T U R I N Y S

Pratarmė

Vadovėlyje nuosekliai išdėstytos pagrindinės formaliosios logikos temos. Formalioji logika turi daug šakų, tai modelių teorija, aksiominė aibių teorija, konstruktyvioji matematika, tipų teorija ir kt. Vadovėlyje daugiausia dėmesio skirsime tiems logikos skyriams, kurie naudojami žmogaus mąstymo modeliavimui kompiuteriu, t.y dirbtiniam intelektui.

Šis vadovėlis skirtas informatikos, programų sistemų, bioinformatikos bei matematikos specialybių studentams. Rašantiems kursinius, bakalauro bei magistro darbus studentams labai pravers vadovėlio pabaigoje pateikiamas kai kaurių logikos terminų lietuvių-anglų kalbų žodynėlis.

Nuošidžiai dėkoju Romui Alonderiui, Aidai ir Regimantui Pliuškevičiams, Jūratei Sakalauskaitei bei Baliui Šulmanui, daug prisidėjusiems tobulinant šį vadovėlį.

Autorius

Įvadas

Logika nagrinėja žmogaus mąstymą, tiksliau – mąstymo formą. Žodis *logika* kilęs iš senosios graikų kalbos (gr. *logos* – žodis, kalba, protas, samprotavimas). Logika atsirado ir vystėsi kaip filosofijos mokslo šaka. Dar VI-IV a.pr.Kr. ji buvo savarankiškai kuriama Graikijoje, Kinijoje ir Indijoje. Žymiausias tų laikų logikas buvo graikų filosofas *Aristotelis* (384-322 m.pr.Kr.), kurio sukurta teorija (žr. skyrelį *Aristotelio logika*) buvo formaliosios logikos pradžia. Ir tuo ji buvo labai svarbi ir nuostabi. Po Aristotelio sistemos sukurimo prasidėjo stagnacijos periodas, kuris truko daugiau kaip du tūkstančiai metų.

Matematinė logika, remdamasi matematika, pirmiausia tiria matematinius samprotavimus. Matematinės logikos pradininkais vieni autoriai vadina vokiečių matematiką G.Leibnitzą (1646-1716), kiti airių matematiką D.Boole (1646-1716) ar vokietį G.Frege (1848-1925). Ir vieniems, ir kitiems didelę įtaką darė Aristotelis.

Matematikas A.de Morgan iš Londono (1806-1878) kai kurias algebroje nadrinėjamų objektų savybes perkėlė logikos dėsniams. D.Boole stengėsi įgyvendinti idėją, kad logika taptų tiksliuoju mokslu. Vokiečių matematikas E.Schräder (1841-1902) bei Kazanės universiteto (Rusija) profesorius P.S.Poreckij (1846-1907) pagrindė teiginių ir predikatų logiką, dažniausiai siedami ją su algebra. Per šimtmečius susikaupė daug atrastų logikos dėsnių. Pavyzdžiui, vienas jų $((p\&q) \rightarrow r)\&(p\&\neg r)) \rightarrow \neg q$. Loginių operacijų ženklų dar nebuvo. Dėsnis buvo užrašomas taip:

Jei pirmasis ir antrasis, tai trečiasis. Dabar nėra trečiojo, bet yra pirmasis. Vadinasi, nėra antrojo.

Kaip dėsniai būdavo atrandami? Dažniausiai būdavo iškeliama hipotezė apie dėsnį ir stengiamasi ją paneigti, t.y. ieškoma pavyzdžio, kada hipotezė klaidinga. Jei to padaryti nepavyksta, hipotezė pripažįstama dėsniu. Įrodymo (matematine prasme) nebūdavo. Logikos dėsnių aibę pirmasis susistemino vokiečių matematikas G. Frege. Tvirtinimo formulavimą traktavo skirtingai nuo įrodyto tvirtinimo. Tam tikslui sugalvojo simbolį $\vdash$. $\vdash F$ reiškė *tvirtinama, kad F įrodytas.* Jis 1879 metais pirmasis sukūrė formaliąją – teiginių skaičiavimo teoriją ir parodė, kad visi žinomi, bei daugelis naujų teiginių išvedami joje (dėl paprastumo aksiomos parašytos šių laikų formalia kalba):

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
(4) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
(5) $\neg\neg A \rightarrow A$

(6) $A \to \neg\neg A$

Skaičiavime yra formulių keitimo lygiavertėmis ir *modus ponens* taisyklės. Vėliau buvo įrodyta, kad (3) aksioma nereikalinga. Ji išvedama iš likusiųjų. Įdomu tai, kad G.Frege aprašė skaičiavimą anksčiau, negu kad buvo pastebėta, kad logikos dėsnius galima nustatyti ir naudojantis teisingumo lentelėmis. Tik praėjus šešeriems metams, 1885 metais Charles Sanders Peirce (amerikiečių matematikas ir filosofas) sukūrė teisingumo lentelių metodą. G.Frege aksiomatika tapo pavyzdžiu vėlesniems teiginių skaičiavimams. 1925 m. F.Brentano aprašė teiginių skaičiavimą, kuriame naudojama tik konjunkcija ir neigimas, o B.Russel − skaičiavimą su neigimu ir disjunkcija.

Pagrindiniai vadovėlyje aprašyti rezultatai ir prasideda G.Frege skaičiavimu bei vėlesniais logikų darbais.

Logika tolydžio tampa tiksliuoju mokslu, kurio rezultatams suprasti jau reikia matematinio išsilavinimo. Patį mokslą pradėta vadinti tai *simboline logika*, tai *formaliaja* ar *matematine logika.* Kaip savarankiška matematikos šaka su savo problematika ir metodais logika susiformavo praeito šimtmečio ketvirtajame dešimtmetyje. Ypač daug prie to prisidėjo austrų logiko *K.Gödel* (1906-1977) darbai. 1930 metais jis įrodė apie predikatų skaičiavimo pilnumą. Taigi, predikatų skaičiavimas tampa ta logine sistema, kuria remiantis galima formalizuoti matematiką. Net susiformavus matematinei logikai, daugelyje universitetų dar ilgai logikos pavadinimu buvo dėstoma tik Aristotelio sistema.

Skirtingai negu kiti mokslai, matematika pagrindiniu tyrinėjimo metodu laiko įrodymą, o ne eksperimentą. Pavyzdžiui, išmatavus daugelio trikampių vidaus kampų sumas, galima prieiti išvados, kad trikampio vidaus kampų suma lygi 180 laipsnių. Bet matematikas tai pripažins matematikos dėsniu (teorema) tik tada, kai bus įrodyta, pagrįsta logiškai.

Pažvelgę į bet kurios teoremos įrodymą, pamatysime, kad tai yra seka formulių, tarp kurių įterpti samprotavimai, paaiškinantys, iš kur gauname prieš ar po einančią formulę. Formulės turi vieną reikšmę, o samprotavimai dažnai būna įvairių netikslumų šaltinis. Ar galima rasti tokias samprotavimų (logikos) taisykles, užrašomas formulėmis, kuriomis naudojasi matematikas, įrodinėdamas teoremas? Jei pasisektų tai padaryti, teoremos įrodymas taptų seka formulių, tarp kurių stovi skaičiai, nurodantys pagal kurią taisyklę ir iš kokių jau turimų formulių gauta sekančioji. Tuomet, turint samprotavimų grandinę, galima patikrinti, ar tai įrodymas. Dar Leibnitz buvo iškėlęs idėją sukurti universalią visai matematikai kalbą ir ta kalba formalizuoti matematinius įrodymus. Ginčus, ar koks nors tvirtinimas teisingas, ar klaidingas, reikėtų suvesti į skaičiavimus. Paėmę pieštuką bei popieriaus ir atlikę matematinius skaičiavimus, galėtume nustatyti, kas teisus. Formalizavimo entuziazmą kiek prislopino rezultatai apie formaliąją aritmetiką. Bet tai truko neilgai. Atsiradus kompiuteriams atsivėrė labai didelės logikos taikymų perspektyvos.

Logikos rezultatai taikomi:

- matematikoje (matematikos pagrindimas, teorijų neprieštaringumas,...),
- informatikoje:
  a) programavime (programų korektiškumas, loginis programavimas,...),
  b) dirbtinio intelekto teorijoje,
  c) duomenų bazėse.
- šnekamosios kalbos analizėje.

Pirmasis vadovėlis *Principia Mathematica*, skirtas matematinei logikai ir jos taikymui matematikoje, pasirodė 1910 metais. Jo autoriais buvo B.Russel ir A.Whitehead. Jame yra ir toks sakinys: *Tas faktas, jog visa matematika yra ne kas kita kaip simbolinė logika – didžiausias mūsų amžiaus atradimas.* Vėliau, kelerių metų bėgyje, buvo išleisti dar du tomai. Su knygos pasirodymu siejamas naujas matematinės logikos vystymosi etapas. Kito vadovėlio teko laukti pakankamai ilgai. D.Hilbert ir P.Bernays knygos *Grundlagen der Mathematik* pasirodymas 1939 metais užbaigė logikos, kaipo matematinės disciplinos, formavimosi etapą. Atsiradus kompiuteriams ir informatikos mokslui, palaipsniui *matematinė logika* tampa jau *informatikos mokslo* šaka. Pirmosios automatinio teoremų įrodymo programos buvo sukurtos 1957 metais, t.y. praėjus dešimčiai metų po pirmųjų kompiuterių pasirodymo. Programų autorius – kinų kilmės amerikietis Wang Xao. Kompiuteriu IBM jis įrodė apie 400 teiginių logikos bei pirmosios eilės logikos su lygybės predikatu dėsnių, aprašytų tritomyje *Principia Mathematica* (1910-1913 m.).

Lietuvoje *matematinė logika* pradėta dėstyti Vilniaus universitete 1960 metais. Tų metų pavasario bei rudens semestrus J.Kubilius skaitė *Matematinės logikos* specialųjį kursą matematikos specialybės studentams. V.Kabaila 1962 m. skaitė skaičiavimo matematikos specializacijos trečiakursiams *Loginio konstravimo pagrindų* specialųjį kursą. Nuo 1964 metų Vilniaus universitete matematinė logika dėstoma kaip privaloma disciplina – iš pradžių tik matematikos specialybės, o vėliau ir informatikos bei programų sistemų specialybių studentams. Matematinės logikos tyrimų Lietuvoje pradžia siejama su pirmąja 1963 m. V. Matulio apginta daktaro (tuo metu fizikos-matematikos mokslų kandidato) disertacija tema *Apie kai kuriuos klasikinio predikatų skaičiavimo su vieninteliu išvedimo medžiu sekvencinius variantus.* Po to 1967 m. Regimantas Pliuškevičius apgynė daktaro disertaciją tema *Konstruktyviosios logikos be struktūrinių taisyklių variantai bei sekvencijų su normalinėmis formulėmis išvedimai,* o 2002 m. – ir habilituoto daktaro disertaciją tema *Prisotinimo metodas tiesinei laiko logikai.* Pamažu ir Lietuvoje formavosi matematinės logikos mokykla. Matematikos (dabar Matematikos ir informatikos) institute 1964 m. buvo įkurtas *Matematinės logikos ir programavimo* sektorius (1967 m. jis pervardytas į *Matematinės logikos ir algoritmų teorijos*, o 1993 m. į *Matematinės logikos* skyrių).