

T U R I N Y S

Pratarmė	6
Ivadas	7
1 Aibės ir grafai	11
1.1 Skaičiosios aibės	11
1.2 Pagrindinės grafų sąvokos	17
1.3 Pratimai	19
2 Teiginių logika	20
2.1 Loginės operacijos	20
2.2 Ekvivalenčios formulės	26
2.3 Loginės išvados	30
2.4 Modelio paieška	33
2.5 Normaliosios formos	34
2.6 Logikos algebros funkcijos	39
2.7 Kai kurios neklasikinės logikos	41
2.8 Dvejetainis sumavimas	43
2.9 Pratimai	46
3 Algoritmų teorija	49
3.1 Intuityvioji algoritmo samprata	49
3.2 Turingo mašinos	51
3.3 Baigtiniai automatai	55
3.4 Algoritmų sudėtingumas	58
3.5 Primityviai rekursyvios funkcijos	61
3.6 Minimizavimo operatorius	64
3.7 Porų numeravimas	65
3.8 Baigtinumo problema	67
3.9 Rekursyviai skaičios aibės	70
3.10 Ackermanno funkcijos	72
3.11 Universaliosios funkcijos	75
3.12 Kanoninis Posto skaičiavimas	80
3.13 Lambda skaičiavimas	83
3.14 Pratimai	86
4 Teiginių skaičiavimai	90
4.1 Hilberto tipo skaičiavimas	91

4.2	Dedukcijos teorema	93
4.3	Gentzeno skaičiavimas	98
4.4	Natūralioji dedukcija	104
4.5	Disjunktų dedukcinė sistema	108
4.6	Skaičiavimų ryšys	114
4.7	Pratimai	116
5	Predikatų logika	118
5.1	Predikatų logikos formulės	118
5.2	Semantika	121
5.3	Pavyzdys formulės, įvykdomos begalinėje ir neįvykdomos jokioje baigtinėje aibėje	124
5.4	Normaliosios priešdėlinės formos	126
5.5	Formulės, į kurias įeina tik vienviečiai predikatiniai kintamieji	128
5.6	Aristotelio logika	131
5.7	Pratimai	135
6	Predikatų skaičiavimai	138
6.1	Formulės, kuriose yra funkciniai simboliai	138
6.2	Hilberto tipo predikatų skaičiavimas	141
6.3	Sekvencinis skaičiavimas	144
6.4	Intuicionistinė logika	150
6.5	Kompaktiškumas	153
6.6	Semantiniai medžiai	155
6.7	Rezoliucijų metodas	158
6.8	Deduktyvios duomenų bazės	162
6.9	U-Datalog	166
6.10	Lentelių metodas	169
6.11	Deskriptyvioji logika	171
6.12	Pratimai	179
7	Modalumo logikos	184
7.1	Modalumo logikų formulių semantika	184
7.2	Modalumo logikų skaičiavimai	189
7.3	Ekvivalenčios formulės	194
7.4	Rezoliucijų metodas modalumo logikai S4	198
7.5	Žinių logika	200
7.6	Išvedimo paieška	204
7.7	Atvirkštinis metodas	207
7.8	Hibridinė logika $\mathcal{H}(@, \downarrow)$	211
7.9	Istorinė apžvalga	216
7.10	Pratimai	218
8	Kvantorinės modalumo logikos	221
8.1	Monotoninės fiksuotosios kvantorinės modalumo logikos	221
8.2	Formulių transformavimas	225

8.3 Pastovios fiksuotosios kvantorinės modalumo logikos	230
8.4 Pratimai	232
9 Laiko logikos	234
9.1 Baigtinė laiko logika	234
9.2 Planavimo uždavinys	238
9.3 Išsiskojančio laiko logikos	241
9.4 Tiesinio laiko logika	246
9.5 Pratimai	248
Pavardžių rodyklė	249
Dalykinė rodyklė	250
Lietuvių-anglų kalbų žodynas	253
Literatūra	258

Pratarmė

Vadovėlyje nuosekliai išdėstytos pagrindinės formaliosios logikos temos. Formalioji logika turi daug šakų, tai modelių teorija, aksiominė aibių teorija, konstruktyvioji matematika, tipų teorija ir kt. Vadovėlyje daugiausia dėmesio skirsime tiems logikos skyriams, kurie naudojami žmogaus mąstymo modeliavimui kompiuteriu, t.y dirbtiniam intelektui.

Šis vadovėlis skirtas informatikos, programų sistemų, bioinformatikos bei matematikos specialybių studentams. Rašantiems kursinius, bakalauro bei magistro darbus studentams labai pravers vadovėlio pabaigoje pateikiamas kai kurių logikos terminų lietuvių-anglų kalbų žodynelis.

Nuoširdžiai dėkoju Romui Alonderiui, Aidai ir Regimantui Pliuškevičiams, Jūratei Sakalauskaitei bei Baliui Šulmanui, daug prisidėjusiems tobulinant šį vadovėlį.

Autorius

Ivadas

Logika nagrinėja žmogaus mąstymą, tiksliau – mąstymo formą. Žodis *logika* kilęs iš senosios graikų kalbos (gr. *logos* – žodis, kalba, protas, samprotavimas). Logika atsirado ir vystėsi kaip filosofijos mokslo šaka. Dar VI-IV a.pr.Kr. ji buvo savarankiškai kuriama Graikijoje, Kinijoje ir Indijoje. Žymiausias tų laikų logikas buvo graikų filosofas *Aristotelis* (384-322 m.pr.Kr.), kurio sukurta teorija (žr. skyrelį *Aristotelio logika*) buvo formaliosios logikos pradžia. Ir tuo ji buvo labai svarbi ir nuostabi. Po Aristotelio sistemos sukūrimo prasidėjo stagnacijos periodas, kuris truko daugiau kaip du tūkstančiai metų.

Matematinė logika, remdamasi matematika, pirmiausia tiria matematinius samprotavimus. Matematinės logikos pradininkais vieni autoriai vadina vokiečių matematiką G.Leibnitzą (1646-1716), kiti airių matematiką D.Boole (1646-1716) ar vokiečių G.Frege (1848-1925). Ir vieniems, ir kitiems didelę įtaką darė Aristotelis.

Matematikas A.de Morgan iš Londono (1806-1878) kai kurias algebroje nadrinėjamų objektų savybes perkėlė logikos dėsniams. D.Boole stengėsi įgyvendinti idėją, kad logika taptų tiksluoju mokslu. Vokiečių matematikas E.Schröder (1841-1902) bei Kazanės universiteto (Rusija) profesorius P.S.Poreckij (1846-1907) pagrindė teiginių ir predikatų logiką, dažniausiai siedami ją su algebra. Per šimtmečius susikaupė daug atrastų logikos dėsnų. Pavyzdžiui, vienas jų $((p \& q) \rightarrow r) \& (p \& \neg r) \rightarrow \neg q$. Loginių operacijų ženklų dar nebuvo. Dėsnis buvo užrašomas taip:

Jei pirmasis ir antrasis, tai trečiasis. Dabar nėra trečiojo, bet yra pirmasis. Vadinasi, nėra antrojo.

Kaip dėsniai būdavo atrandami? Dažniausiai būdavo iškeliami hipotezė apie dėsnį ir stengiamasi ją paneigti, t.y. ieškoma pavyzdžio, kada hipotezė klaidinga. Jei to padaryti nepavyksta, hipotezė pripažįstama dėsniumi. Įrodymo (matematinė prasme) nebūdavo. Logikos dėsnų aibę pirmasis susistemino vokiečių matematikas G. Frege. Tvirtinimo formulavimą traktavo skirtingai nuo įrodyto tvirtinimo. Tam tikslui sugalvojo simbolį \vdash . $\vdash F$ reiškė *tvirtinama, kad F įrodytas*. Jis 1879 metais pirmasis sukūrė formaliąją – teiginių skaičiavimo teoriją ir parodė, kad visi žinomi, bei daugelis naujų teiginių išvedami joje (dėl paprastumo aksiomos parašytos šių laikų formalia kalba):

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (4) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (5) $\neg\neg A \rightarrow A$

(6) $A \rightarrow \neg\neg A$

Skaičiavime yra formulių keitimo lygiavertėmis ir *modus ponens* taisyklės. Vėliau buvo įrodyta, kad (3) aksioma nereikalinga. Ji išvedama iš likusiųjų. Įdomu tai, kad G.Frege aprašė skaičiavimą anksčiau, negu kad buvo pastebėta, kad logikos dėsnius galima nustatyti ir naudojantis teisingumo lentelėmis. Tik praėjus šešeriems metams, 1885 metais Charles Sanders Peirce (amerikiečių matematikas ir filosofas) sukūrė teisingumo lentelių metodą. G.Frege aksiomatika tapo pavyzdžiu vėlesniems teiginių skaičiavimams. 1925 m. F.Brentano aprašė teiginių skaičiavimą, kuriame naudojama tik konjunkcija ir neigimas, o B.Russel – skaičiavimą su neigimu ir disjunkcija.

Pagrindiniai vadovėlyje aprašyti rezultatai ir prasideda G.Frege skaičiavimu bei vėlesniais logikų darbais.

Logika tolydžio tampa tiksluoju mokslu, kurio rezultatams suprasti jau reikia matematinio išsilavinimo. Patį mokslą pradėta vadinti tai *simboline logika*, tai *formaliaja* ar *matematine logika*. Kaip savarankiška matematikos šaka su savo problematika ir metodais logika susiformavo praeito šimtmečio ketvirtajame dešimtmetyje. Ypač daug prie to prisidėjo austrų logiko *K.Gödel* (1906-1977) darbai. 1930 metais jis įrodė apie predikatų skaičiavimo pilnumą. Taigi, predikatų skaičiavimas tampa ta logine sistema, kuria remiantis galima formalizuoti matematiką. Net susiformavus matematinei logikai, daugelyje universitetų dar ilgai logikos pavadinimu buvo dėstoma tik Aristotelio sistema.

Skirtingai negu kiti mokslai, matematika pagrindiniu tyrinėjimo metodu laiko įrodymą, o ne eksperimentą. Pavyzdžiui, išmatavus daugelio trikampių vidaus kampų sumas, galima prieiti išvados, kad trikampio vidaus kampų suma lygi 180 laipsnių. Bet matematikas tai pripažins matematikos dėsniu (teorema) tik tada, kai bus įrodyta, pagrįsta logiškai.

Pažvelgę į bet kurios teoremos įrodymą, pamatysime, kad tai yra seka formulių, tarp kurių įterpti samprotavimai, paaiškinantys, iš kur gauname prieš ar po einančią formulę. Formulės turi vieną reikšmę, o samprotavimai dažnai būna įvairių netikslumų šaltinis. Ar galima rasti tokias samprotavimų (logikos) taisykles, užrašomas formulėmis, kuriomis naudojasi matematikas, įrodinėdamas teoremas? Jei pasisektų tai padaryti, teoremos įrodymas taptų seka formulių, tarp kurių stovi skaičiai, nurodantys pagal kurią taisyklę ir iš kokių jau turimų formulių gauta sekančioji. Tuomet, turint samprotavimų grandinę, galima patikrinti, ar tai įrodymas. Dar Leibnitz buvo iškėlęs idėją sukurti universalią visai matematikai kalbą ir ta kalba formalizuoti matematinius įrodymus. Ginčus, ar koks nors tvirtinimas teisingas, ar klaidingas, reikėtų suvesti į skaičiavimus. Paėmę pieštuką bei popieriaus ir atlikę matematinius skaičiavimus, galėtume nus-

tatyti, kas teisybės. Formalizavimo entuziazmą kiek prislopino rezultatai apie formaliąją aritmetiką. Bet tai truko neilgai. Atsiradus kompiuteriams atsivėrė labai didelės logikos taikymų perspektyvos.

Logikos rezultatai taikomi:

- matematikoje (matematikos pagrindimas, teorijų neprieštaravimas,...),
- informatikoje:
 - a) programavime (programų korektiškumas, loginis programavimas,...),
 - b) dirbtinio intelekto teorijoje,
 - c) duomenų bazėse.
- šnekamosios kalbos analizėje.

Pirmasis vadovėlis *Principia Mathematica*, skirtas matematinei logikai ir jos taikymui matematikoje, pasirodė 1910 metais. Jo autoriais buvo B.Russel ir A.Whitehead. Jame yra ir toks sakinyb: *Tas faktas, jog visa matematika yra ne kas kita kaip simbolinė logika – didžiausias mūsų amžiaus atradimas*. Vėliau, kelerių metų bėgyje, buvo išleisti dar du tomatai. Su knygos pasirodymu siejamas naujas matematinės logikos vystymosi etapas. Kito vadovėlio teko laukti pakankamai ilgai. D.Hilbert ir P.Bernays knygos *Grundlagen der Mathematik* pasirodymas 1939 metais užbaigė logikos, kaip matematinės disciplinos, formavimosi etapą. Atsiradus kompiuteriams ir informatikos mokslui, palaipsniui *matematinė logika* tampa jau *informatikos mokslo* šaka. Pirmosios automatinio teorijų įrodymo programos buvo sukurtos 1957 metais, t.y. praėjus dešimčiai metų po pirmųjų kompiuterių pasirodymo. Programų autorius – kinų kilmės amerikietis Wang Xao. Kompiuteriu IBM jis įrodė apie 400 teiginių logikos bei pirmosios eilės logikos su lygybės predikatu dėsnų, aprašytų tritomyje *Principia Mathematica* (1910-1913 m.).

Lietuvoje *matematinė logika* pradėta dėstyti Vilniaus universitete 1960 metais. Tų metų pavasario bei rudens semestrus J.Kubilius skaitė *Matematinės logikos* specialųjį kursą matematikos specialybės studentams. V.Kabaila 1962 m. skaitė skaičiavimo matematikos specializacijos trečiakursiams *Loginio konstravimo pagrindų* specialųjį kursą. Nuo 1964 metų Vilniaus universitete matematinė logika dėstoma kaip privaloma disciplina – iš pradžių tik matematikos specialybės, o vėliau ir informatikos bei programų sistemų specialybių studentams. Matematinės logikos tyrimų Lietuvoje pradžia siejama su pirmąja 1963 m. V. Matulio apginta daktaro (tuo metu fizikos-matematikos mokslų kandidato) disertacija tema *Apie kai kuriuos klasikinio predikatų skaičiavimo su vieninteliu išvedimo medžių sekvencinius variantus*. Po to 1967 m. Regimantas Pliuškevičius apgynė daktaro disertaciją tema *Konstruktvyvosios logikos be struktūrinių taisyklių variantai bei sekvencijų su normalinėmis formulėmis išvedimai*, o 2002 m. – ir habilituoto daktaro disertaciją tema *Prisotinimo metodas tiesinei laiko logikai*. Pamažu ir Lietuvoje formavosi matematinės

logikos mokykla. Matematikos (dabar Matematikos ir informatikos) institute 1964 m. buvo įkurtas *Matematinės logikos ir programavimo* sektorius (1967 m. jis pervardytas į *Matematinės logikos ir algoritmų teorijos*, o 1993 m. į *Matematinės logikos* skyrių).