sistema turi netrivialų ω periodinį sprendinį. Ir atvirkščiai, jeigu (5.37) sistema turi netrivialų ω periodinį sprendinį, tai bent vienas šios sistemos multiplikatorius lygus vienetui.

Tegu Φ yra (5.37) sistemos fundamentalioji matrica. Pagal 5.5 teoremą

$$\Phi(x) = B(x)e^{Ax}.$$

Priminsime, kad B – ω periodinė matrica, o A – neišsigimusi matrica su pastoviais koeficientais. Pagal 1.3 teoremą egzistuoja neišsigimusi matrica Q tokia, kad

$$A = QJQ^{-1};$$

čia J – Žordano matrica. Tada (žr. 1.5 skyrelį)

$$e^{Ax} = Qe^{Jx}Q^{-1}.$$

Todėl fundamentalioji matrica

$$\Phi(x) = B(x)Qe^{Jx}Q^{-1}.$$

Šią formulę galima perrašyti taip:

$$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{B}(x)e^{Jx};$$

čia $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)Q$ – fundamentalioji matrica, o $\tilde{B}(x) = B(x)Q$ – periodinė su periodu ω matrica. Ištirsime fundamentaliosios matricos $\tilde{\Phi}$ struktūrą.

Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – matricos A tikrinės reikšmės. Skaičiai $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra vadinami (5.37) sistemos *charakteristiniais rodikliais*. Priminsime, kad matrica A yra susijusi su monodromijos matrica C. Tiksliau yra teisinga formulė

$$A = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} C.$$

Analogiška formulė yra teisinga ir šių matricų tikrinėms reikšmėms (žr. 1.5 skyrelį), t.y.

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} \mu_j, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Be to, matricų A ir C tikrinės reikmės yra to paties kartotinumo ir kiekvieną kartotinę tikrinę reikšmę atitinka tokie patys elementarūs dalikliai.

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį, kad realios charakteristinių rodiklių dalys yra apibrėžiamos vienareikšmiškai, o menamos dalys yra apibrėžiamos $2\pi ki/\omega$, $k \in \mathbb{Z}$ tikslumu.

Tegu

$$J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \ldots, J_{s_m}(\lambda_m)\};$$

čia s_i yra tikrinės reikšmės λ_i kartotinumas, $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i = n$. Pagal 1.4 teoremą

$$e^{xJ} = \operatorname{diag}\{e^{xJ_{s_1}(\lambda_1)}, \ldots, e^{xJ_{s_m}(\lambda_m)}\}.$$

Kiekvienas šios kvazidiagonalinės matricos langelis turi tokią struktūrą:

$$e^{xJ_{s_i}(\lambda_i)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i x} & xe^{\lambda_i x} & \ldots & \frac{x^{s_i-1}}{(s_i-1)!}e^{\lambda_i x} \\ 0 & e^{\lambda_i x} & \ldots & \frac{x^{s_i-2}}{(s_i-2)!}e^{\lambda_i x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}.$$

Tegu $\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^n$ ir $\tilde{b}^1, \dots, \tilde{b}^n$ yra matricų $\tilde{\Phi}$ ir $\tilde{B}$ stulpeliai. Tada

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\varphi}^1 & = & \tilde{b}^1 e^{\lambda_1 x}, \\
\tilde{\varphi}^2 & = & (\tilde{b}^1 x + \tilde{b}^2) e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & \vdots \\
\tilde{\varphi}^{s_1} & = & \left(\tilde{b}^1 \frac{x^{s_1-1}}{(s_1-1)!} + \dots + \tilde{b}^{s_1}\right) e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & \vdots \\
\tilde{\varphi}^{n-s_m+1} & = & \tilde{b}^{n-s_m+1} e^{\lambda_m x}, \\
\tilde{\varphi}^{n-s_m+2} & = & (\tilde{b}^{n-s_m+1} x + \tilde{b}^{n-s_m+2}) e^{\lambda_m x}, \\
\vdots & & \vdots \\
\varphi^n & = & \left(\tilde{b}^n \frac{x^{s_m-1}}{(s_m-1)!} + \dots + \tilde{b}^n\right) e^{\lambda_m x}.
\end{array}$$

Iš šių formulių matome, kad tiesinės sistemos su periodiniais koeficientais fundamentaliosios matricos struktūra yra analogiška tiesinės sistemos su pastoviais koeficientais fundamentaliosios matricos struktūrai. Todėl natūralu tikėtis, kad tiesinę sistemą su periodiniais koeficientais galima suvesti į tiesinę sistemą su pastoviais koeficientais.

Apibrėžkime naują ieškomą funkciją u formule

$$y = B(x)u, \quad B(x) = \Phi(x)e^{-Ax}.$$

Pagal apibrėžimą matrica B yra diferencijuojama. Todėl

$$B'(x)u + B(x)u' = P(x)B(x)u \quad (= y').$$

Kadangi matrica B yra neišsigimusi, tai pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$u' = B^{-1}(x)(P(x)B(x) - B'(x))u.$$

Įrodysime, kad matrica $B^{-1}(x)(P(x)B(x) - B'(x)) = A$. Visu pirma pastebėsime, kad

$$B'(x) = \Phi'(x)e^{-Ax} - \Phi(x)Ae^{-Ax} = P(x)\Phi(x)e^{-Ax} - \Phi(x)Ae^{-Ax};$$

$$B^{-1}(x) = e^{Ax}\Phi^{-1}(x).$$

Todėl

$$B^{-1}(x)(P(x)B(x) - B'(x)) = e^{Ax}\Phi^{-1}(x)P(x)\Phi(x)e^{-Ax} -$$

$$e^{Ax}\Phi^{-1}(x)P(x)\Phi(x)e^{-Ax} + e^{Ax}\Phi^{-1}(x)\Phi(x)Ae^{-Ax} = e^{Ax}Ae^{-Ax} = A.$$

Taigi (5.37) sistemą su periodiniais koeficientais keitiniu $y = B(x)u$ galima suvesti į sistemą

$$u' = Au \tag{5.42}$$

su pastoviais koeficientais.

P a s t a b a. Bendru atveju matrica

$$A = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} C$$

yra kompleksinė, netgi ir tuo atveju, kai matricos C, Φ ir P yra realios.

Tarkime, P yra ω periodinė reali matrica. Įrodysime, kad (5.37) sistemą galima suvesti į tiesinę sistemą su pastoviais realiais koeficientais netgi ir tuo atveju, kai matrica A yra kompleksinė.

Į matricą P galime žiūrėti kaip į 2ω periodinę matricą. Tegu C yra monodromijos matrica atitinkanti periodą ω. Tada

$$\Phi(x + 2\omega) = \Phi(x + \omega)C = \Phi(x)C^2.$$

Iš čia išplukia, kad C^2 yra monodromijos matrica atitinkanti periodą 2ω. Galima įrodyti, kad matrica C^2 turi realų logaritmą. Todėl visada egzistuoja 2ω periodinė funkcija B tokia, kad keitiniu

$$y = B(x)u$$

(5.37) sistema susiveda į (5.42) sistemą su pastoviais realiais koeficientais.

Tarkime, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – tolydi ω periodinė funkcija. Nagrinėsime nehomogeninę sistemą

$$y' = P(x)y + q(x). \tag{5.43}$$

Tegu $y = \varphi(x)$ yra šios sistemos sprendinys, tenkinantis sąlygą

$$y(0) = y(\omega). \tag{5.44}$$

Kadangi matrica P ir funkcija q yra ω periodinės, tai funkcija $\psi(x) = \varphi(x+\omega)$ taip pat yra (5.43) sistemos sprendinys. Be to,

$$\psi(0) = \varphi(\omega) = \varphi(0).$$

Taigi sprendiniai φ ir ψ tenkina tą pačią tiesinę sistemą ir taške $t = 0$ sutampa. Tačiau tada, remiantis vienaties teorema, galime tvirtinti, kad šie sprendiniai sutampa, t.y.

$$\varphi(x) = \varphi(x + \omega), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iš šia išplaukia, kad (5.43) sistemos sprendinys $y = \varphi(x)$ yra ω periodinis tada ir tik tada, kai jis tenkina (5.44) sąlygą.

5.7 teorema. *Tarkime, visi (5.37) sistemos multiplikatoriai $\mu_1, \ldots, \mu_n$ nelygūs vienetui. Tada (5.43) sistema turi vienintelį ω periodinį sprendinį.*

◁ Bendrasis (5.43) sistemos sprendinys yra apibrėžtas formule

$$y(x) = \Phi(x)C + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi(x)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds.$$

Tegu $\Phi(x)$ yra (5.37) sistemos fundamentalioji matrica normuota taške $x = 0$. Tada pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$y(x) = \Phi(x)y(0) + \int\limits_0^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{5.45}$$

Šis sprendinys yra ω periodinis tada ir tik tada, kai jis tenkina (5.44) sąlygą, t.y.

$$y(0) = \Phi(\omega)y(0) + \int\limits_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{5.46}$$

Atžvilgiu vektoriaus $y(0)$ tai yra tiesinė algebrinė n lygčių sistema. Ji turi vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas

$$\det(E - \Phi(\omega)) \neq 0.$$

Tačiau

$$\det(E - \Phi(\omega)) = (1 - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \mu_n).$$

Todėl (5.46) sistema turi vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai visi multiplikatoriai $\mu_1, \ldots, \mu_n$ yra nelygūs vienetui. ▹

Tarkime, P – pastovioji matrica. Tada sistemos $y' = Py$ fundamentaliąją matricą normuotą taške $x = 0$, galima apibrėžti taip:

$$\Phi(x) = e^{Px}.$$

Tegu matricos P tikrinių reikšmių aibėje nėra skaičių $2\pi ki/\omega$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada matricos $E - e^{P\omega}$ determinantas nelygus nuliui ir iš (5.44) sąlygos vienareikšmiškai randame

$$y(0) = (E - e^{P\omega})^{-1} \int\limits_0^\omega e^{(\omega - s)P} q(s)\,ds.$$

Šiuo atveju nehomogeninės sistemos

$$y' = Py + q(x) \tag{5.47}$$

bendrasis sprendinys

$$y(x) = e^{xP}(E - e^{P\omega})^{-1} \int\limits_0^\omega e^{(\omega - s)P} q(s)\,ds + \int\limits_0^x e^{(x-s)P} q(s)\,ds.$$

Padauginę pastarąją formulę iš kairės iš matricos $E - e^{P\omega}$, gausime

$$(E - e^{P\omega})y(x) = e^{xP}\Big[\int\limits_0^\omega e^{(\omega - s)P} q(s)\,ds + \int\limits_0^x e^{-sP} q(s)\,ds -$$

$$\int_0^x e^{(\omega-s)P} q(s)\,ds\Big] = e^{xP} \int_{x-\omega}^x e^{-sP} q(s)\,ds,$$

arba

$$y(x) = (E - e^{x\omega})^{-1} \int_{x-\omega}^x e^{(x-s)P} q(s)\,ds. \tag{5.48}$$

Taigi, jeigu matricos P tikrinių reikšmių aibėje nėra skaičių $2\pi ki/\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, tai (5.47) sistemos ω periodinį sprendinį galima apibrėžti (5.48) formule.

5.8 teorema. *Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra matricos P tikrinės reikšmės, λ – realus skaičius toks, kad*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < \lambda, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

ir x_0 fiksuotas taškas. Tada egzistuoja teigiama konstanta M tokia, kad

$$\|\Phi(x)\| \le M e^{\lambda x}, \quad \forall x \ge x_0;$$

čia $\Phi(x)$ – bet kokia homogeninės sistemos $y' = Py$ fundamentalioji matrica.

$\triangleleft$ Tegu Φ – kokia nors homogeninės sistemos $y' = Py$ fundamentalioji matrica. Tada ją galima išreikšti formule

$$\Phi(x) = e^{xP} C;$$

čia C – pastovioji neišsigimusi matrica. Matricos Φ norma

$$\|\Phi(x)\| \le n\|C\|\|e^{Px}\|.$$

Iš formulės $e^{xP} = Q^{-1} e^{Jx} Q$ išplaukia, kad matrica

$$e^{xP} = \{p_{ij}(x) e^{\lambda_i x}\};$$

čia $p_{ij}(x)$ polinomai, kurių laipsnis neviršija tikrinės reikšmės λ_i kartotinumo. Šios matricos elementai

$$p_{ij}(x) e^{\lambda_i x} = p_{ij}(x) e^{(\operatorname{Re} \lambda_i - \lambda)x} e^{\operatorname{Im} \lambda_i x} e^{\lambda x}.$$

Todėl

$$|p_{ij}(x) e^{\lambda_i x}| = |p_{ij}(x) e^{(\operatorname{Re} \lambda_i - \lambda)x}| e^{\lambda x}.$$

Pagal teoremos sąlygą $\operatorname{Re} \lambda_i - \lambda < 0$. Todėl reiškiniai

$$|p_{ij}(x) e^{(\operatorname{Re} \lambda_i - \lambda)x}| \to 0,$$

kai $x \to \infty$. Kartu jie yra aprėžti ir galime tvirtinti, kad egzistuoja teigiama konstanta K tokia, kad

$$|p_{ij}(x) e^{\lambda_i x}| \le K e^{\lambda x}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, x \ge x_0.$$

Taigi
$$\|\Phi(x)\| \le Me^{\lambda x};$$
čia $M = n\|C\|K$. ▷

Išvada. Tegu $\operatorname{Re}\lambda_i < \lambda < 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Tada
$$\|\Phi(x)\| \le Me^{\lambda x} \to 0,$$
kai $x \to \infty$.

5.9 teorema. *Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra (5.37) sistemos charakteristiniai rodikliai, λ – realus skaičius toks, kad*
$$\operatorname{Re}\lambda_i < \lambda, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
ir x_0 fiksuotas skaičius. Tada egzistuoja teigiama konstanta M tokia, kad
$$\|\Phi(x)\| \le Me^{\lambda x}; \quad \forall x \ge x_0;$$
čia $\Phi(x)$ – bet kokia (5.37) sistemos fundamentalioji matrica.

◁ Tegu $\Phi(x)$ yra kokia nors (5.37) sistemos fundamentalioji matrica. Tada ją galima išreikšti (5.38) formule, t.y.
$$\Phi(x) = B(x)e^{Ax};$$
čia $B(x)$ – ω periodinė matrica, o A – pastovioji matrica. Matricos $\Phi(x)$ norma
$$\|\Phi\| \le n\|B(x)\|\|e^{xA}\|.$$
Matrica $B(x)$ yra tolydi (netgi diferencijuojama) ir ω periodinė. Todėl visi jos elementai yra aprėžti, t.y. egzistuoja teigiamas skaičius K_1 toks, kad
$$\|B(x)\| \le K_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Matricos A tikrinės reikšmės yra (5.37) sistemos charakteristiniai rodikliai. Todėl
$$\|e^{Ax}\| \le Ke^{\lambda x}, \quad \forall x \ge x_0$$
(žr. 5.8 teoremos įrodymą). Kartu yra teisingas įvertis
$$\|\Phi(x)\| \le Me^{\lambda x}; \quad \forall x \ge x_0;$$
čia $M = nK_1K$. ▷

Išvada. Tegu $\operatorname{Re}\lambda_i < \lambda < 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Tada
$$\|\Phi(x)\| \le Me^{\lambda x} \to 0,$$
kai $x \to \infty$.

6 SKYRIUS

Pirmos eilės dalinių išvestinių lygtys

6.1 PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Tegu D yra kokia nors sritis erdvėje $\mathbb{R}^{2n+1}$, $F : D \to \mathbb{R}$ – žinoma funkcija, $u = u(x)$ – ieškoma funkcija, apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ – funkcijos u dalinės išvestinės, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$. Lygtį

$$F(x, u, u_x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{6.1}$$

vadinsime *bendrąja* pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialine lygtimi. Reiškinys kairėje (6.1) lygties pusėje turi priklausyti nuo ieškomos funkcijos dalinių išvestinių. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}^2(x, t, p) \neq 0, \quad \forall (x, t, p) \in D.$$

Jeigu funkcija F yra tiesinė tik ieškomos funkcijos u dalinių išvestinių atžvilgiu, tai (6.1) lygtis vadinama *kvazitiesine* pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi. Tiksliau lygtis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) u_{x_i} = f(x, u), \tag{6.2}$$

kurioje bent vienas iš koeficientų a_i nelygus nuliui, vadinama kvazitiesine pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi. Jeigu funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos u ir jos dalinių išvestinių atžvilgiu, tai (6.1) lygtis vadinama *tiesine* pirmos eilės dalinių išvestinių lygtimi. Tiesinę pirmos eilės dalinių išvestinių lygtį galima užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x). \tag{6.3}$$

Jeigu (6.3) lygtyje $f(x) \equiv 0$, tai tokia lygtis vadinama *tiesine homogenine* pirmosios eilės dalinių išvestinių lygtimi. Dažnai yra nagrinėjama specialaus pavidalo tiesinė homogeninė pirmosios eilės dalinių išvestinių lygtis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} = 0. \tag{6.4}$$

A p i b r ė ž i m a s. Funkciją $u \in C^1(\Omega')$, $\Omega' \subset \Omega$, vadinsime (6.1) lygties *atskiru sprendiniu* srityje Ω', jeigu

1. $\forall x \in \Omega'$ taškas $(x, u(x), u_x(x)) \in D$,
2. $F(x, u(x), u_x(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in \Omega'$.

Jeigu funkcija $u = u(x)$ yra (6.1) lygties atskirasis sprendinys srityje Ω', tai aibė taškų $\{(x, u) : x \in \Omega', u = u(x)\}$ erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ apibrėžia n-matį paviršių. Jį vadinsime (6.1) lygties *integraliniu paviršiumi*. Visų (6.1) lygties atskirų sprendinių šeimą vadinsime šios lygties *bendruoju sprendiniu*. Tokio sprendinio struktūra iš esmės skiriasi nuo paprastuosios diferencialinės lygties sprendinio struktūros.

P a v y z d y s. Rasime dalinių išvestinių lygties

$$u_x = yu,$$

su dviem nepriklausomais kintamaisiais x, y, bendrąjį sprendinį. Šioje lygtyje į kintamąjį y galima žiūrėti kaip į parametrą. Tada tai yra paprastoji pirmosios eilės diferencialinė lygtis, kurios sprendinys

$$u = C(y)e^{yx};$$

čia C – bet kokia tolydi funkcija. Taigi pirmosios eilės dalinių išvestinių lygties bendrasis sprendinys priklauso ne nuo vienos laisvos konstantos, o nuo vienos laisvos funkcijos.

Formuluojant Koši uždavinį paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje vienas iš kintamųjų yra laikomas nepriklausomu, o kiti kintamieji yra ieškomos funkcijos, kurios turi tenkinti atitinkamas pradines sąlygas fiksuotai nepriklausomo kintamojo reikšmei. Jeigu (6.1) dalinių išvestinių lygtį galima išspręsti kokios nors išvestinės, pavyzdžiui u_{x_1}, atžvilgiu

$$u_{x_1} = G(x, u, u_{x_2}, \dots u_{x_n}), \quad x \in \Omega, \tag{6.5}$$

tai Koši uždavinį tokiai lygčiai galima formuluoti analogiškai: rasti diferencijuojamą funkciją u, kuri srityje Ω tenkintų (6.5) lygtį ir pradinę sąlygą

$$u\big|_{x_1=x_{10}} = \psi(x_2, \dots, x_n); \tag{6.6}$$

čia ψ – glodi savo argumentų funkcija. Atkreipsime dėmesį į tai, kad lygtis $x_1 = x_{10}$ kintamųjų $x_1, x_2, \dots, x_n$ erdvėje apibrėžia glodų $n - 1$ dimensijos paviršių erdvėje $\mathbb{R}^n$ (kai $n = 2$ – tiesę, kai $n = 3$ – plokštumą ir t.t.). Šis pastebėjimas leidžia dalinių išvestinių lygčių teorijoje (6.6) pradinę sąlygą pakeisti bendresne pradine sąlyga

$$u\big|_{x_1=g(x_2,\dots,x_n)} = \psi(x_2, \dots, x_n); \tag{6.7}$$

čia g – glodi savo argumentų funkcija.

Jeigu dalinių išvestinių lygtis yra kvazitiesinė, tai Koši uždavinį galima formuluoti taip: rasti diferencijuojamą funkciją u, kuri srityje Ω tenkintų (6.2) lygtį ir pradinę sąlygą

$$u\big|_S = \psi(x); \tag{6.8}$$

čia S – glodus $n - 1$ dimensijos paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$, kiekvieno taško $x_0 \in S$ aplinkoje jį galima apibrėžti lygtimi $\omega(x) = 0$, ω – diferencijuojama minėtoje aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2(x) \neq 0,$$

ψ – glodi paviršiuje S funkcija.

Kai $n = 2$ lygtis $\omega(x) = 0$ kintamųjų x_1, x_2 plokštumoje apibrėžia kreivę l, o kintamųjų x_1, x_2, u erdvėje cilindrą $l \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Lygtis $u = \psi(x), x \in l$ apibrėžia kreivę $\gamma \subset l \times \mathbb{R}$, kurios projekcija į kintamųjų x_1, x_2 plokštumą yra kreivė l. Todėl išspręsti (6.2), (6.8) Koši uždavinį geometriškai reiškia rasti integralinį paviršių, kuris eina per kreivę γ.

6.2 TIESINĖS HOMOGENINĖS LYGTYS

Tegu $a_1, \dots, a_n$ – diferencijuojamos srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funkcijos, tenkinančios sąlygą:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Nagrinėsime tiesinę homogeninę lygtį

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} = 0. \tag{6.9}$$

Akivaizdu, kad funkcija $u = const$ yra šios lygties sprendinys. Ieškant likusių sprendinių patogu lygiagrečiai nagrinėti autonominę sistemą:

$$\dot{x}_i = a_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad (\Leftrightarrow \dot{x} = a(x)); \tag{6.10}$$

čia x_i yra ieškomos kintamojo t funkcijos, $\dot{x}_i = dx_i/dt$. Šios autonominės sistemos trajektorijos erdvėje $\mathbb{R}^n$ apibrėžia kreives, kurios vadinamos (6.9) lygties *charakteristikomis.* Erdvėje $\mathbb{R}^n$ jos apibrėžia $n-1$ dimensijos paviršių, kurį vadinsime charakteristiniu paviršiumi.

Pagal prielaidą koeficientai a_i vienu metu nelygūs nuliui. Todėl (6.10) sistema srityje Ω neturi pusiausvyros taškų. Remiantis 3.15 teorema galime tvirtinti, kad diferencijuojama funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ yra (6.9) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra (6.10) autonominės sistemos integralas (žr. 3.15 teoremą). Pastarojo teiginio įrodymas remiasi formule

$$\frac{du(\varphi(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x) a_i(x)\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Priminsime, kad diferencijuojama funkcija u yra (6.10) sistemos integralas srityje Ω, jeigu kintamojo t atžvilgiu $u(\varphi(t)) = const$, $\forall \varphi : \dot{\varphi}(t) = a(\varphi(t))$. Taigi norint rasti (6.9) lygties visus sprendinius, reikia rasti visus nepriklausomus (6.10) sistemos integralus.

Pagal prielaidą srityje Ω nėra (6.10) sistemos pusiausvyros taškų. Todėl $\forall x_0 \in \Omega$ bent viena iš funkcijų a_i šiame taške nelygi nuliui. Tarkime, $a_1(x_0) \neq 0$. Tada $a_1(x) \neq 0$ pakankamai mažoje šio taško aplinkoje $\Omega_0 \subset \Omega$. Eliminavę iš (6.10) sistemos nepriklausomą kintamąjį t, gausime pirmos eilės normaliąją diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{a_n(x)}{a_1(x)} \tag{6.11}$$

su $n-1$ lygtimi. Remiantis 3.11 teorema kiekvieno taško $x_0 \in \Omega$ aplinkoje ji turi $n-1$ nepriklausomus integralus $u_2(x), \dots, u_n(x)$ ir bet kokie n šios sistemos integralai yra priklausomi. Taigi, jeigu u yra koks nors (6.11) sistemos integralas, nepriklausantis nuo kintamojo t, tai egzistuoja diferencijuojama funkcija Ψ tokia, kad

$$u = \Psi(u_2, \dots, u_n). \tag{6.12}$$

Patikrinsime, kad taip apibrėžta funkcija u yra (6.9) lygties sprendinys. Iš tikrųjų,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\Big(\sum_{k=2}^{n} \Psi_{u_k}(u_2,\dots,u_n)\cdot u_{kx_i}\Big) =$$

$$\sum_{k=2}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{kx_i}\Big)\Psi_{u_k}(u_2,\dots,u_n) = 0.$$

Taigi bet kurį (6.9) lygties sprendinį galima išreikšti (6.12) formule. Todėl (6.12) formule apibrėžtą sprendinį galima vadinti bendruoju (6.9) lygties sprendiniu.

P a v y z d y s. Rasime homogeninės lygties

$$u_{x_1} + u_{x_2} = 0$$

bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinka autonominė sistema

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = 1.$$

Suintegravę ją gausime, kad nagrinėjamos lygties charakteristikos yra tiesės

$$x_1 = t + c_1, \quad x_2 = t + c_2.$$

Eliminavę iš jų kintamąjį t, rasime autonominės sistemos pirmąjį integralą $u = x_1 - x_2$. Todėl bendrasis nagrinėjamos dalinių išvestinių lygties sprendinys

$$u = \Psi(x_1 - x_2);$$

čia Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija.

Tegu $S \subset \mathbb{R}^n$ yra glodus $n-1$ dimensijos paviršius, ψ – glodi paviršiuje S funkcija. Nagrinėsime Koši uždavinį: *rasti funkciją u, kuri paviršiaus S aplinkoje tenkintų (6.9) lygtį, o paviršiuje S pradinę sąlygą*

$$u\Big|_S = \psi(x); \tag{6.13}$$

Be to, tegu paviršių S kiekvieno taško $x_0 \in S$ aplinkoje galima apibrėžti lygtimi $\omega(x) = 0$. Čia ω – tolydžiai diferencijuojama nagrinėjamoje aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2(x) > 0.$$

6.1 teorema. *Jeigu paviršius S nei viename savo taške neliečia (6.9) lygties charakteristikų, tai pakankamai mažoje jo aplinkoje egzistuoja vienintelis Koši uždavinio (6.9), (6.13) sprendinys.*

◃ Laisvai pasirenkame tašką $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S$. Pagal prielaidą paviršius S neliečia (6.9) lygties charakteristikų. Todėl taške x^* reiškinys

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}(x) a_i(x) \neq 0.$$

Tarkime, konkretumo dėlei, $\omega_{x_1}(x^*) \neq 0$ ir $a_1(x^*) \neq 0$. Tada pastarosios nelygybės yra teisingos pakankamai mažoje taško x^* aplinkoje ir šioje aplinkoje paviršių S galima apibrėžti lygtimi $x_1 = g(x_2, \ldots, x_n)$. Kadangi $a_1(x) \neq 0$ tai iš (6.10) sistemos galima eliminuoti parametrą t. Rezultate gausime neautonominę $n-1$ lygčių sistemą:

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{a_k(x_1, \ldots, x_n)}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} := f_k(x), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad funkcija u yra (6.14) neautonominės sistemos integralas tada ir tik tada, kai ji yra (6.10) autonominės sistemos integralas (žr. 3.6 skyrelį).

Tegu

$$x_k = x_k(x_1, x_0), \quad x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \quad k = 2, \ldots, n$$

yra (6.14) sistemos bendrasis sprendinys Koši formoje (jis apibrėžia trajektoriją, einančią per laisvai pasirinktą tašką $x_0 \in S$ iš pakankamai mažos taško x^* aplinkos). Šis sprendinys priklauso nuo n parametrų $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Pažymėję $(x_{20}, \ldots, x_{n0}) = (c_2, \ldots, c_n) := c$, gausime lygtis:

$$x_k = x_k(x_1, g(c), c) := \varphi_k(x_1, c), \quad k = 2, \ldots, n, \tag{6.15}$$

kurios apibrėžia (6.14) sistemos bendrąjį sprendinį, priklausantį nuo $n-1$ laisvos konstantos. Remiantis (3.35) formule dalinės išvestinės

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial c_j} = \frac{\partial x_k(x_1, g(c), c)}{\partial x_{10}} \frac{\partial g(c)}{\partial c_j} + \frac{\partial x_k(x_1, g(c), c)}{\partial c_j} =$$

$$\frac{\partial x_k(x_1, g(c), c)}{\partial c_j} - \sum_{l=2}^{n} \frac{\partial x_k(x_1, g(c), c)}{\partial c_l} \frac{\partial g(c)}{\partial c_j} f_l(g(c), c) \quad k, j = 2, \ldots, n.$$

Matricos $\{\partial \varphi_k / \partial c_j\}$ determinantas

$$\det\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial c_j}\right\} = \det\left\{\frac{\partial x_k(x_1, g(c), c)}{\partial c_j}\right\} \cdot \det\left\{\delta_{ij} - f_i(g(c), c) \frac{\partial g(c)}{\partial c_j}\right\} \neq 0.$$

Iš tikrųjų, pirmasis determinantas dešinėje lygybės pusėje yra teigiamas (žr. (3.36) formulę), o antrasis determinantas

$$\det\left\{\delta_{ij} - f_i(g(c), c) \frac{\partial g(c)}{\partial c_j}\right\} = 1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial g(c)}{\partial c_j} f_j(g(c), c) \neq 0,$$

nes paviršius S nei viename savo taške neliečia (6.9) lygties charakteristikų. Todėl (6.15) lygtis galima išspręsti parametrų $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ atžvilgiu:

$$c_2 = u_2(x), \dots, c_n = u_n(x).$$

Rezultate gauname $n-1$ nepriklausomus (6.14) sistemos integralus $u_2(x), \dots,$ $u_n(x)$ ir bendrąjį (6.9) lygties sprendinį galime užrašyti formule

$$u = \Psi(u_2, \dots, u_n);$$

čia Ψ – tolydžiai diferencijuojama funkcija.

Paviršiaus S taškuose

$$x_k = x_k(g(c), g(c), c) \equiv c_k, \quad \forall k = 2, \dots, n$$

Todėl integralai $u_2(x), \dots,$ $u_n(x)$ paviršiaus S taškuose tenkina sąlygas:

$$u_k(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = x_k, \quad \forall k = 2, \dots, n.$$

Paviršiuje S funkcija

$$\psi(x) = \psi(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = \tilde{\psi}(x_2, \dots, x_n).$$

Apibrėžkime funkciją Ψ formule $\Psi = \tilde{\psi}$. Funkcija $u = \tilde{\psi}(u_2, \dots, u_n)$ yra (6.9) lygties sprendinys. Be to, paviršiuje S ji tenkina pradinę sąlygą

$$u(x)\big|_{x_1 = g(x_2, \dots, x_n)} =$$

$$\tilde{\psi}(u_2(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n), \dots, u_n(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)) =$$
$$\tilde{\psi}(x_2, \dots, x_n) = \psi(x)\big|_{x_1 = g(x_2, \dots, x_n)}.$$

Taigi taip apibrėžta funkcija u pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje yra Koši uždavinio sprendinys. Jis yra vienintelis, nes funkcija Ψ apibrėžiama vienareikšmiai. Tašką $x_0 \in S$ pasirinkome laisvai. Todėl galime tvirtinti, kad nagrinėjamas Koši uždavinys, pakankamai mažoje paviršiaus S aplinkoje, turi vienintelį sprendinį. $\triangleright$

P a v y z d ž i a i:

1. Išsręsime Koši uždavinį

$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0, \quad u\big|_{x_1=0} = x_2^2.$$

Sudarome lygtį atitinkančią autonominę sistemą

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Eliminavę iš šios sistemos kintamąjį t, gausime lygtį

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Tai yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Jos bendrasis integralas

$$x_1^2 + x_2^2 = \text{const.}$$

Vadinasi nagrinėjamos pirmos eilės dalinių išvestinių lygties bendrasis sprendinys

$$u = \Psi(x_1^2 + x_2^2).$$

Iš pradinės sąlygos gauname $\Psi(x_2^2) = x_2^2$. Taigi funkcija $\Psi(t) = t$ ir nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys $u = x_1^2 + x_2^2$.

2. Puserdvėje $x_1 > 0$ rasime homogeninės lygties

$$x_1 u_{x_1} + (x_1^2 + x_3)u_{x_2} + (x_1^2 + x_2)u_{x_3} = 0$$

sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą

$$u\big|_{x_1=1} = x_2^2 - x_3^2.$$

Nagrinėjamą lygtį atitinka autonominė sistema

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1^2 + x_2.$$

Pirmosios lygties sprendinys $x_1 = c_1 e^t$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į antrą ir trečią lygtis, gausime sistemą

$$\dot{x}_2 = c_1^2 e^{2t} + x_3, \quad \dot{x}_3 = c_1^2 e^{2t} + x_2.$$

Iš pirmosios šios sistemos lygties atėmę antrąją gausime lygtį

$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_3) = -(x_2 - x_3),$$

kurią suintegravę randame nagrinėjamos autonominės sistemos pirmąjį integralą

$$x_2 - x_3 = c_2 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_3)x_1 = c_2 c_1 \quad \Rightarrow u_1 = (x_2 - x_3)x_1.$$

Kartu paskutinę sistemos lygtį galime perrašyti taip:

$$\dot{x}_3 = c_1^2 e^{2t} + c_2 e^{-t} + x_3.$$

Tai yra tiesinė pirmosios eilės diferencialinė lygtis. Jos bedrąjį sprendinį

$$x_3 = c_3 e^t + c_1^2 e^{2t} - \frac{c_2}{2} e^{-t}$$

galima rasti, pavyzdžiui, konstantų varijavimo metodu. Eliminavę kintamąjį t ir pasinaudoję formule $c_1 c_2 = (x_2 - x_3)x_1$, randame dar vieną autonominės sistemos integralą

$$x_3 = \frac{c_3}{c_1} x_1 + x_1^2 - \frac{c_2 c_1}{2x_1} \;\Rightarrow\; \frac{x_3 + x_2 - 2x_1^2}{2x_1} = \frac{c_3}{c_1} \;\Rightarrow\; u_2 = \frac{x_3 + x_2 - 2x_1^2}{2x_1}.$$

Taigi nagrinėjamos lygties bendrasis sprendinys

$$u = \Psi(u_1, u_2) = \Psi\Big((x_2 - x_3)x_1, \frac{x_3 + x_2 - 2x_1^2}{2x_1}\Big);$$

čia Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija. Taške $x_1 = 1$ integralai $u_1 = x_2 - x_3$, $u_2 = (x_3 + x_2 - 2)/2$. Reikalaujame, kad rastas sprendinys tenkintų pradinę sąlygą

$$u\big|_{x_1=1} = \Psi(x_2 - x_3, (x_3 + x_2 - 2)/2) = x_2^2 - x_3^2.$$

Taške $x_1 = 1$ reiškinys

$$x_2^2 - x_3^2 = (x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = u_1 \cdot 2(u_2 + 1)$$

Todėl funkciją Ψ apibrėžiame taip: $\Psi(u_1, u_2) = 2u_1(u_2 + 1)$. Taigi nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys

$$u = 2x_1(x_2 - x_3)\Big(\frac{x_3 + x_2 - 2x_1^2}{2x_1} + 1\Big) = (x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1^2 + 2x_1).$$

3. Puserdvėje $x_1 > 0$ rasime Koši uždavinio

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = 0, \quad u\big|_{x_1=2} = x_2 + x_3$$

sprendinį. Pastarąją lygtį atitinka autonominė sistema

$$\dot{x}_k = x_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Jos trajektorijos yra tiesės išeinančios iš koordinačių pradžios ir puservėje $x_1 > 0$ neliečia paviršiaus $x_1 = 2$. Eliminavę kintamąjį t iš autonominės sistemos, gausime dviejų lygčių neautonominę sistemą

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{x_3}{x_1}.$$

Ši sistema turi du nepriklausomus integralus $u_1 = x_2/x_1$, $u_2 = x_3/x_1$. Kartu jie yra ir autonominės sistemos nepriklausomi integralai. Todėl bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys

$$u = \Psi(u_1, u_2);$$

čia Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija. Taške $x_1 = 2$ integralai $u_1 = x_2/2$, $u_2 = x_3/2$. Todėl

$$u\big|_{x_1=2} = \Psi(x_2/2, x_3/2) = x_2 + x_3 = 2(u_1 + u_2)\big|_{x_1=2}$$

ir funkciją Ψ apibrėžiame taip: $\Psi(u_1, u_2) = 2(u_1 + u_2)$. Taigi nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys

$$u = 2(u_1 + u_2) = 2(x_2 + x_3)/x_1.$$

4. Srityje $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ rasime Koši uždavinio

$$\sqrt{x_1}u_{x_1} + \sqrt{x_2}u_{x_2} + \sqrt{x_3}u_{x_3} = 0, \quad u\big|_{x_3=1} = x_1 - x_2$$

sprendinį. Nagrinėjamą lygtį atitinka autonominė sistema

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_1}, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2} \quad \dot{x}_3 = \sqrt{x_3}.$$

Suintegravę ją randame

$$2\sqrt{x_1} = t + c_1, \quad 2\sqrt{x_2} = t + c_2, \quad 2\sqrt{x_3} = t + c_3.$$

Eliminavę iš šių lygčių kintamąjį t gausime autonominės sistemos du nepriklausomus integralus

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3} = (c_1 - c_3)/2, \quad \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = (c_2 - c_3)/2.$$

Taigi nagrinėjamos dalinių išvestinių lygties bendrasis sprendinys

$$u = \Psi(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}, \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3});$$

čia Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija. Iš pradinės sąlygos gauname

$$\Psi(\sqrt{x_1} - 1, \sqrt{x_2} - 1) = (\sqrt{x_1})^2 - (\sqrt{x_2})^2.$$

Taigi funkcija

$$\Psi(t, \tau) = (t+1)^2 - (\tau + 1)^2.$$

Kartu nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys

$$u = (1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})^2 - (1 + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})^2.$$

P a s t a b a. Jeigu (6.1) teoremos sąlygos yra nepatenkintos, tai (6.9),(6.13) Koši uždavinys sprendinio gali neturėti, arba sprendinys gali būti ne vienintelis. Pavyzdžiui, lygties $u_{x_1} + u_{x_2} = 0$ bendrasis sprendinys $u = \Psi(x_1 - x_2)$, kur Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija. Apibrėžkime pradinę sąlygą taip: $u|_{x_1=x_2} = \psi(x_1)$. Kadangi tiesė $x_1 = x_2$ yra charakteristika, tai iš pradinės sąlygos gauname $\Psi(0) = \psi(x_1)$. Taigi, jeigu funkcija ψ nėra konstanta, tai nagrinėjamas Koši uždavinys sprendinio neturi. Jeigu funkcija ψ yra pastovi, Koši uždavinio sprendinys nėra vienintelis. Be to, jeigu pradinę sąlygą apibrėšime ne charakteristikoje (pavyzdžiui, $u|_{x_1=2x_2} = \psi(x_1)$), o funkcija ψ nėra diferencijuojama, tai funkcija $u = \psi(2x_1 - 2x_2)$ nebus sprendinys (pagal apibrėžimą sprendinys yra diferencijuojama funkcija).

6.3 KVAZITIESINĖS LYGTYS

Tegu $a_1, \ldots, a_n$ ir b – diferencijuojamos srityje $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ funkcijos, tenkinančios sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,p) \neq 0, \quad \forall (x,p) \in G.$$

Nagrinėsime kvazitiesinę lygtį

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) u_{x_i} = b(x,u). \tag{6.16}$$

Jos sprendinio ieškosime neišreikštinės funkcijos pavidalu

$$v(x,u) = 0, \quad v \in \mathrm{C}^1(G), \quad v_u \neq 0.$$

Diferencijuodami šią lygtį pagal kintamąjį x_i gauname sąryšį

$$v_{x_i} + v_u u_{x_i} = 0.$$

Padauginę (6.16) lygtį iš v_u ir pasinaudoję šiuo sąryšiu gausime, kad funkcija v yra tiesinės homogeninės pirmos eilės dalinių išvestinių lygties

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) v_{x_i} + b(x,u) v_u = 0 \tag{6.17}$$

sprendinys. Teisingas ir atvirkštinis teiginys. Jeigu funkcija v yra (6.17) lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą $v_u \neq 0$, tai neišreikštinė lygtis $v(x,u) = 0$ apibrėžia (6.16) lygties sprendinį u.

Gautą (6.17) homogeninę lygtį atitinka autonominė sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_i(x,u), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{u} = b(x,u). \end{cases} \tag{6.18}$$

Šios autonominės sistemos trajektorijos erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ apibrėžia kreives, kurios vadinamos (6.16) lygties *charakteristikomis.* Erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ charakteristikos apibrėžia n dimensijos paviršių, kuris vadinamas charakteristiniu paviršiumi. Kadangi funkcijos a_i vienu metu nelygios nuliui, tai (6.18) sistema neturi pusiausvyros taškų.

Tegu $v_1(x,u), \ldots, v_n(x,u)$ yra (6.18) autonominės sitemos nepriklausomi integralai. Tada (6.17) lygties bendrasis sprendinys

$$v(x,u) = \Psi(v_1(x,u), \ldots, v_n(x,u));$$

čia Ψ – bet kokia diferencijuojama funkcija. Jeigu taip apibrėžtos funkcijos v išvestinė $v_u \neq 0$, tai lygtis

$$\Psi(v_1(x,u), \ldots, v_n(x,u)) = 0 \tag{6.19}$$

apibrėžia (6.16) lygties sprendinius neišreikštiniu pavidalu.

P a v y z d y s. Puserdvėje $x_3 > 0$ rasime dalinių išvestinių lygties

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = mu, \quad m \in \mathbb{R}.$$

bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinka keturių autonominių lygčių sistema

$$\dot{x}_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \dot{u} = mu.$$

Ji turi tris nepriklausomus integralus

$$v_1(x, u) = \frac{x_1}{x_3}, \quad v_2(x, u) = \frac{x_2}{x_3}, \quad v_3(x, u) = \frac{u}{x_3^m}.$$

Todėl nagrinėjamos lygties sprendiniai apibrėžiami neišreikštine lygtimi

$$\Psi\Big(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{u}{x_3^m}\Big) = 0.$$

Išsprendę pastarąją lygtį atžvilgiu paskutinio kintamojo rasime nagrinėjamos lygties sprendinį

$$u(x) = x_3^m \Phi\Big(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\Big)$$

Taigi nagrinėjamos lygties sprendiniai yra m-to laipsnio homogeninės funkcijos (visoms leistinoms parametro λ reikšmėms tenkina sąlygą $u(\lambda x) = \lambda^m u(x)$).

P a s t a b a. Neišreikštinė (6.19) lygtis gali apibrėžti ne visus (6.16) lygties sprendinius. Gali egzistuoti tokie (6.16) sprendiniai, su kuriais (6.17) lygtis tapatingai netenkinama kintamųjų (x, u) atžvilgiu, tačiau kai $u = \varphi(x)$ tenkinama tapatingai kintamųjų x atžvilgiu. Tokie (6.16) lygties sprendiniai vadinami *specialiaisiais* sprendiniais.

P a v y z d y s. Nagrinėsime lygtį

$$(1 - \sqrt{u - x_1 - x_2})u_{x_1} + u_{x_2} = 2.$$

Jos sprendinio ieškome neišreikštinės funkcijos pavidalu $v(x_1, x_2, u) = 0$. Tada funkcijai v gauname homogeninę dalinių išvestinių lygtį

$$(1 - \sqrt{u - x_1 - x_2})v_{x_1} + v_{x_2} + 2v_u = 0.$$

Šią lygtį atitinka trijų autonominių lygčių sistema

$$\dot{x}_1 = (1 + \sqrt{u - x_1 - x_2}), \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \dot{u} = 2.$$

Iš antros ir trečios lygties randame $x_2 = t + c_1$, $u = 2t + c_2$. Eliminavę iš šių lygčių kintamąjį t gauname pirmąjį integralą $v_1 = u - 2x_2$. Iš trečiosios lygties atėmę pirmąją ir antrąją, gausime paprastąją diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{d}{dt}(u - x_1 - x_2) = -\sqrt{u - x_1 - x_2}.$$

Jeigu $u - x_1 - x_2 \neq 0$, tai šios lygties bendrasis sprendinys

$$2\sqrt{u - x_1 - x_2} = c - t.$$

Eliminavę kintamąjį t rasime integralą $v_2 = x_2 + 2\sqrt{u - x_1 - x_2}$. Taigi bendrasis nagrinėjamos dalinių išvestinių lygties sprendinys apibrėžiamas neišreikštine lygtimi

$$v(x_1, x_2, u) := \Psi(u - 2x_2, x_2 + 2\sqrt{u - x_1 - x_2}) = 0.$$

Jeigu $u - x_1 - x_2 = 0$, tai turime specialųjį sprendinį $u = x_1 + x_2$. Jo negalima gauti iš bendrojo sprendinio. Funkcija v, apibrėžta lygtimi $v = u - x_1 - x_2$, yra homogeninės dalinių išvestinių lygties $v_{x_1} + v_{x_2} + 2v = 0$ sprendinys. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad specialiojo sprendinio taškuose nagrinėjamos lygties vieno iš koeficientų išvestinė nėra tolydi (tiksliau yra neaprėžta). Todėl šiuose taškuose yra nepatenkintos autonominės sistemos sprendinių egzistavimo ir vienaties teoremos sąlygos.

Tegu $S \subset \mathbb{R}^n$ yra glodus $n-1$ dimensijos paviršius, ψ – glodi paviršiuje S funkcija. Nagrinėsime Koši uždavinį: *rasti funkciją u, kuri paviršiaus S aplinkoje tenkintų (6.16) lygtį, o paviršiuje S pradinę sąlygą*

$$u\big|_S = \psi(x)\big|_S; \tag{6.20}$$

Be to, tegu paviršių S kiekvieno taško $x_0 \in S$ aplinkoje galima apibrėžti lygtimi $\omega(x) = 0$. Čia ω – tolydžiai diferencijuojama nagrinėjamoje aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2(x) > 0.$$

Erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ lygtis $\omega(x) = 0$ apibrėžia n-matį cilindrą $S \times \mathbb{R}$.

6.2 teorema. *Jeigu cilindras $S \times \mathbb{R}$ nei viename savo taške neliečia (6.16) lygties charakteristikų, t.y.*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}(x) a_i(x, u) \neq 0, \quad \forall (x, u) \in (S \times \mathbb{R}) \cap G,$$

tai pakankamai mažoje jo aplinkoje egzistuoja vienintelis Koši uždavinio (6.16), (6.20) sprendinys.

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame tašką $(x^*, u^*) \in S \times \mathbb{R}$. Kadangi cilindras $S \times \mathbb{R}$ neliečia (6.16) lygties charakteristikų, tai kiekviename jo taške

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) \omega_{x_i}(x) \neq 0.$$

Tarkime, kokioje nors taško (x^*, u^*) aplinkoje $a_1(x, u) \neq 0$ ir $\omega_{x_1}(x) \neq 0$. Tada (6.18) autonominė sistema ekvivalenti n neautonominių lygčių sistemai

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{a_k(x, u)}{a_1(x, u)}, \quad k = 2, \ldots, n, \quad \frac{du}{dx_1} = \frac{b(x, u)}{a_1(x, u)}, \tag{6.21}$$

o paviršių S galima apibrėžti išreikštine lygtimi

$$x_1 = g(x_2, \ldots, x_n).$$

Tegu

$$x_k = x_k(x_1, x_0, u_0), \quad u = u(x_1, x_0, u_0), \quad k = 2, \ldots, n \tag{6.22}$$

yra (6.21) sistemos bendrasis sprendinys Koši formoje (jis apibrėžia trajektoriją einančią per laisvai pasirinktą tašką $(x_0, u_0) \in S \times \mathbb{R}$ iš pakankamai mažos taško (x^*, u^*) aplinkos). Šis sprendinys priklauso nuo $n+1$ parametrų $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, u_0. Kadangi taškas $x_0 \in S$, tai parametrai $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ yra susieti lygtimi $x_1 = g(x_2, \ldots, x_n)$. Pažymėję $u_0 = c_1, x_{20} = c_2, \ldots, x_{n0} = c_n$ gausime (6.21) sistemos bendrąjį sprendinį

$$x_k = x_k(x_1, g(c_2, \ldots, c_n), c_2, \ldots, c_n, c_1) := \varphi_k(x_1, c), \quad k = 2, \ldots, n,$$

$$u = u(x_1, g(c_2, \ldots, c_n), c_2, \ldots, c_n, c_1) := \varphi(x_1, c), \quad c = (c_1, \ldots, c_n),$$

kuris priklauso nuo n laisvų konstantų $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Šias lygtis galima išspręsti parametrų $c \in \mathbb{R}^n$ atžvilgiu (žr. 6.2 skyrelio 6.1 teoremos įrodymą)

$$c_1 = v_1(x, u), \quad c_k = v_k(x, u), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Rezultate gausime (6.21) neautonominės sistemos n nepriklausomų integralų

$$v_k(x, u), \quad k = 1, \ldots, n,$$

tenkinančių cilindro $S \times \mathbb{R}$ taškuose sąlygas:

$$\begin{aligned} &v_k(g(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n, u) = x_k, \ k = 2, \ldots, n, \\ &v_1(g(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n, u) = u. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Tada lygtis (žr. (6.19) formulę)

$$\Psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0, \quad \Psi_u \neq 0$$

apibrėžia bendrąjį (6.16) lygties sprendinį neišreikštiniu pavidalu. Paviršiaus S taškuose funkcija

$$\psi(x) = \psi(g(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) = \tilde{\psi}(x_2, \ldots, x_n).$$

Imkime

$$\Psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 - \tilde{\psi}(v_2, \ldots, v_n).$$

Tada paviršiaus S taškuose funkcija u tenkins (6.20) Koši sąlygą

$$\Psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)\Big|_{x_1 = g(x_2, \ldots, x_n)} = u - \psi(g(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Taigi (6.19) lygtis, su taip apibrėžta funkcija Ψ, apibrėžia Koši uždavinio sprendinį neišreikštiniu pavidalu. Rastas sprendinys yra vienintelis, nes pradinė sąlyga išskyrė rasta sprendinį, iš bendrojo sprendino, vienareikšmiai. $\triangleright$

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime lygties
$$x_2uu_{x_1} + x_1uu_{x_2} = x_1x_2$$
sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą
$$x_2^2 + u^2 = a^2, \quad x_1 = a, \quad a \neq 0.$$
Nagrinėjamos lygties charakteristikos yra autonominės sistemos
$$\dot{x}_1 = x_2u, \quad \dot{x}_2 = x_1u, \quad \dot{u} = x_1x_2$$
trajektorijos, arba ją atitinkančios neautonominės sistemos
$$\frac{dx_1}{du} = \frac{u}{x_1}, \quad \frac{dx_2}{du} = \frac{u}{x_2}$$
integralinės kreivės. Išsprendę šią sistemą randame bendruosius integralus
$$v_1 = x_1^2 - u^2, \quad v_2 = x_2^2 - u^2.$$
Todėl bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys apibrėžiamas neišreikštine lygtimi
$$\Psi(v_1, v_2) = v_2 - \Phi(v_1) = 0;$$
čia Φ – diferencijuojama funkcija. Iš pradinės sąlygos gauname
$$a^2 - 2u^2 = \Phi(a^2 - u^2) = 0 \Leftrightarrow \Phi(t) = 2t - a^2.$$
Taigi nagrinėjamos lygties sprendinys u apibrėžiamas neišreikštine lygtimi
$$2x_1^2 - x_2^2 - u^2 = a^2.$$

2. Srityje $G = \{(x_1, x_2, u) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}, u > 0\}$ rasime lygties
$$x_1uu_{x_1} + x_2uu_{x_2} = -x_1x_2$$
sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą
$$u_{x_2 = x_1^2} = x_1^3$$
Nagrinėjamos lygties charakteristikos yra autonominės sistemos
$$\dot{x}_1 = x_1u, \quad \dot{x}_2 = x_2u, \quad \dot{u} = -x_1x_2$$
trajektorijos, arba ją atitinkančios neautonominės sistemos
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{du}{dx_1} = \frac{-x_2}{u}$$
integralinės kreivės. Išsprendę šios sistemos pirmąją lygtį, gausime jos bendrąjį sprendinį
$$x_2 = c_1x_1.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į antrąją sistemos lygtį, gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$u\,du = -c_1 x_1\,dx_1.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$u = \sqrt{c_2 - c_1 x_1^2}.$$

Išsprendę gautas lygtys parametrų c_1, c_2 atžvilgiu, randame neautonominės sistemos bendruosius integralus

$$v_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad v_2 = u^2 + x_1 x_2.$$

Srityje G jie nepriklausomi, nes determinantas

$$\begin{vmatrix} v_{1x_2} & v_{1u} \\ v_{2x_2} & v_{2u} \end{vmatrix} = 2u/x_1 \neq 0.$$

Todėl bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys apibrėžiamas neišreikštine lygtimi

$$\Psi(v_1, v_2) = v_2 - \Phi(v_1) = 0;$$

čia Φ – diferencijuojama funkcija. Pagal prielaidą $u|_{x_2=x_1^2} = x_1^3$, o integralai $v_1|_{x_2=x_1^2} = x_1$, $v_2|_{x_2=x_1^2} = x_1^6 + x_1^3$. Todėl yra teisinga lygybė

$$x_1^6 + x_1^3 - \Phi(x_1) = 0,$$

kuri vienareikšmiškai apibrėžia funkciją Φ. Taigi nagrinėjamo Koši uždavinio sprendinys apibrėžiamas neišreikštine lygtimi

$$u^2 + x_1 x_2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^6 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3.$$

Išsprendę ją u atžvilgiu randame ieškomą sprendinį

$$u = \sqrt{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^6 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 - x_1 x_2}.$$

7 SKYRIUS

Antrosios eilės dalinių išvestinių lygtys

7.1 TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ KLASIFIKACIJA

Įvairūs fizikos ir mechanikos uždaviniai aprašomi diferencialinėmis dalinių išvestinių lygtimis. Dažniausiai tai tiesinės antros eilės lygtys. Paprasčiausios iš jų yra Puasono (Laplaso)

$$-\Delta u = f, \quad (\Delta u = 0),$$

šilumos laidumo

$$u_t - a^2 \Delta u = f$$

ir bangavimo

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f$$

lygtys. Čia

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

yra n-matis *Laplaso* operatorius.

Nagrinėsime tiesines antros eilės lygtis

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x). \tag{7.1}$$

Išskirsime tris lygčių klases, kurioms priklauso Puasono, šilumos laidumo ir bangavimo lygtys.

Tarkime, (7.1) lygtyje funkcijos a_{ij}, a_i, a ir f yra apibrėžtos srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarome kvadratinę formą

$$\Lambda(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2}$$

Tiesinėje algebroje įrodoma, kad (7.2) kvadratinę formą fiksuotame taške $x^0 \in \Omega$ naudojant neišsigimusią tiesinę transformaciją

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ki} \eta_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

galima suvesti į kvadratų sumą

$$\Lambda(x^0, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2; \tag{7.3}$$

čia:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)C_{ki}C_{lj} = \lambda_k \delta_k^l, \quad \delta_k^l = \begin{cases} 1, & \text{kai } l = k, \\ 0, & \text{kai } l \neq k, \end{cases} \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Be to, visi koeficientai λ_k yra realūs, nes $\{a_{ij}\}$ yra simetrinė matrica.

Pagal kvadratinių formų inercijos dėsnį teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui koeficientų skaičius nepriklauso nuo parinktos neišsigimusios transformacijos, suvedančios šią formą į kvadratų sumą. Todėl yra galima tokia tiesinių antros eilės lygčių klasifikacija.

A p i b r ė ž i m a s. (7.1) lygtis taške x^0 yra (α, β, γ) tipo, jeigu (7.3) kvadratinėje formoje yra α teigiamų, β neigiamų ir γ lygių nuliui koeficientų λ_k.

P a s t a b a. Savaime aišku, kad tipus (α, β, γ) ir (β, α, γ) galima sutapatinti. Be to, jeigu (7.1) lygtyje koeficientai a_{ij} yra pastovūs, tai visuose erdvės $\mathbb{R}^n$ taškuose ši lygtis yra to paties tipo.

I š s k i r s i m e t r i s a t v e j u s:

1. Visi koeficientai $\lambda_k \neq 0$ ir yra vienodo ženklo. Tada (7.1) lygtis taške x^0 yra $(n, 0, 0)$ arba $(0, n, 0)$ tipo ir vadinama *elipsine lygtimi* taške x^0.

2. Visi koeficientai $\lambda_k \neq 0$ ir vieno iš jų ženklas skiriasi nuo kitų. Tada (7.1) lygtis taške x^0 yra $(n-1, 1, 0)$ arba $(1, n-1, 0)$ tipo ir vadinama *hiperboline lygtimi* taške x^0.

3. Vienas iš koeficientų, tarkime λ_k, lygus nuliui, o kiti nelygūs nuliui ir vienodo ženklo. Tada (7.1) lygtis taške x^0 yra $(n-1, 0, 1)$ arba $(0, n-1, 1)$ tipo. Jeigu, be to, dar
$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x^0)C_{ki} \neq 0, \tag{7.4}$$
tai (7.1) lygtis vadinama *paraboline lygtimi* taške x^0. Jeigu (7.4) sąlyga yra nepatenkinta, tai (7.1) lygtis vadinama *paraboline lygtimi plačiąja prasme.*

P a s t a b a. Vietoje nepriklausomų kintamųjų $x_1, \ldots, x_n$ įveskime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ki} x_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Atlikę elementarius skaičiavimus, gausime, kad (7.1) lygtį taške x^0 galima užrašyti taip:
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f; \tag{7.5}$$

čia koeficientai $A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x^0)C_{ki}$. Taigi parabolinės lygties atveju (7.4) papildoma sąlyga rodo, kad koeficientas A_k prie išvestinės u_{y_k} nelygus nuliui. Tuo atveju, kai (7.4) sąlyga yra nepatenkinta, t.y. kai koeficientas $A_k = 0$, (7.5) lygtyje nėra funkcijos u išvestinių kintamojo y_k atžvilgiu. Tačiau tada į šį kintamąjį galima žiūrėti kaip į laisvąjį parametrą.

Apibrėžimas. Sakysime, (7.1) lygtis yra elipsinė, hiperbolinė arba parabolinė srityje Ω, jeigu ji yra tokia kiekviename srities Ω taške. Toliau nagrinėsime tik šių trijų tipų lygtis.

7.1 teorema. *Neišsigimusi nepriklausomų kintamųjų transformacija (nebūtinai tiesinė) lygties tipo nekeičia.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [2] knygoje.

Pavyzdžiai:

1. Puasono (Laplaso) lygtį

$$\Delta u = -f \quad (\Delta u = 0)$$

atitinka kvadratinė forma

$$\Lambda(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$

Visi jos koeficientai nelygūs nuliui, vienodo ženklo (lygūs 1) ir nepriklauso nuo konkretaus taško $x \in \mathbb{R}^n$. Todėl Puasono ir Laplaso lygtys yra elipsinės lygtys visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$.

2. Šilumos laidumo lygtį

$$u_t - a^2 \Delta u = f$$

atitinka kvadratinė forma

$$\Lambda(x, t, \xi) = -a^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 0 \cdot \xi_{n+1}^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vienas iš šios kvadratinės formos koeficientų lygus nuliui, o kiti nelygūs nuliui ir vienodo ženklo. Be to, visi lygties koeficientai nepriklauso nuo konkretaus taško $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Todėl šilumos laidumo lygtis yra parabolinė lygtis visoje erdvėje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

3. Bangavimo lygtį

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f$$

atitinka kvadratinė forma

$$\Lambda(x, t, \xi) = -a^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 1 \cdot \xi_{n+1}^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Visi jos koeficientai nelygūs nuliui ir vieno iš jų ženklas skiriasi nuo kitų. Be to, lygties koeficientai nepriklauso nuo konkretaus taško $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Todėl bangavimo lygtis yra hiperbolinė lygtis visoje erdvėje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

4. Pateiksime pavyzdį lygties, kurios tipas priklauso nuo konkretaus srities taško. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ nagrinėsime *Trikomio* lygtį

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Šią lygtį atitinka kvadratinė forma

$$\Lambda(x, y, \xi, \eta) = y\xi^2 + 1 \cdot \eta^2, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^1.$$

Pusplokštumėje $y > 0$ jos koeficientai nelygūs nuliui ir vienodo ženklo, pusplokštumėje $y < 0$ jos koeficientai nelygūs nuliui ir skirtingų ženklų, o tiesėje $y = 0$ vienas iš koeficientų lygus nuliui. Todėl pusplokštumėje $y > 0$ Trikomio lygtis yra elipsinė, pusplokštumėje $y < 0$ – hiperbolinė, o tiesėje $y = 0$ – parabolinė. Trikomio lygtis atsiranda nagrinėjant kieto kūno judėjimą dujose greičiu, artimu garso greičiui. Sritį $y < 0$ atitinka judėjimas greičiu, viršijančiu garso greitį, o sritį $y > 0$ – mažesniu už garso greitį.

P a s t a b a. Jeigu lygtis

$$F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0$$

netiesinė, tai jos tipas priklauso ne tik nuo taško x, bet ir nuo konkretaus sprendinio. Norint apibrėžti netiesinės lygties sprendinio u_0 taške x^0 tipą, reikia suskaičiuoti dalines išvestines $F_{u_{x_i x_j}}$ ir iš koeficientų

$$a_{ij}(x^0, u_0) = \begin{cases} F_{u_{x_i x_j}}, & i \neq j, \\ \frac{1}{2} F_{u_{x_i x_j}}, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

sudaryti kvadratinę formą

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x^0, u_0)\xi_i\xi_j.$$

Toliau lygties tipas apibrėžiamas taip pat kaip tiesinės lygties atveju.

7.2 TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS KANONINIS PAVIDALAS

Nagrinėsime antros eilės tiesinę lygtį

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f. \tag{7.6}$$

Tarkime, šioje lygtyje koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir a yra pastovūs, o f – kintamojo x funkcija, apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Vietoje kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ki} x_i, \quad k = 1, \dots, n;$$

čia $\{C_{ki}\}$ – kokia nors neišsigimusi matrica. Tada (7.6) lygtis virs lygtimi

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} u_{y_k y_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f. \tag{7.7}$$

Šioje lygtyje koeficientai

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Matricą $\{C_{ki}\}$ parinkime taip, kad matrica $\{A_{kl}\}$ būtų diagonali. Tiksliau, tegu matrica $\{C_{ki}\}$ yra tokia, kad

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} C_{ki} C_{lj} = \lambda_k \delta_k^l, \quad \forall k, l = 1, \dots, n.$$

Tada (7.7) lygtį galima užrašyti taip:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f, \quad A_k = \sum_{i=1}^{n} a_i C_{ki}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{7.8}$$

Šioje lygtyje kiekvieną iš koeficientų λ_k galima prilyginti $+1$, -1 arba 0. Iš tikrųjų, jeigu kuris nors koeficientas, tarkime λ_1, įgyja kitokią reikšmę, tai atlikus transformaciją

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} y_1,$$

koeficientas prie išvestinės $u_{z_1 z_1}$ bus lygus $\dfrac{\lambda_1}{|\lambda_1|}$, t.y. ± 1.

Taigi (7.6) lygtį visada galima suvesti į paprastesnę (7.8) lygtį, kurios matrica, sudaryta iš koeficientų prie antros eilės išvestinių, yra diagonali. Vadinasi, (7.8) lygtyje nėra mišrių antros eilės išvestinių. Toks (7.6) lygties pavidalas vadinamas *kanoniniu.*

P a v y z d y s. Suvesti lygtį

$$u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + 6u_{x_3x_3} = 0$$

į kanoninį pavidalą. Šią lygtį atitinka kvadratinė forma

$$\Lambda(x,\xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 + 6\xi_3^2 =$$

$$(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 + (2\xi_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2;$$

čia

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3,\ \eta_2 = \xi_2 + \xi_3,\ \eta_3 = 2\xi_3.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą kintamųjų ξ_1, ξ_2, ξ_3 atžvilgiu, gausime

$$\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3,\ \xi_2 = \eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3,\ \xi_3 = \frac{1}{2}\eta_3.$$

Todėl

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Darome keitinį $y = C^T x$ ir suskaičiuojame funkcijos u antros eilės dalines išvestines pagal naujus nepriklausomus kintamuosius. Rezultate gausime nagrinėjamos lygties kanoninį pavidalą

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} + u_{y_3y_3} = 0.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad ir (7.8) lygtį galima suprastinti. Tuo tikslu vietoje funkcijos u apibrėšime naują nežinomą funkciją

$$v = \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_k y_k\Big\}\,u, \quad \rho_k = \begin{cases}\lambda_k^{-1}A_k, & \text{kai } \lambda_k \neq 0,\\ 0, & \text{kai } \lambda_k = 0,\end{cases} \quad k = 1,\dots,n.$$

Tada (7.8) lygtis virs lygtimi

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_{y_ky_k} + \sum_{k=1}^{n}(A_k - \lambda_k\rho_k)v_{y_k} + Av = F; \tag{7.9}$$

čia:

$$A = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{4}\lambda_k\rho_k^2 - \frac{1}{2}A_k\rho_k\Big) + a, \quad F = \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_k y_k\Big\}\,f.$$

Pastarosios lygties koeficientai $A_k - \lambda_k\rho_k$ lygūs nuliui tokioms indeksų k reikšmėms, kurioms $\lambda_k \neq 0$. Todėl yra teisingi tokie teiginiai:

1. Jeigu (7.6) lygtis yra elipsinė (tarkime, $\lambda_k = 1$, $\forall k = 1, \dots, n$), tai ją galima suvesti į lygtį
$$\Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k y_k}.$$
2. Jeigu (7.6) lygtis yra parabolinė (tarkime, $\lambda_k = -1$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, o $\lambda_n = 0$), tai ją galima suvesti į lygtį
$$v_t - \Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n-1} v_{y_k y_k}, \quad t = \frac{y_n}{A}.$$
3. Jeigu (7.6) lygtis yra hiperbolinė (tarkime, $\lambda_k = -1$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, o $\lambda_n = 1$), tai ją galima suvesti į lygtį
$$v_{tt} - \Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n-1} v_{y_k y_k}, \quad t = y_n.$$

Aišku, kad kiekviename fiksuotame taške į kanoninį pavidalą galima suvesti ir tiesinę (kvazitiesinę) lygtį su kintamais koeficientais. Tačiau kiekviename taške reikia apibrėžti savą transformaciją, leidžiančią tai atlikti.

P a s t a b a. Dviejų nepriklausomų kintamųjų atveju tiesinė hiperbolinė antros eilės lygtis turi kanoninį pavidalą
$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{7.10}$$
Jis dar vadinamas *pirmuoju kanoniniu hiperbolinės lygties* pavidalu. Jeigu (7.10) lygtyje įvesime naujus nepriklausomus kintamuosius
$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$
tai gausime tokį antros eilės hiperbolinės lygties kanoninį pavidalą:
$$u_{\xi\eta} + \widetilde{a}u_\xi + \widetilde{b}u_\eta + cu = f. \tag{7.11}$$
Jis yra vadinamas *antruoju kanoniniu hiperbolinės lygties* pavidalu. Akivaizdu, kad atlikus transformaciją
$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$
(7.11) lygtis susiveda į (7.10) lygtį.

7.3 DVIEJŲ NEPRIKLAUSOMŲ KINTAMŲJŲ ATVEJIS

Tiesinę antros eilės lygtį su kintamais koeficientais fiksuotame taške galima suvesti į kanoninį pavidalą. Kokioje nors taško aplinkoje to, bendruoju atveju, padaryti negalima. Tiksliau, jeigu nepriklausomų kintamųjų skaičius yra didesnis už du, tai net mažoje taško aplinkoje ne visada galima rasti neišsigimusią nepriklausomų kintamųjų transformaciją, kuri suvestų lygtį į kanoninį pavidalą. Išimti sudaro dviejų nepriklausomų kintamųjų atvejis. Išnagrinėsime jį.

Tiesinę antros eilės lygtį su dviem nepriklausomais kintamaisiais galima užrašyti taip:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \ldots = 0 \tag{7.12}$$

Tarkime, pakankamai mažoje taško (x_0, y_0) aplinkoje U funkcijos a, b ir c ir jų pirmosios eilės dalinės išvestinės yra tolydžios. Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarykime kvadratinę formą

$$\Lambda(x,y,\xi,\eta) = a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2. \tag{7.13}$$

Kiekviename fiksuotame aplinkos U taške (x,y) šią formą galima suvesti į kanoninį pavidalą. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad (7.13) kvadratinės formos, suvestos į kvadratų sumą, teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui koeficientų skaičius lygus atitinkamai teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui charakteristinio polinomo

$$\begin{vmatrix} a(x,y)-\lambda & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

šaknų skaičiui. Tegu $\lambda_1(x,y)$ ir $\lambda_2(x,y)$ yra charakteristinio polinomo šaknys. Tada jų sandauga

$$\lambda_1(x,y)\lambda_2(x,y) = a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y) \tag{7.14}$$

ir galimi tokie atvejai:

1. Šaknys λ_1, λ_2 yra vienodų ženklų ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai
$$b^2 - ac < 0. \tag{7.15}$$
Šiuo atveju (7.12) lygtis yra vadinama *elipsine* lygtimi

2. Šaknys λ_1, λ_2 turi skirtingus ženklus ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai
$$b^2 - ac > 0. \tag{7.16}$$
Šiuo atveju (7.12) lygtis yra vadinama *hiperboline* lygtimi.

3. Kuri nors iš šaknų λ_1, λ_2 lygi nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai
$$b^2 - ac = 0. \tag{7.17}$$
Šiuo atveju (7.12) lygtis yra vadinama *paraboline* lygtimi.

P a s t a b a. Šaknys λ_1, λ_2 vienu metu negali būti lygios nuliui. Jeigu abi šaknys yra lygios nuliui, tai lengvai galima įsitikinti, kad koeficientai a, b ir c taip pat yra lygūs nuliui. O tai prieštarauja tam, kad (7.12) lygtis yra antros eilės lygtis.

Vietoje kintamųjų x, y apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Tarkime, funkcijos ξ ir η aplinkoje U yra dukart diferencijuojamos, o jakobianas

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada funkcijos u išvestinės

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.$$

Pasinaudoję šiomis formulėmis, (7.12) lygtį perrašysime taip:

$$A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + \ldots = 0; \tag{7.18}$$

čia koeficientai

$$A(\xi, \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$C(\xi, \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,$$

$$B(\xi, \eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y.$$

Tiesiogiai galima įrodyti, kad

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}^2. \tag{7.19}$$

Ši lygybė (dvimačiu atveju) parodo, kad neišsigimusi transformacija lygties tipo nekeičia.

Funkcijas ξ ir η parinksime taip, kad (7.18) lygtis įgytų paprasčiausią pavidalą. Taip bus tada ir tik tada, kai dalis (7.18) lygties koeficientų prie antros eilės išvestinių bus lygi nuliui. Prilyginę nuliui koeficientą A, gausime lygtį

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \tag{7.20}$$

Išnagrinėsime tris galimus atvejus:

1. Tegu (7.12) lygtis aplinkoje U yra hiperbolinė. Jeigu abu šios lygties koeficientai a ir c yra lygūs nuliui, tai koeficientas $b \neq 0$ ir (7.12) lygtis turi

kanoninį pavidalą. Tarkime, vienas iš koeficientų, pavyzdžiui a, nelygus nuliui. Tada (7.20) atitinkanti charakteristikų lygtis

$$ay'^2 - 2by' + c = 0. \tag{7.21}$$

turi du skirtingus integralus

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}.$$

Pagal prielaidą funkcijos a, b ir c yra tolydžiai diferencijuojamos taško (x_0, y_0) aplinkoje U. Iš bendrosios paprastų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcijos φ ir ψ yra dukart diferencijuojamos aplinkoje U (aplinka U iš anksto paimta pakankamai maža). Todėl naujus nepriklausomus kintamuosius ξ ir η galima apibrėžti taip:

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Atlikus tokią transformaciją (7.18) lygtyje, koeficientai A ir C bus lygūs nuliui. Be to, lengvai galima įsitikinti, kad tokios transformacijos jakobianas yra nelygus nuliui. Remiantis (7.19) formule galima tvirtinti, kad koeficientas $B \neq 0$. Padaliję (7.18) lygtį iš $2B$, suvesime ją į antrąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0. \tag{7.22}$$

Keitiniu

$$\xi = \tilde{\xi} + \tilde{\eta}, \quad \eta = \tilde{\xi} - \tilde{\eta}$$

(7.22) lygtis susiveda į pirmąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \ldots = 0. \tag{7.23}$$

P a s t a b a. Lygtį, kurią galima suvesti į (7.22) pavidalą, kartais pasiseka suintegruoti, t.y. rasti formulę, apibrėžiančią visus lygties sprendinius.

P a v y z d y s. Rasti lygties

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

bendrąjį sprendinį. Tai yra hiperbolinė lygtis. Ji yra pirmojo kanoninio pavidalo. Keitiniu

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

ši lygtis susiveda į lygtį

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

kuri yra antrojo kanoninio pavidalo. Tegu $u_\xi = v$. Tada

$$v_\eta = 0.$$

Šios lygties bendrasis integralas yra $v = f(\xi)$, f – bet kokia diferencijuojama funkcija. Integruodami lygtį

$$u_\xi = f(\xi),$$

gausime

$$u = \int f(\xi)\, d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta);$$

čia φ ir ψ – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Grižę prie senų kintamųjų x ir y, gausime nagrinėjamosios lygties bendrą sprendinį:

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y).$$

2. Tarkime, (7.12) lygtis aplinkoje U yra parabolinė, t.y. reiškinys

$$b^2 - ac = 0. \tag{7.24}$$

Jeigu bent vienas iš koeficientų a arba c lygus nuliui, tai ir koeficientas $b = 0$. Šiuo atveju (7.12) lygtis jau turi kanoninį pavidalą. Tarkime, koeficientas $a \neq 0$. Tada (7.21) charakteristikų lygtis turi vieną bendrą integralą

$$\varphi(x, y) = \text{const}.$$

Iš bendrosios diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcija φ aplinkoje U yra dukart tolydžiai diferencijuojama. Laisvai parinkime kokią nors diferencijuojamą aplinkoje U funkciją ψ tokią, kad jakobianas

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.25}$$

(jeigu $\varphi_y \neq 0$, tai galima imti $\psi(x, y) = x$).

Vietoje kintamųjų x ir y apibrėžkime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Kadangi funkcija φ tenkina (7.20) lygtį, tai (7.18) lygtyje koeficientas $A = 0$. Iš (7.19) formulės, (7.24) sąlygos išplaukia, kad koeficientas $B = 0$. Įrodysime, kad koeficientas $C \neq 0$. Jeigu koeficientas C būtų lygus nuliui, tai (7.18) lygtis būtų pirmosios eilės lygtis. Perėję joje nuo kintamųjų ξ ir η prie senų kintamųjų x ir y, gausime (7.12) lygtį, kuri yra antros eilės lygtis. Tačiau padarius nepriklausomų kintamųjų transformaciją, lygties eilė nepadidėja. Gauta prieštara rodo, kad $C \neq 0$. Todėl, padaliję (7.18) lygtį iš C, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{7.26}$$

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastarosios lygties nariai, pažymėti daugtaškiu, turi priklausyti nuo u_ξ. Priešingu atveju į šią lygtį galima žiūrėti kaip į paprastą diferencialinę lygtį, kurios kintamasis ξ yra laisvasis parametras.

3. Tarkime, (7.12) lygtis yra elipsinė aplinkoje U, t.y. aplinkoje U reiškinys

$$b^2 - ac < 0. \tag{7.27}$$

Šiuo atveju (7.21) charakteristikų lygtis turi du kompleksiškai jungtinius bendrus integralus $p(x,y) = const$ ir $\overline{p(x,y)} = const$. Tegu

$$p(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y);$$

čia: φ – realioji, o ψ – menamoji funkcijos p dalys. Vietoje kintamųjų x ir y galima įvesti naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x,y) = \varphi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) = \psi(x,y).$$

Atlikus tokią transformaciją, (7.18) lygties koeficientas B bus lygus nuliui, o koeficientai A ir C sutaps. Norint tuo įsitikinti, reikia atskirti realiąją ir menamąją lygties

$$ap_x^2 + 2bp_xp_y + cp_y^2 = 0$$

dalis ir pastebėti, kad

$$A = C = \frac{1}{a}(ac - b^2)(\varphi_y^2 + \psi_y^2) \neq 0.$$

Taigi padalijię (7.18) lygtį iš bendros koeficientų A ir C reikšmės, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{7.28}$$

7.4 PAGRINDINIAI UŽDAVINIAI

Daugelis fizikos ir mechanikos uždavinių aprašomi antros eilės lygtimis. Paprasčiausios iš jų yra:

1. *Puasono* (elipsinė) lygtis
$$\Delta u = -f(x)$$
arba, kai $f = 0$, *Laplaso* lygtis
$$\Delta u = 0;$$
čia: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Šios lygtys aprašo įvairius stacionariuosius procesus ir pusiausvyros uždavinius.

2. *Šilumos laidumo* (parabolinė) lygtis
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti įvairius šiluminius procesus izotropiniame vienalyčiame kūne.

3. *Bangavimo* (hiperbolinė) lygtis
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti garso, elektromagnetinių bangų, hidrodinamikos, stygos ir membranos svyravimų procesus.

Šios lygtys yra geriausiai išnagrinėtos, ir su jomis dažniausiai tenka susidurti spendžiant praktinius uždavinius. Suformuluosime šioms lygtims tris pagrindinius uždavinių tipus.

1. K o š i u ž d a v i n y s formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Šilumos laidumo lygties atveju reikia rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradinę sąlygą
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$
Bangavimo lygties atveju Koši uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradines sąlygas
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$
Kraštinių sąlygų šiuose uždaviniuose nėra.

2. K r a š t i n i s   u ž d a v i n y s formuluojamas Puasono arba Laplaso lygtims. Abiem atvejais reikia rasti funkciją u, kuri srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų Puasono (Laplaso) lygtį

$$\Delta u = -f(x) \quad (\Delta u = 0),$$

ir paviršiaus $S = \partial\Omega$ taškuose vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\Big|_S = \varphi(x) \text{ -- } \textit{pirmoji kraštinė } \text{sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x) \text{ -- } \textit{antroji kraštinė } \text{sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x) \text{ -- } \textit{trečioji kraštinė } \text{sąlyga};$$

čia $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė išorinės normalės kryptimi paviršiuje S. Pradinių sąlygų nėra.

Jeigu Laplaso lygtis nagrinėjama kartu su pirmąja kraštine sąlyga, tai toks uždavinys vadinamas *pirmuoju*, arba *Dirichlė*, uždaviniu, jeigu su antrąja – *antruoju*, arba *Noimano,* uždaviniu, o jeigu su trečiąja – *trečiuoju* kraštiniu uždavinu.

3. M i š r u s i s   u ž d a v i n i s formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Reikia rasti funkciją u, kuri cilindre $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų šilumos laidumo

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

arba bangavimo

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

lygtį, atitinkamas pradines sąlygas (žr. Koši uždavinį) ir vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\Big|_S = \varphi(x, t) \text{ -- } \textit{pirmoji kraštinė } \text{sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x, t) \text{ -- } \textit{antroji kraštinė } \text{sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x, t) \text{ -- } \textit{trečioji kraštinė } \text{sąlyga}.$$

7.5 FURJĖ ARBA KINTAMŲJŲ ATSKYRIMO METODAS

Kintamųjų atskyrimo metodą galima taikyti gana plačiai tiesinių lygčių klasei. Lygtis $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ priklauso šiai klasei, jeigu diferencialinių operatorių M ir N koeficientai yra skirtingų kintamųjų funkcijos ir ieškomosios funkcijos u išvestinės įeina į reiškinius $\mathrm{M}u$ ir $\mathrm{N}u$ tik pagal skirtingus kintamuosius. Tarkime, v ir w yra funkcijos, priklausančios nuo šių skirtingų kintamųjų ir $u = v\,w$. Tada lygtį $\mathrm{M}v\,w + \mathrm{N}w\,v = 0$ galima suskaidyti į dvi lygtis. Šių lygčių atskirųjų sprendinių sandauga yra atskirasis lygties $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ sprendinys. Bendrąjį sprendinį gausime paėmę tokių sprendinių tiesinį darinį.

Rasime vienmatės bangavimo lygties

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (a, b),\ t > 0, \tag{7.29}$$

sprendinį, tenkinantį pradines

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [a, b] \tag{7.30}$$

ir kraštines

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = 0, \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0 \tag{7.31}$$

sąlygas.

Tegu $u = v(x)T(t)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (7.29) lygtį ir atskyrę kintamuosius, gausime

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x)}{v(x)}.$$

Kairėje šios lygybės pusėje yra kintamojo t, o dešinėje – kintamojo x funkcija. Šios funkcijos sutampa tik tuo atveju, kai jos yra konstantos. Pažymėkime bendrąją jų reikšmę raide $-\lambda$. Tada funkcija $u = v\,T$ yra (7.29) lygties sprendinys, jeigu funkcija T yra lygties

$$T'' + \lambda\, T = 0, \tag{7.32}$$

o funkcija v – lygties

$$-v_{xx} = \lambda\, v \tag{7.33}$$

sprendinys. Be to, funkcija $u = v\,T$ tenkins (7.31) kraštines sąlygas, jeigu šias sąlygas tenkins funkcija v. Taigi funkcijai v gavome *Šturmo–Liuvilio* uždavinį: rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus (7.33) lygties sprendinys, tenkinantis kraštines sąlygas

$$v + \alpha\, v_x\big|_{x=a} = 0, \quad v + \beta\, v_x\big|_{x=b} = 0. \tag{7.34}$$

Tokios parametro λ reikšmės vadinamos *tikrinėmis reikšmėmis*, o jas atitinkantys netrivialūs sprendiniai –*tikrinėmis finkcijomis*.

Tegu $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra (7.33), (7.34) uždavinio tikrinės reikšmės ir $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – jas atitinkančios tikrinės funkcijos, ortonormuotos erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$. Kiekvienam $\lambda = \lambda_k$ rasime bendrąjį (7.32) lygties sprendinį. Neigiamiems λ_k

$$T_k = C_{1k} e^{-\sqrt{|\lambda_k|}\, t} + C_{2k} e^{\sqrt{|\lambda_k|}\, t}.$$

Teigiamiems λ_k
$$T_k = C_{1k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + C_{2k}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t.$$
Tuo atveju, kai $\lambda_k = 0$,
$$T_k = C_{1k} + t\,C_{2k}.$$
Kiekviena iš funkcijų v_kT_k, $k = 1, 2, \dots$, tenkina (7.29) lygtį ir (7.31) kraštines sąlygas. Todėl funkcija
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)v_k(x)$$
taip pat tenkina (7.29) lygtį ir (7.31) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (7.30) pradines sąlygas, gausime
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m}\Big(a_k\mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t\Big)v_k(x) +$$
$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\Big(a_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\Big)v_k(x); \tag{7.35}$$
čia: m – neteigiamų tikrinių reikšmių skaičius, $a_k = (\varphi, v_k)$, $b_k = (\psi, v_k)$ – funkcijų φ ir ψ Furjė koeficientai. Jeigu tikrinė reikšmė $\lambda_m = 0$, tai (7.35) formulėje vietoje funkcijų $\mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ ir $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_m|}}\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ reikia imti atitinkamai 1 ir t.

Žinant (7.33), (7.34) uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas, lengvai galima rasti ir nehomogeninės lygties
$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{7.36}$$
sprendinį, tenkinantį homogenines pradines
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b] \tag{7.37}$$
ir (7.31) kraštines sąlygas. Jo ieškosime tokiu pavidalu:
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\,v_k(x).$$
Įstatę taip apibrėžtą funkciją u į (7.36) lygtį, gausime
$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(F_k''(t) + \lambda_k F_k(t)\big)\,v_k(x) = f(x,t).$$
Funkcijos v_k yra tiesiškai nepriklausomos (įrodykite). Todėl funkcija F_k, $\forall k = 1, 2, \dots$, turi tenkinti paprastąją diferencialinę lygtį
$$F_k''(t) + \lambda_k F_k(t) = f_k(t); \tag{7.38}$$

čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai kintamojo x atžvilgiu. Be to, iš (7.37) išplaukia, kad funkcija F_k turi tenkinti pradines sąlygas

$$F_k(0) = 0, \quad F_k'(0) = 0. \tag{7.39}$$

Nehomogeninės (7.38) lygties sprendinys, tenkinantis (7.39) pradines sąlygas,

$$F_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k > m, \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k \le m. \end{cases}$$

Todėl formalų (7.36), (7.37), (7.31) uždavinio sprendinį galima išreikšti eilute

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau. \tag{7.40}$$

Bendruoju atveju nehomogeninės (7.36) lygties sprendinio, tenkinančio (7.30) pradines ir nehomogenines kraštines sąlygas

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = \nu(t), \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = \mu(t), \quad t \ge 0, \tag{7.41}$$

galima ieškoti tokiu pavidalu:

$$u = w + \omega.$$

Šiuo atveju funkciją ω reikia parinkti taip, kad ji tenkintų (7.41) kraštines sąlygas. Tada funkcijai w gausime kraštinį uždavinį

$$w_{tt} - w_{xx} = f - \omega_{tt} + \omega_{xx}, \quad x \in (a,b),\ t > 0,$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi - \omega\big|_{t=0}, \quad w_t\big|_{t=0} = \psi - \omega_t\big|_{t=0}, \quad x \in [a,b],$$

$$w + \alpha\, w_x\big|_{x=a} = 0, \quad w + \beta\, w_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \ge 0,$$

su homogeninėm kraštinėm sąlygom. Savo ruožtu šį uždavinį galima išskaidyti į du uždavinius taip, kad vieno uždavinio pradinė ir kraštinė sąlygos būtų homogeninės, o kito lygtis ir kraštinė sąlyga būtų homogeninės.

Išnagrinėsime vienmatės šilumos laidumo lygties atvejį. Iš pradžių rasime lygties

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{7.42}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [a,b], \tag{7.43}$$

ir (7.31) kraštines sąlygas. Šiuo atveju vietoje (7.32) lygties gausime diferencialinę lygtį

$$T' + \lambda T = 0, \tag{7.44}$$

o (7.33) lygtis ir (7.34) kraštinės sąlygos išliks tos pačios.

Kai $\lambda = \lambda_k$, bendrasis (7.44) lygties sprendinys

$$T_k(t) = C_k\, e^{-\lambda_k t}.$$

Todėl funkcija $u_k = v_k\, T_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$, tenkina (7.42) lygtį ir (7.31) kraštines sąlygas. Tačiau tada funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t} v_k(x)$$

taip pat tenkins (7.42) lygtį ir (7.31) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (7.43) pradinę sąlygą, gausime formulę

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-\lambda_k t}\, v_k(x), \tag{7.45}$$

kurioje $a_k = (\varphi, v_k)$ yra funkcijos φ Furjė koeficientai.

Nehomogeninės lygties

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{7.46}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b], \tag{7.47}$$

ir (7.31) kraštines sąlygas, galima išreikšti eilute

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, F_k(t), \tag{7.48}$$

kurioje

$$F_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, f_k(\tau)\, d\tau$$

yra Koši uždavinio

$$F_k' + \lambda_k F_k = f_k(t), \quad F_k(0) = 0,$$

sprendinys. Čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai.

Bendruoju atveju (7.46) lygties sprendinį, tenkinantį (7.43) pradinę ir (7.41) kraštines sąlygas, galima rasti lygiai taip pat kaip ir bangavimo lygties atveju.

P a s t a b a. Vietoje vienmačio Laplaso operatoriaus čia galima imti dvimatį, trimatį ir aplamai n-matį Laplaso operatorių. Reikia tik rasti atitinkamo Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas. Be to, vietoje Laplaso operatoriaus galima imti bet kokį bendresnį tiesinį elipsinį operatorių, kurio koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t.

P a v y z d ž i a i:

1. Kintamųjų atskyrimo metodu rasime kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,l),\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{7.49}$$

sprendinį. Atskirojo bangavimo lygties sprendinio ieškome pavidalu $u = v(x)T(t)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į lygtį ir atskyrę kintamuosius gausime lygybę

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Ji yra teisinga tik tuo atveju, kai abi jos pusės yra pastovios. Pažymėkime bendrą jų reikšmę $-\lambda$. Tada funkcijai T gausime lygtį

$$T'' + \lambda T = 0,$$

o funkcijai v lygtį

$$-v_{xx} = \lambda v.$$

Be to, funkcija v dar turi tenkinti kraštines sąlygas

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Teigiamoms λ reikšmėms pastaroji lygtis turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius

$$v_1 = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad v_2 = \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Todėl bendrasis jos sprendinys

$$v = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Pareikalavę, kad jis tenkintų homogenines kraštines sąlygas gausime:

$$c_1 = 0, \quad c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Kadangi ieškomas sprendinys turi būti netrivialus, tai konstanta $c_2 \neq 0$. Taigi λ turi tenkinti lygtį

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Išsprendę ją randame tikrines reikšmes $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ Kiekvieną tikrinę reikšmę λ_k atitinka tikrinė funkcija

$$v_k = c_{2k} \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

Ji apibrėžiama pastovaus daugiklio c_{2k} tikslumu. Konstantas c_{2k} parenkame taip, kad

$$\int_0^l v_k^2(x)\,dx = 1, \forall k = 1, 2, \ldots$$

Iš šių sąlygų randame

$$c_{2k} = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Neigiamoms λ reikšmėms du tiesiškai nepriklausomi sprendiniai

$$v_1(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}, \quad v_2(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Bendrasis sprendinys

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Kai $\lambda = 0$,

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x,$$

o bendrasis sprendinys

$$v(x) = c_1 + c_2 x.$$

Pareikalavę, kad v tenkintų homogenines kraštines sąlygas $v(0) = 0$, $v(l) = 0$ abiem atvejais gausime: $c_1 = c_2 = 0$. Tai reiškia, kad neteigiamų tikrinių reikšmių nėra.

Imkime lygtyje $T'' + \lambda T = 0$ parametrą $\lambda = \lambda_k$. Tada gausime lygtį, kurios bendrasis sprendinys

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t.$$

Funkcijos v_k ir T_k yra sukonstruotos taip, kad jų sandauga $T_k \cdot v_k$ tenkina (7.49) lygtį ir homogenines kraštines sąlygas. Todėl tokių sandaugų suma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x)$$

taip pat tenkina (7.49) lygtį ir homogenines kraštines sąlygas. Konstantas a_k ir b_k parinksime taip, kad taip apibrėžta funkcija u tenkintų pradines sąlygas. Iš pirmos pradinės sąlygos gauname lygybę

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) = \varphi(x).$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš v_m ir rezultatą suintegravę nuo 0 iki l randame

$$a_m = \int_0^l \varphi(x) v_m(x)\, dx. \tag{7.50}$$

Čia pasinaudojome tuo, kad tikrinės funkcijos $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra ortonormuotos erdvėje $L_2(0,l)$, t.y.

$$\int_0^l v_k(x) v_m(x)\, dx = \delta_k^m = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = m, \\ 0, & \text{kai } k \neq m. \end{cases}$$

Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų antrąją pradinę sąlygą gausime lygybę

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} v_k(x) = \psi(x).$$

Iš jos lygiai taip pat randame

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_0^l \psi(x) v_m(x)\, dx. \tag{7.51}$$

Taigi nagrinėjamo kraštinio uždavinio sprendinys

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t\big) v_k(x);$$

čia koeficientai a_k ir b_k yra apibrėžti (7.50) ir (7.51) formulėmis.

7.6 INTEGRALINIŲ FURJĖ TRANSFORMACIJŲ METODAS

Nagrinėsime Koši uždavinį

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.52}$$

Įrodysime, kad jo sprendinį galima išreikšti *Puasono* formule:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy. \tag{7.53}$$

Išvesdami ją naudosime integralinį Furjė transformacijos metodą. Taikydami šį metodą, manysime, kad visi atliekami veiksmai yra teisėti.

Priminsime, kad tiesioginė ir atvirkštinė Furjė transformacijos kintamojo x atžvilgiu apibrėžiamos formulėmis:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx, \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \widehat{u}(\xi,t)\, d\xi,\ i = \sqrt{-1}.$$

Funkcijų u_t ir u_{xx} Furjė transformacijos:

$$\widehat{u_t}\,(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u_t(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx \Big) = \widehat{u}_t(\xi,t),$$

$$\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u_{xx}(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{ix\xi} u_x(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)^2 e^{ix\xi} u(x,t)\, dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,t).$$

Pritaikę Furjė transformacijos operatorių abiems šilumos laidumo lygties pusėms, gausime paprastąją diferencialinę kintamojo t atžvilgiu lygtį

$$\widehat{u}_t + a^2 \xi^2 \widehat{u} = 0.$$

Į kintamąjį ξ galima žiūrėti kaip į parametrą. Ši lygtis yra tiesinė pirmos eilės lygtis, ir jos bendrasis sprendinys

$$\widehat{u}(\xi,t) = C(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Kadangi

$$\widehat{u}(\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}u(x,0)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx = \widehat{\varphi}(\xi),$$

tai

$$\widehat{\varphi}(\xi) = C(\xi)$$

ir

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Pritaikę šios lygybės abiems pusėms atvirkštinį Furjė transformacijos operatorių, gausime

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}\,d\xi.$$

Vietoje funkcijos $\widehat{\varphi}$ įstatykime jos integralinę išraišką ir sukeiskime integravimo tvarką. Tada gausime formulę

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi-a^2\xi^2 t}\,d\xi\Big)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy;$$

čia

$$G(x-y,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi-a^2\xi^2 t}\,d\xi.$$

Suskaičiuosime integralą

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi-a^2\xi^2 t}\,d\xi.$$

Tuo tikslu išskirsime pilnąjį kvadratą

$$-a^2\xi^2 t - ix\xi = -(a^2\xi^2 t + ix\xi) = -\Big[a^2 t\Big(\xi + i\frac{x}{2a^2 t}\Big)^2 + \frac{x^2}{4a^2 t}\Big]$$

ir integralą $G(x,t)$ perrašysime taip:

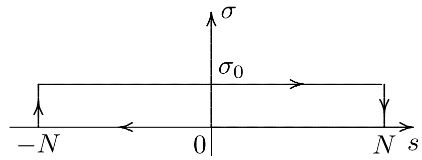
$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\left(\xi + i\frac{x}{2a^2t}\right)^2} d\xi. \tag{7.54}$$

Parodysime, kad integralas

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2} ds$$

nepriklauso nuo parametro σ_0.

Tegu l – uždaras kontūras kompleksinėje kintamojo $z = s + i\sigma$ plokštumoje (žr. 7.1 pav.).



7.1 pav.

Pagal Koši teoremą

$$0 = \int\limits_l e^{-a^2tz^2} dz = \int\limits_{-N}^{N} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2} ds + \int\limits_{\sigma_0}^{0} e^{-a^2t(N+i\sigma)^2} d\sigma +$$

$$\int\limits_{N}^{-N} e^{-a^2ts^2} ds + \int\limits_{0}^{\sigma_0} e^{-a^2t(-N+i\sigma)^2} d\sigma. \tag{7.55}$$

Kadangi

$$\Big| \int\limits_0^{\sigma_0} e^{-a^2t(\pm N + i\sigma)^2} d\sigma \Big| \le e^{-a^2tN^2} \int\limits_0^{\sigma_0} e^{a^2t\sigma^2} d\sigma \to 0$$

kai $N \to \infty$, tai perėję (7.55) formulėje prie ribos, gausime

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2} ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2} ds.$$

Be to, integralas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2} ds = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.$$

Todėl funkcija
$$G(x,t)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{7.56}$$

Tokiu būdu formalųjį[1] (7.52) Koši uždavinio sprendinį galima išreikšti (7.53) formule. Užrašysime ją tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)\varphi(y)\,dy=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)\,dy. \tag{7.57}$$

Funkcija G yra vadinama šilumos laidumo lygties fundamentaliuoju sprendiniu (arba Gryno funkcija).

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad funkcija u, apibrėžta (7.53) formule, yra (7.52) Koši uždavinio sprendinys, jeigu funkcija φ yra tik tolydi ir aprėžta.

Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u|_{t=o}=0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{7.58}$$

formalųjį sprendinį rasime taikydami Diuamelio principą. Tuo tikslu $\forall\tau>0$ rasime formalųjį Koši uždavinio

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>\tau,\\ u|_{t=\tau}=f(x,\tau), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

sprendinį. Pagal (7.57) formulę

$$v(x,t,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dy.$$

Tiesiogiai galima patikrinti, kad funkcija

$$u(x,t)=\int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau \tag{7.59}$$

yra (7.58) Koši uždavinio formalusis sprendinys.

Sudėję (7.52) ir (7.58) Koši uždavinių sprendinius, gausime funkciją

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)\varphi(y)\,dy+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{7.60}$$

[1]Sakydami formalusis sprendinys turime omenyje, kad šis sprendinys formaliai tenkina lygtį ir pradinę sąlygą. Reikia dar parodyti, kad taip apibrėžtas sprendinys tenkina reikiamas glodumo sąlygas.

kuri yra formalusis Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sprendinys.

Integralinį Furjė transformacijų metodą galima taikyti ne tik įvairių Koši uždavinių sprendimui, bet ir Kraštinių uždavinių sprendimui. Naudojant sinusinę Furjė transformaciją rasime kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.61}$$

sprendinį. Tegu funkcija u yra (7.61) kraštinio uždavinio sprendinys. Jos sinusinė tiesioginė ir atvirkštinė Furjė transformacijos kintamojo x atžvilgiu apibrėžiamos taip:

$$\widehat{u}^s(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u(x,t) \sin x\xi \, dx, \quad u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \widehat{u}^s(\xi,t) \sin x\xi \, d\xi.$$

Pritaikę sinusinę Furjė transformaciją funkcijai u_{tt} gausime

$$\widehat{u_{tt}}^s(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u_{tt}(x,t) \sin x\xi \, dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}^s(\xi,t) := \widehat{u}^s_{tt}(\xi,t).$$

Jeigu funkcija u begalybėje kartu su savo išvestine u_x lygi nuliui, tai integruodami dalimis gausime, kad funkcijos u_{xx} sinusinė Furjė transformacija

$$\widehat{u_{xx}}^s(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u_{xx}(x,t) \sin x\xi \, dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u_x(x,t) \xi \cos x\xi \, dx =$$

$$-\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u(x,t) \sin x\xi \, dx = -\xi^2 \widehat{u}^s(\xi,t).$$

Taigi pritaikę sinusinę Furjė transformacija abiejoms (7.61) bangavimo lygties pusėms, gausime tiesinę antros eilės lygtį

$$\widehat{u}^s_{tt}(\xi,t) + a^2 \xi^2 \widehat{u}^s(\xi,t) = 0, \quad t > 0,$$

kurioje kintamasis ξ yra parametras. Šios lygties bendrasis sprendinys

$$\widehat{u}^s(\xi,t) = c_1(\xi) \cos a\xi t + c_2(\xi) \sin a\xi t.$$

Kadangi funkcija u tenkina (7.61) pradines sąlygas, tai jos sinusinė Furjė transformacija $\widehat{u}^s$ turi tenkinti pradines sąlygas

$$\widehat{u}^s|_{t=0} = \widehat{\varphi}^s(\xi), \quad \widehat{u}^s_t|_{t=0} = \widehat{\psi}^s(\xi), \quad \xi > 0.$$

Panaudoję šias sąlygas randame

$$c_1(\xi) = \widehat{\varphi}^s(\xi), \quad c_2(\xi) = \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}.$$

Taigi funkcijos u sinusinė Furjė transformacija

$$\widehat{u}^s(\xi, t) = \widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t + \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t.$$

Pritaikę abiejoms šios lygybės pusėms atvirkštinę sinusinę Furjė transformaciją, randame ieškomą funkciją

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Big(\widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t + \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t\Big)\sin x\xi\,d\xi. \tag{7.62}$$

Integralą dešinėje šios lygybės pusėje išskaidome į du integralus. Pirmasis iš jų

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \widehat{\varphi}^s(\xi)\big(\sin(x+at)\xi + \sin(x-at)\xi\big)\,d\xi =$$
$$\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \operatorname{sign}(x-at)\varphi(|x-at|)\big).$$

Antrasis

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\big(\cos(x-at)\xi - \cos(x+at)\xi\big)\,d\xi =$$
$$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\int_{x-at}^{x+at}\widehat{\psi}^s(\xi)\sin s\xi\,ds d\xi = \frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at}\psi(s)\,ds.$$

Įstatę šias integralų išraiškas į (7.62) formulę gauname

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \operatorname{sign}(x-at)\varphi(|x-at|)\big) + \frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at}\psi(s)\,ds. \tag{7.63}$$

7.7 CHARAKTERISTIKŲ METODAS

Ieškosime vienmatės bangavimo lygties

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{7.64}$$

sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}; \tag{7.65}$$

čia $f,\ \varphi,\ \psi$ – žinomos funkcijos.

Bangavimo lygtį atitinka charakteristikų lygtis $x'^2 - a^2 = 0$. Integruodami ją, randame dvi charakteristikų klases:

$$x - at = \text{const}, \qquad x + at = \text{const}. \tag{7.66}$$

Kadangi (7.64), (7.65) Koši uždavinys yra tiesinis, tai jį patogu išskaidyti į du paprastesnius Koši uždavinius:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{7.67}$$

ir

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0. \tag{7.68}$$

Iš pradžių rasime (7.67) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu vietoje kintamųjų x ir t apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

Tada homogeninė bangavimo lygtis virs lygtimi

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$u = c_1(\xi) + c_2(\eta);$$

čia c_1 ir c_2 – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Įstatę į šitą formulę vietoje kintamųjų ξ ir η jų išraiškas kintamaisiais x ir t, gausime homogeninės bangavimo lygties bendrąjį sprendinį

$$u = c_1(x - at) + c_2(x + at). \tag{7.69}$$

Funkcijas c_1 ir c_2 parinksime taip, kad funkcija u tenkintų (7.65) pradines sąlygas, t.y. pareikalausime, kad funkcijos c_1 ir c_2 tenkintų lygčių sistemą

$$c_1(x) + c_2(x) = \varphi(x),$$

$$-ac_1'(x) + ac_2'(x) = \psi(x).$$

Suintegravę antrąją lygtį, gausime dviejų lygčių su dviem nežinomomis funkcijomis sistemą. Šios sistemos sprendiniai

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\tau)\,d\tau - \frac{\mathrm{c}}{2a},$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\tau)\,d\tau + \frac{\mathrm{c}}{2a};$$

čia c – laisvoji konstanta. Pirmoje formulėje argumentą x pakeiskime $x - at$, o antroje formulėje $x + at$. Įstatę gautas funkcijų c_1, c_2 išraiškas į (7.69) formulę, gausime (7.67) Koši uždavinio sprendinį

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,d\tau. \tag{7.70}$$

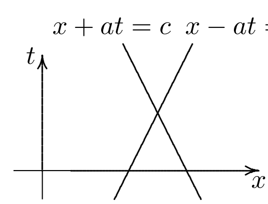
Pastaroji formulė vadinama *Dalambero* formule.

Tarkime, funkcija ψ yra diferencijuojama, o funkcija φ – dukart diferencijuojama. Tada funkcija u, apibrėžta (7.70) formule, yra dukart diferencijuojama, tenkina homogeninę bangavimo lygtį ir (7.65) pradines sąlygas. Be to, jeigu šitos sąlygos yra patenkintos, tai iš (7.70) formulės išplaukia, kad (7.67) Koši uždavinio sprendinys yra vienintelis.

P a s t a b a. Jeigu (7.67) Koši uždavinio sprendinys nagrinėjamas tik trikampyje, apribotame tiesėmis

$$x - at = \mathrm{const},\ \ x + at = \mathrm{const},\ \ t = 0,$$

tai (7.65) pradines sąlygas pakanka apibrėžti tik šio trikampio pagrinde (žr. 6.2 pav.).



6.2 pav.

Rasime (7.68) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu kiekvienam $\tau > 0$ sudarome pagalbinį uždavinį:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > \tau, \tag{7.71}$$

$$v|_{t=\tau} = 0,\ \ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{7.72}$$

Jeigu funkcija f yra diferencijuojama, tai pagal Dalambero formulę (7.71), (7.72) Koši uždavinio sprendinys

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy.$$

Parodysime, kad funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau \tag{7.73}$$

yra (7.68) Koši uždavinio sprendinys. Kadangi funkcija v yra (7.71), (7.72) Koši uždavinio sprendinys, tai

$$u_t = v(x,t,t) + \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} = v_t(x,t,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) + \int\limits_0^t \left[v_{tt}(x,t,\tau) - a^2 v_{xx}(x,t,\tau)\right]\,d\tau = f(x,t).$$

Taigi funkcija u, apibrėžta (7.73) formule, yra (7.68) Koši uždavinio sprendinys[1].

[1]Šitas metodas vadinamas Diuamelio principu. Jo esmė yra ta, kad tiesinės nehomogeninės dalinių išvestinių lygties Koši arba mišraus uždavinio su nulinėmis pradinėmis sąlygomis sprendinį galima išreikšti atitinkamu homogeninės lygties sprendiniu. Pavyzdžiui, Koši uždavinio

$$u_{tt} + Lu = f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

sprendinį galima išreikšti formule

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau,$$

kurioje $v(x,t,\tau)$ yra Koši uždavinio

$$v_{tt} + Lv = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > \tau,$$
$$v|_{t=\tau} = 0,\ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

sprendinys, o L – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo t ir kuriame kintamojo t atžvilgiu yra ne aukštesnės kaip pirmos eilės išvestinės. Analogiškai yra konstruojamas ir Koši uždavinio

$$u_t + Mu = f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0$$

sprendinys. Čia M – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t ir kuriame yra išvestinės tik pagal kintamuosius x.

Akivaizdu, kad (7.67), (7.68) Koši uždavinių sprendinių suma, t.y. funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy +$$

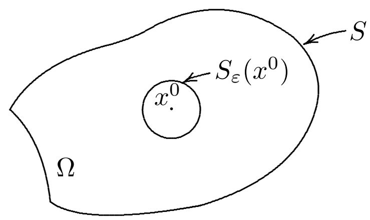
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{7.74}$$

yra (7.64), (7.65) Koši uždavinio sprendinys. Funkcija u yra dukart diferencijuojama, jeigu funkcijos ψ ir f yra diferencijuojamos, o funkcija φ – dukart diferencijuojama.

P a s t a b a. Naudojant (7.69) formulę, galima rasti ne tik Koši, bet ir mišraus uždavinio sprendinį. Sprendžiant mišrųjį uždavinį, reikia turėti omenyje tai, kad funkcijos c_1 ir c_2 apibrėžtos ne visoms argumentų reikšmėms. Argumentai $x - at$ ir $x + at$ gali ir nepriklausyti funkcijų c_1, c_2 apibrėžimo sritims. Taigi, sprendžiant mišrų uždavinį, reikia tinkamai pratęsti funkcijas c_1, c_2 arba (tai visiškai ekvivalentu) φ ir ψ.

7.8 DUKART DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIJŲ INTEGRALINĖ IŠRAIŠKA

Tegu Ω – aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Laisvai pasirenkame tašką $x^0 \in \Omega$. Pakankamai mažiems ε rutulys $\overline{B_\varepsilon(x^0)} \subset \Omega$. Tokiems ε apibrėšime sritį $\Omega_\varepsilon(x^0) = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x^0)}$. Jos paviršius $\partial\Omega_\varepsilon(x^0) = S \cup S_\varepsilon(x^0)$ (žr. 7.2 pav.)



7.2 pav.

Kadangi $u, v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon(x^0)})$, tai srityje $\Omega_\varepsilon(x^0)$ yra teisinga Gryno formulė

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_{S \cup S_\varepsilon(x^0)} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)\, dS. \tag{7.75}$$

Nagrinėjant ją, patogu išskirti atvejus: $n > 2$ ir $n = 2$. Tarkime, $n > 2$, o $v = r^{2-n}$, $r = |x - x^0|$. Akivaizdu, kad $v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon(x^0)})$. Be to, srityje $\Omega_\varepsilon(x^0)$ ji tenkina Laplaso lygtį. Todėl

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} u\Delta v\, dx = 0.$$

Kadangi $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tai egzistuoja konstanta c tokia, kad

$$\Big|\int\limits_{B_\varepsilon(x^0)} v\Delta u\, dx\Big| \le c \int\limits_{B_\varepsilon(x^0)} \frac{1}{r^{n-2}}\, dx = c\int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{S_r} \frac{1}{r^{n-2}}\, dS dr =$$

$$= c|S_1| \int\limits_0^\varepsilon r\, dr = c|S_1|\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Todėl

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} v\Delta u\, dx \to \int\limits_\Omega v\Delta u\, dx,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Sferos $S_\varepsilon(x^0)$ taškuose $v = \varepsilon^{2-n}$. Todėl

$$\Big|\int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS\Big| \le c \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\, dS = \varepsilon c|S_1| \ \to 0,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Be to, funkcijos v išvestinė normalės kryptimi

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-n}) = (n-2)r^{1-n} = (n-2)\varepsilon^{1-n}.$$

Todėl

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, dS = \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} (n-2)ur^{1-n}\, dS = (n-2)|S_1|\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\, dS.$$

Pagal vidutinių reikšmių teoremą egzistuoja taškas $\widehat{x} \in S_\varepsilon(x^0)$ toks, kad

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\, dS = u(\widehat{x}).$$

Kadangi funkcija u yra tolydi, tai $u(\widehat{x}) \to u(x^0)$, kai $\varepsilon \to 0$. Perėję (7.75) formulėje prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, gausime formulę

$$\int\limits_\Omega v\Delta u\, dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)\, dS - (n-2)|S_1|u(x^0)|.$$

Padaliję ją iš $(n-2)|S_1|$ ir x^0 pakeitę x, o $x - y$, rezultatą užrašysime taip:

$$u(x) = -\int\limits_\Omega E(|x-y|)\Delta u(y)\, dy + \int\limits_S \Big(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} -$$

$$u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y, \quad E(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|}|x|^{2-n}. \tag{7.76}$$

Tegu srityje Ω funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Tada (7.76) formulėje integralas sritimi Ω yra lygus nuliui ir yra teisinga paprastesnė formulė

$$u(x) = \int\limits_S \Big(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y. \tag{7.77}$$

P a s t a b o s:

1. Formulės (7.76) ir (7.77) įrodytos, kai $n > 2$. Tačiau jos išlieka teisingos ir kai $n = 2$. Norint tuo įsitikinti, pakanka (7.75) formulėje paimti $v = \ln r$ ir pereiti prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$. Rezultate gausime tokias pačias formules tik su
$$E(x) = -\frac{1}{|S_1|}\ln|x|, \quad n = 2.$$
2. Galima įrodyti, kad (7.77) formulė išlieka teisinga ir aprėžtos srities išorėje, jeigu tik šioje srityje funkcija u tenkina Laplaso lygtį ir $u(x) \to 0$, kai $|x| \to \infty$ (žr. [5]).

A p i b r ė ž i m a s. Funkcija u yra *harmoninė* aprėžtoje srityje Ω, jeigu $u \in C^2(\Omega)$ ir $\forall x \in \Omega$ tenkina Laplaso lygtį. Funkcija u yra harmoninė neaprėžtoje[1] srityje Ω, jeigu $u \in C^2(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ tenkina Laplaso lygtį ir

$$u(x) = O\big(|x|^{2-n}\big), \tag{7.78}$$

kai $|x| \to \infty$.

Funkcija E kai $n = 2$ ir kai $n > 2$ tenkina Laplaso lygtį (patikrinkite) bet kokioje srityje Ω, jeigu tik taškas $0 \notin \Omega$. Todėl, kai $n = 2$, ji yra harmoninė bet kokioje aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeigu tik $0 \notin \Omega$. Neaprėžtoje srityje ji nėra harmoninė. Kai $n > 2$, funkcija E yra harmoninė tiek aprėžtoje srityje, tiek ir neaprėžtoje srityje Ω, jeigu tik taškas $0 \notin \Omega$. Funkcija E yra vadinama *fundamentaliuoju* (kartais *singuliariuoju*) Laplaso lygties sprendiniu. Jį galima rasti ieškant Laplaso lygties sprendinio, priklausančio tik nuo spindulio $r = |x|$. Norint tuo įsitikinti, reikia parašyti Laplaso lygtį sferinėse koordinatėse:

$$E''(r) + \frac{n-1}{r} E'(r) = 0.$$

Bendrasis šios lygties sprendinys

$$E(r) = \begin{cases} c_1 r^{2-n} + c_2, & n > 2, \\ c_1 \ln r + c_2, & n = 2. \end{cases}$$

Atmetę konstantą c_2 ir atitinkamai parinkę konstantą c_1, gausime fundamentalų Laplaso lygties sprendinį.

[1] Šis harmoninės funkcijos apibrėžimas nėra visuotinai priimtas. Kartais sakoma, kad funkcija u yra harmoninė kokioje nors srityje Ω, jeigu ji šioje srityje yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį.

7.9 PAPRASČIAUSIOS HARMONINIŲ FUNKCIJŲ SAVYBĖS

7.2 teorema. *Tarkime, kokioje nors srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funkcija u yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį. Tada šioje srityje ji yra be galo diferencijuojama.*

◁ Laisvai pasirenkame tašką $x^0 \in \Omega$. Tegu $\Omega' \subset \Omega$ — griežtai vidinė sritis; $S' = \partial\Omega'$ – glodus paviršius; $x^0 \subset \Omega'$. Pagal teoremos sąlygą $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$. Todėl funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega'})$ ir yra teisinga formulė

$$u(x) = \int\limits_{S'} \Big(E(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big) \, dS_y, \quad \forall x \in \overline{\Omega'}.$$

Tegu Ω'' taško x^0 aplinka tokia, kad $\overline{\Omega''} \subset \Omega'$. Pastarojoje formulėje pointegralinė funkcija yra tolydi kintamųjų $x \in \overline{\Omega''}$, $y \in S'$ atžvilgiu ir be galo diferencijuojama kintamųjų $x \in \overline{\Omega''}$ atžvilgiu. Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega''})$. Kadangi taškas $x^0 \in \Omega$ pasirinktas laisvai, tai funkcija $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. ▷

7.3 teorema (vidurinės reikšmės teorema). *Tarkime, srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funkcija u yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį. Tada*

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(x)} u(y) \, dS_y, \quad \forall x \in \Omega, \ R > 0: \ \overline{B_R(x)} \subset \Omega. \tag{7.79}$$

◁ Tegu $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(x)})$ ir yra teisinga formulė

$$u(x) = \int\limits_{S_R(x)} \Big(E(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big) \, dS_y. \tag{7.80}$$

Sferos $S_R(x)$ taškuose funkcija

$$E(|x-y|) = E(R),$$

o jos normalinė išvestinė

$$\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{1}{|S_R|}.$$

Be to,

$$\int\limits_{S_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \, dS_y = \int\limits_{B_R(x)} \Delta u(y) \, dy = 0.$$

Todėl (7.80) formulę galima perrašyti taip:

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(x)} u(y) \, dS_y. ▷$$

7.4 teorema (atvirkštinė vidurinės reikšmės teorema). *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $u \in \mathrm{C}(\Omega)$ ir (7.79) formulė yra teisinga $\forall x \in \Omega,\ R > 0 : \ \overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada srityje Ω funkcija u yra harmoninė.*

$\triangleleft$ Iš pradžių įrodysime, kad $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. Tegu δ yra pakankamai mažas teigiamas skaičius, o f – kokia nors intervale $(-\delta, \delta)$ be galo diferencijuojama neneigiama ir finiti funkcija. Akivaizdu, kad $\forall x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega \ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$ rutulys $\overline{B_\delta(x)} \subset \Omega$. Todėl $\forall x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega \ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$, ir $\forall R \le \delta$ yra teisinga (7.79) formulė. Padauginę ją iš $R^{n-1} f(R)$ ir rezultatą suintegravę parametro R atžvilgiu nuo 0 iki δ, gausime

$$u(x) \int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR = \int_0^\delta \frac{1}{|S_R|} R^{n-1} f(R) \int_{S_R(x)} u(y)\, dS_y\, dR =$$

$$= \frac{1}{|S_1|} \int_{B_\delta(x)} f(|x-y|) u(y)\, dy = \frac{1}{|S_1|} \int_\Omega f(|x-y|) u(y)\, dy.$$

Padalij̨ę šią formulę iš

$$\int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR,$$

rezultatą užrašysime taip:

$$u(x) = \Big(|S_1| \int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR \Big)^{-1} \int_\Omega f(|x-y|) u(y)\, dy. \tag{7.81}$$

Esminis skirtumas tarp (7.79) ir (7.81) formulių yra tas, kad (7.81) formulėje integravimo sritis nepriklauso nuo kintamojo x. Todėl galime pasinaudoti teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu. Nagrinėjamuoju atveju pointegralinė funkcija yra be galo diferencijuojama kintamųjų x atžvilgiu ir tolydi abiejų kintamųjų x, y atžvilgiu. Be to, integravimo sritis Ω yra aprėžta. Todėl funkcija u, apibrėžta (7.81) formule, srityje $\Omega \setminus \{x \in \Omega \ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$ yra be galo diferencijuojama. Artindami δ į nulį, gausime, kad $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Laisvai pasirenkame tašką $x \in \Omega$ ir teigiamą skaičių R tokį, kad $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(x)})$ ir yra teisinga formulė

$$u(x) = -\int_{B_R(x)} E(|x-y|) \Delta u(y)\, dy +$$

$$+ \int_{S_R(x)} \Big(E(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big)\, dS_y. \tag{7.82}$$

Sferos $S_R(x)$ taškuose $|x-y|=R$. Todėl

$$\int\limits_{S_R(x)} E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = E(R)\int\limits_{S_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = E(R)\int\limits_{B_R(x)} \Delta u(y)\,dy.$$

Be to,

$$\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{1}{|S_R|}.$$

Pasinaudoję (7.79) formule, gausime

$$-\int\limits_{S_R(x)} u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x)} u(y)\,dS_y = u(x).$$

Įstatę gautas integralų išraiškas į (7.82) formulę, perrašysime ją tokiu pavidalu:

$$\int\limits_{B_R(x)} \big(E(R)-E(r)\big)\Delta u(y)\,dy = 0; \tag{7.83}$$

čia $r=|x-y|$. Akivaizdu, kad $\forall y\in B_R(x)$ reiškinys $E(R)-E(r)$ yra neigiamas. Todėl (7.83) lygybė yra galima tik tuo atveju, kai rutulyje $B_R(x)$ funkcija Δu keičia ženklą. Vadinasi, egzistuoja taškas $\widehat{x}\in B_R(x)$ toks, kad

$$\Delta u(\widehat{x}) = 0. \tag{7.84}$$

Kiekvieną konkretų skaičių R atitinka savas taškas $\widehat{x}\in B_R(x)$ ir $\widehat{x}\to x$, kai $R\to 0$. Kadangi $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)$, tai (7.84) lygybėje galima pereiti prie ribos, kai $R\to 0$. Taigi taške $x\in\Omega$ funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Kadangi tašką $x\in\Omega$ pasirinkome laisvai, tai

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall x\in\Omega,$$

o tai ir reiškia, kad srityje Ω funkcija u yra harmoninė. ▹

7.5 teorema (harmoninių funkcijų maksimumo principas). *Tegu u yra harmoninė funkcija aprėžtoje srityje Ω, $S=\partial\Omega$ ir $u\in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Tada mažiausią ir didžiausią reikšmes ji įgyja paviršiuje S.*

◃ Pagal teoremos sąlygą funkcija $u\in\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl ji yra aprėžta ir egzistuoja taškas $x^0\in\overline{\Omega}$, kuriame funkcija u įgyja didžiausią reikšmę. Tegu $u(x^0)=M=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$. Reikia įrodyti, kad $x^0\in S$. Tarkime priešingai, kad $x^0\in\Omega$. Tada pakankamai mažiems R rutulys $\overline{B_R(x^0)}\subset\Omega$. Remiantis 10.2 teorema,

$$u(x^0) = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x^0)} u(y)\,dS_y.$$

Tačiau šita lygybė yra galima tik tuo atveju, kai

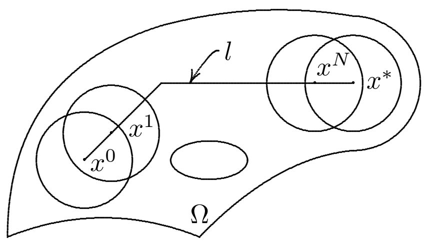
$$u|_{S_R(x^0)} = u(x^0) = M.$$

Pasirinkę vietoje R skaičių $R' < R$, gausime

$$u|_{S_{R'}(x^0)} = u(x^0) = M.$$

Todėl galima tvirtinti, kad $u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_R(x^0)}$. Įrodysime, kad $u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

Laisvai pasirenkame tašką $x^* \in \Omega$. Tegu l yra kokia nors laužtė, gulinti srityje Ω ir jungianti taškus x^*, x^0 (žr. 7.3 pav.).



7.3 pav.

Tegu

$$\delta = \tfrac{1}{2}\mathrm{dist}\{l, \partial\Omega\}.$$

Laužtėje l parenkame taškus $x^1, \dots, x^N$ taip, kad būtų patenkintos nelygybės

$$\frac{1}{2}\delta < |x^{i+1} - x^i| < \delta, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N;$$

čia $x^{N+1} = x^*$. Taškas $x^1 \in B_\delta(x^0)$ ir rutulys $\overline{B_\delta(x^0)} \subset \Omega$. Todėl $u(x) = u(x^0) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^0)}$. Taškas $x^2 \in B_\delta(x^1)$ ir rutulys $\overline{B_\delta(x^1)} \subset \Omega$. Todėl $u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^1)}$. Tęsdami šitą procesą N-uoju žingsniu gausime, kad $u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^{N+1})}$. Tačiau $x^* = x^{N+1} \in B_\delta(x^{N+1})$. Todėl $u(x^*) = u(x^0) = M$. Kadangi taškas $x^* \in \Omega$ pasirinktas laisvai, tai $u(x) = M, \ \forall x \in \Omega$. Pagal teoremos sąlygą funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl $u(x) = M, \ \forall x \in \overline{\Omega}$. Taigi, jeigu funkcija u didžiausią reikšmę įgyja srities Ω vidiniame taške, tai ji yra konstanta (šiuo atveju teorema yra triviali). Priešingu atveju, kai $u(x) \neq \mathrm{const}$, didžiausią reikšmę funkcija u įgyja taške $x^0 \in S$.

Šiame įrodyme funkciją u pakeitę $-u$, gausime, kad mažiausią reikšmę funkcija u įgyja paviršiuje S. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu harmoninė funkcija yra konstanta paviršiaus S taškuose, tai ji yra konstanta visoje uždaroje srityje Ω.

P a s t a b a. Neaprėžtos srities atveju yra teisingas analogiškas teiginys. Jeigu funkcija u yra dukart diferencijuojama neaprėžtoje srityje $\overline{\Omega}$ ir tenkina šioje srityje Laplaso lygtį, tai funkcija u srityje Ω negali turėti nei lokalaus minimumo, nei lokalaus maksimumo taškų. Tiksliau, jeigu taške x_0 yra teisinga nelygybė

$$u(x_0) \geq u(x) \quad \forall x : |x - x_0| < \varepsilon, \, \varepsilon > 0$$

arba

$$u(x_0) \leq u(x), \, \forall x : |x - x_0| < \varepsilon, \, \varepsilon > 0,$$

tai funkcija u yra pastovi visoje srityje Ω.

Tegu dukart diferencijuojama funkcija u yra Dirichlė uždavinio:

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \quad u(x) = \varphi(x),\ x \in S \tag{7.85}$$

sprendinys ir jį galima išreikšti formule

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} E(|x-y|)\Delta u(y)\,dy + \\ + \int\limits_{S} \left(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \right) dS_y. \tag{7.86}$$

Be to, tegu $\forall x \in \Omega$ egzistuoja funkcija $g(x, y)$ tokia, kad

$$\Delta_y g(x,y) = 0,\ y \in \Omega, \quad g(x,y) = -E(|x-y|),\ y \in S, \tag{7.87}$$

ir yra teisinga Gryno formulė:

$$\int\limits_{\Omega} [g(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta g(x,y)]\, dy = \\ = \int\limits_{S} \left[g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] dS. \tag{7.88}$$

Tada (7.85) uždavinio sprendinys

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)\,dy - \int\limits_{S} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi(y)\,dS; \tag{7.89}$$

čia $G(x, y) = g(x, y) + E(|x - y|)$. Funkcija $G(x, y)$ yra vadinama *Gryno* funkcija. Ją naudojant, bendrojo pavidalo Dirichlė uždavinio sprendimas susiveda į konkretaus (7.87) Dirichlė uždavinio sprendimą. Jeigu $f(x) \equiv 0$, t.y. funkcija u tenkina Laplaso lygtį, tai (7.85) Dirichlė uždavinio sprendinys

$$u(x) = -\int\limits_{S} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi(y)\,dS. \tag{7.90}$$

Išvesdami (7.89) formulę, reikalavome, kad funkcijos u ir g tenkintų (7.86) ir (7.88) integralines formules. Šios formulės yra teisingos, jeigu paviršius S ir funkcijos u, g tenkina reikiamas glodumo sąlygas. Pavyzdžiui, pakanka reikalauti, kad paviršius S būtų dalimis glodus, o funkcijos $u, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Taigi, jeigu yra žinoma, kad (7.85) ir (7.87) Dirichlė uždavinių sprendiniai yra pakankamai glodžios funkcijos, tai visi atlikti veiksmai yra teisėti ir (7.89) formulė apibrėžia (7.85) Dirichlė uždavinio sprendinį.

P a s t a b a. Prie tam tikrų papildomų sąlygų galima įrodyti, kad šie teiginiai yra tiesingi kai Ω yra aprėžtos srities išorė.

Noimano uždavinio

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \psi(x),\ x \in S, \tag{7.91}$$

formalus sprendinys

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy + \int\limits_{S} G(x,y)\psi(y)\, dS + \int\limits_{S} u(y)\, dS;$$

ieškomas analogiškai. Čia $G(x,y) = E(|x-y|) + g(x,y)$, funkcija $g(x,\cdot),\ \forall x \in \Omega$ yra specialaus Noimano uždavinio

$$\Delta_y g(x,y) = 0,\ y \in \Omega,\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} - 1,\ y \in S, \tag{7.92}$$

sprendinys. Noimano uždavinio sprendiniai yra apibrėžiami konstantos tikslumu. Atitinkamai ją parinkus, integralui

$$\int\limits_{S} u\, dS$$

galima suteikti bet kokią iš anksto apibrėžtą reikšmę. Todėl į šį integralą galima žiūrėti kaip į laisvąją konstantą. Paėmę ją lygią nuliui, gausime formalųjį (7.91) Noimano uždavinio sprendinį

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy + \int\limits_{S} G(x,y)\psi(y)\, dS. \tag{7.93}$$

Visi kiti sprendiniai gaunami pridėjus prie jo laisvąją konstantą.

7.10 DIRICHLĖ UŽDAVINIO SPRENDIMAS RUTULYJE IR JO IŠORĖJE

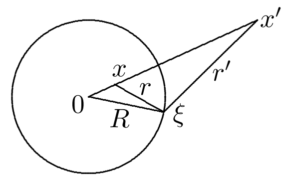
Nagrinėsime Dirichlė uždavinį[1]

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in B_R(0), \quad u(x)\big|_{x\in S_R} = \varphi(x),\ \varphi \in \mathrm{C}(S_R)\,.$$

Sprendžiant šį uždavinį, panaudosime (7.90) formulę. Tiksliau, tarsime, kad Dirichlė uždavinys rutulyje $B_R(0)$ turi sprendinį ir jis yra pakankamai glodus. Po to išvesime integralinę formulę, apibrėžiančią sprendinį. Pabaigoje įrodysime, kad tokiu būdu sukonstruota funkcija iš tikrųjų yra ieškomasis Dirichlė uždavinio sprendinys.

Tarkime, kad nagrinėjamo Dirichlė uždavinio sprendinys egzistuoja. Pažymėkime jį raide u ir tegu $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(0)})$. Sukonstruosime Gryno funkciją $G(x,y)$. Tuo tikslu laisvai pasirenkame tašką $x \in B_R(0)$. Raide x' pažymėsime tašką, simetrinį taškui x sferos S_R atžvilgiu. Tai reiškia, kad taškai x ir x' guli viename spindulyje, išeinančiame iš koordinačių pradžios, ir $|x||x'| = R^2$. Raide ξ pažymėkime tašką sferoje S_R. Taškus $0,\ x,\ x'$ ir ξ sujunkime atkarpomis (žr. 7.4 pav.).

Trikampiai $\Delta_{0x\xi}$ ir $\Delta_{0x'\xi}$ yra panašūs, nes taške 0 jie turi bendrą kampą ir prie jo proporcingas kraštines.



7.4 pav.

Šią kraštinių proporcingumo sąlygą galima užrašyti taip:

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|x'|}.$$

Kitos trikampių $\Delta_{0x\xi},\ \ \Delta_{0x'\xi}$ kraštinės taip pat yra proporcingos. Pažymėję $r = |x-\xi|,\ \ r' = |x'-\xi|$, šių kraštinių proporcingumo sąlygą užrašysime taip:

$$\frac{r}{r'} = \frac{|x|}{R}. \tag{7.94}$$

Toliau, konkretumo dėlei, nagrinėsime atvejį $n > 2$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad dydžiai r ir r' yra proporcingi, o

$$E(r) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r').$$

[1]Puasono lygties atveju Dirichlė uždavinys susiveda į Dirichlė uždavinį Laplaso lygčiai. Todėl čia nagrinėsime tik Dirichlė uždavinį Laplaso lygčiai.

Tegu $y \in \overline{B_R(0)}$ ir $r' = |x' - y$. Tada funkcija $E(r')$, kaip kintamojo y funkcija, $\forall x \in B_R(0)$ yra harmoninė rutulyje $B_R(0)$. Todėl funkcija

$$g(x,y) \equiv -\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r')$$

yra Dirichle uždavinio

$$\Delta_y g(x,y) = 0,\ y \in B_R(0), \quad g(x,y) = -E(r),\ r = |x-y|,\ y \in S_R(0),$$

sprendinys. Taigi Gryno funkcija

$$G(x,y) = E(r) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r').$$

Pagal (7.90) formulę formalų Dirichlė uždavinio sprendinį rutulyje $B_R(0)$ galima užrašyti taip:

$$u(x) = -\int\limits_{S_R(0)} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \varphi(\xi) dS_\xi. \tag{7.95}$$

Suskaičiuosime Gryno funkcijos normalinę išvestinę

$$-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\Big[E(r) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r')\Big] =$$

$$= \frac{1}{|S_1|}\Big[\frac{1}{r^{n-1}} \cos(r, \mathbf{n}_\xi) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{1}{r'^{n-1}} \cos(r', \mathbf{n}_\xi)\Big]. \tag{7.96}$$

Pagal kosinusų teoremą

$$\cos(r, \mathbf{n}_\xi) = \frac{R^2 + r^2 - |x|^2}{2rR},$$

$$\cos(r', \mathbf{n}_\xi) = \frac{R^2 + r'^2 - |x'|^2}{2r'R} = \frac{R^2 + R^2|x|^{-2}r^2 - R^4|x|^{-2}}{2rR^2|x|^{-1}}.$$

Įstatę šias išraiškas į (7.96) formulę ir suprastinę panašius narius, gausime

$$-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \frac{1}{|S_1|} \frac{R^2 - |x|^2}{Rr^n} \equiv K(x,\xi).$$

Taigi (7.95) formulę galima perrašyti taip:

$$u(x) = \int\limits_{S_R} K(x,\xi)\varphi(\xi) dS_R, \quad x \in B_R(0). \tag{7.97}$$

Funkcija $K(x,\xi)$ yra vadinama *Puasono branduoliu*, o (7.97) formulė — *Puasono formule*.

P a s t a b a. Puasono formulė išvesta, kai $n > 2$. Atvejis $n = 2$ nagrinėjamas analogiškai. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad (7.95) formulė yra teisinga ir, kai $n = 2$.

7.6 teorema. *Tegu* $\varphi \in \mathrm{C}(S_R)$. *Tada funkcija* u*, apibrėžta* (7.97) *formule, rutulyje* $B_R(0)$ *tenkina Laplaso lygtį ir sferos* $S_R(0)$ *taškuose sutampa su funkcija* φ.

◁ Iš pradžių įrodysime paprasčiausias funkcijos K savybes.
1. Funkcija $K(x,\xi) \geq 0, \ \forall x \in B_R(0), \ \xi \in S_R(0)$.
2. Rutulyje $B_R(0)$ funkcija $K(x,\xi)$ tenkina Laplaso lygtį

$$\Delta_x K(x,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in S_R(0).$$

◁ Fiksuokime tašką $\xi \in S_R(0)$. Funkcija K nuo funkcijos

$$V(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{r^n}$$

skiriasi tik pastoviu daugikliu. Todėl pakanka įrodyti, kad funkcija V tenkina Laplaso lygtį. Suskaičiuosime jos išvestines:

$$V_{x_i}(x) = -\frac{2x_i}{r^n} - n\frac{(R^2 - |x|^2)(x_i - \xi_i)}{r^{n+2}},$$

$$V_{x_i x_i}(x) = -\frac{2}{r^n} + 4n\frac{x_i(x_i - \xi_i)}{r^{n+2}} - n\frac{R^2 - |x|^2}{r^{n+2}} +$$
$$+ n(n+2)\frac{(R^2 - |x|^2)(x_i - \xi_i)^2}{r^{n+4}}.$$

Susumavę išvestines $V_{x_i x_i}$ nuo 1 iki n, gausime

$$\Delta V(x) = -\frac{2n}{r^n} + 4n\frac{|x|^2}{r^{n+2}} - 4n\frac{(x,\xi)}{r^{n+2}} - n^2\frac{R^2 - |x|^2}{r^{n+2}} + n(n+2)\frac{(R^2 - |x|^2)}{r^{n+2}} =$$

$$= n\frac{-2r^2 + 4|x|^2 - 4(x,\xi) + 2R^2 - 2|x|^2}{r^{n+2}} = 0 \ \triangleright.$$

3. Integralas

$$\int\limits_{S_R(0)} K(x,\xi)\, dS_R = 1, \quad \forall x \in B_R(0). \tag{7.98}$$

◁ Funkcija $u(x) \equiv 1 \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(0)})$. Be to, rutulyje $B_R(0)$ ji yra harmoninė ir sferos $S_R(0)$ taškuose lygi vienetui. Todėl ją galima išreikšti (7.97) formule, kuri, kai $\varphi = 1$, virsta (7.98) lygybe. ▷

Kintamųjų $x \in B_R(0), \ \xi \in S_R(0)$ atžvilgiu funkcija $K(x,\xi)$ yra be galo diferencijuojama, o funkcija φ sferoje $S_R(0)$ yra tolydi. Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, funkcija u, apibrėžta (7.97) formule, rutulyje $B_R(0)$ yra be galo diferencijuojama ir jos išvestines galima skaičiuoti po integralo ženklu. Pasinaudoję antra funkcijos K savybe, galime tvirtinti, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Įrodysime, kad funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$ ir $u(\xi) = \varphi(\xi), \ \forall \xi \in S_R(0)$. Laisvai pasirenkame tašką $\xi \in S_R(0)$, skaičių $\varepsilon > 0$ ir tašką $x \in B_R(0)$, artimą taškui ξ. Remiantis trečia funkcijos K savybe, skirtumas

$$u(x) - \varphi(\xi) = \int\limits_{S_R(0)} K(x,\eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\, dS_\eta.$$

Tegu ρ yra koks nors teigiamas skaičius ir $\Sigma_\rho(\xi) = S_R(0) \cap B_\rho(\xi)$. Tada

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \le \Big| \int\limits_{\Sigma_\rho(\xi)} K(x,\eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\, dS_\eta \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{S_R(0)\setminus\Sigma_\rho(\xi)} K(x,\eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\, dS_\eta \Big|.$$

Pažymėkime paskutinių dviejų integralų modulius atitinkamai I_1 ir I_2. Pasinaudoję 1 ir 3 funkcijos K savybėmis, įvertinsime I_1 :

$$I_1 \le \max_{\eta \in \Sigma_\rho(\xi)} |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)| \int\limits_{\Sigma_\rho(\xi)} K(x,\eta)\, dS_\eta \le \max_{\eta \in \Sigma_\rho(\xi)} |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)|.$$

Skaičių ρ parinksime taip, kad $I_1 \le \varepsilon/2$. Tai padaryti galima, nes $\varphi \in \mathrm{C}(S_R(0))$. Kadangi funkcija φ yra aprėžta, tai

$$I_2 \le 2 \max_{\eta \in S_R(0)} |\varphi(\eta)| \max_{\eta \in S_R(0)\setminus\Sigma_\rho(\xi)} \frac{1}{|x-\eta|^n} \frac{(R^2 - |x|^2)|S_R|}{|S_1| R} \le$$

$$\le \frac{C}{\rho^n}(R^2 - |x|^2) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

jeigu tik taškas x yra pakankamai arti taško $\xi \in S$. Tokiems x yra teisinga nelygybė

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \le \varepsilon, \quad \forall x \in S_R(0).$$

Taigi funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$ ir $u(\xi) = \varphi(\xi)$, $\forall \xi \in S_R(0)$. ▹

Tarkime, funkcija u yra apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Fiksuokime skaičių $R > 0$ tokį, kad $\Omega \subset B_R(0)$. Kiekvienam taškui $x \in \Omega$ priskirkime tašką

$$y = \frac{x}{|x|^2} R^2,$$

simetrinį sferos $S_R(0)$ atžvilgiu. Tada sritį Ω atitiks sritis

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \frac{x}{|x|^2} R^2,\ x \in \Omega \right\}.$$

Tegu

$$v(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}}\, u\Big(\frac{y}{|y|^2} R^2\Big), \quad y \in Q.$$

Taip apibrėžtą funciją v vadinsime funkcijos u *Kelvino transformacija.*

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$\Delta_y v = \frac{R^{n+2}}{|y|^{n+2}} \Delta_x u.$$

Iš šios formulės išplaukia, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį srityje Ω tada ir tik tada, kai funkcija v tenkina Laplaso lygtį srityje Q.

Tarkime, sritis Q yra neaprėžta (taip bus tada, kai taškas $0 \in \Omega$) ir funkcija v srityje Q yra harmoninė. Tada funkcija

$$u(x) = \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \; v\Big(\frac{x}{|x|^2} R^2\Big)$$

tenkina Laplaso lygtį srityje $\Omega \setminus \{0\}$ Taške $x = 0$ funkciją u galima apibrėžti taip, kad ji būtų harmoninė visoje srityje Ω.

7.7 teorema. *Tegu* $\varphi \in \mathrm{C}(S_R(0))$. *Tada funkcija*

$$v(y) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{|y|^2 - R^2}{R\,|y-\xi|^n} \varphi(\xi)\; dS_\xi, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$$

yra Dirichlė uždavinio

$$\begin{aligned} &\Delta v(y) = 0, && y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}, \\ &v(y) = \varphi(y), && y \in S_R(0), \\ &v(y) = O(|y|^{2-n}), && |y| \to \infty, \end{aligned}$$

sprendinys.

◃ Dirichlė uždavinio

$$\Delta u(x) = 0, \;\; x \in B_R(0), \quad u(x) = \varphi(x), \;\; x \in S_R(0),$$

sprendinys

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\,|x-\xi|^n} \varphi(\xi)\; dS_\xi$$

(žr. (7.97) formulę). Funkcijos u Kelvino transformacija

$$v(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} u\Big(\frac{y}{|y|^2} R^2\Big) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{|y|^2 - R^2}{R\,|y-\xi|^n} \varphi(\xi)\; dS_\xi$$

yra Dirichlė uždavinio rutulio $B_R(0)$ išorėje sprendinys. Pastarojoje formulėje pereidami nuo kintamųjų x prie kintamųjų y, pasinaudojome tuo, kad $|x| = R^2|y|^{-1}$ ir $|x-\xi| = |y-\xi||x|R^{-1} = |y-\xi|R|y|^{-1}$. ▹

LITERATŪRA

[1] Golokvosčius P. – Diferencialinės lygtys. Vilnius: "Tev", 2000. 512 p.

[2] Ambrazevičius A. – Matematinės fizikos lygtys. D. 1. Vilnius: "Aldorija", 1996. 380 p.

[3] Bibikovas J. N – Bendras paprastųjų diferencialinių lygčių kursas. Leningradas: LGU, 1981, 232 p. rus.

[4] Kodingtonas A., Levinsonas N. – Paprastųjų diferencialinių lygčių teorija. - M.: I*L 1958. - 476p. rus.

[5] M. M. Smirnovas Aukštosios matematikos kursas. M.: Nauka, 1981. – T.4. – D.1-2. – 552 p. – Rus.

[6] Kabaila V. Matematinė analizė 2d. Vilnius "Mokslas", 1986. 482 p.