Stanislovas NORGĖLA

M A T E M A T I N Ė L O G I K A

Vilnius, 2004

ISBN -

Recenzavo: dr. R.Alonderis, doc. hab.dr. R.Pliuškevičius, dr. J.Sakalauskaitė

T U R I N Y S

Įvadas

Per ilgą savo gyvavimo istoriją matematika pergyveno tris gilias krizes. Matematika kaip deduktyvus mokslas susiformavo VI amžiuje prieš Kristų. Žymiausi to meto matematikai buvo Pythagoras, Tallis bei jų mokiniai. Pythagoras darbai rėmėsi *intuityviai aiškiu* tvirtinimu, kad bet kurie vienarūšiai dydžiai turi bendrą matą. Pavyzdžiui, bet kurioms dviems atkarpoms atsiras trečioji, telpanti sveikąjį skaičių kartų į kiekvieną turimą atkarpą. Buvo manoma, kad visi ilgiai ir plotai tarpusavyje gali būti bendramačiai. Nebendramačių atkarpų atradimas buvo didelis smūgis matematiko Phytagoras mokymui. Netikėtas atradimas V amžiuje prieš Kristų, kad kvadrato įstrižainė neturi bendro mato su kraštine, sukėlė matematikos pagrindų krizę. Pasirodo, kvadrato įstrižainės ir kraštinės santykio negalima išreikšti jokiu tuo metu vartojamu skaičiumi.

Vėliau buvo atrasta ir daugiau nebendramačių dydžių. Tai apskritimo ilgis ir jo skersmuo, kvadrato ir apie jį apibrėžto skritulio plotai bei kiti dydžiai. Krizė tęsėsi ilgai. Jos pabaiga, apie 370 metus prieš Kristų, siejama su žymaus graikų matematiko Eudoxos darbais. Jis sukūrė bendrąją proporcijų teoriją. Ši krizė suvaidino ypatingą vaidmenį matematinio metodo kūrimui. Be to, buvo įvesti nauji skaičiai. Jie nebuvo nei sveiki, nei trupmeniniai. Tai *iracionalūs skaičiai* ($\sqrt{2}$, π,...). To meto daugelio mokslininkų jie buvo sutikti su nepasitikėjimu. Šie skaičiai buvo laikomi nesuprantamais, beprasmiais, netikrais, protu nesuvokiamais, t.y. "iracionaliais".

Antroji krizė siejama su matematine analize ir sukrėtė matematiką XVII amžiaus pabaigoje. Newton ir Leibnitz mokiniai, kiti jų teorijos šalininkai mažai rūpinosi analizės pagrindais. Jie buvo susižavėję dideliu galimumu taikyti analizę praktikoje. Teoremų įrodymai nebuvo griežti. Rezultatai rėmėsi neaiškiu be galo mažų dydžių aiškinimu. Krizė ir kilo dėl šios sąvokos neaiškumo. Be galo mažas dydis kartais būdavo prilyginams nuliui ir atmetamas skaičiavimuose, kitais kartais jam būdavo suteikiama reikšmė nelygi nuliui. XIX amžiaus pradžioje Cauchy atsisakė neaiškios be galo mažų dydžių teorijos ir pakeitė ją griežta ribų teorija. Antrosios krizės pabaiga kaip tik ir siejama su šia teorija.

Įdomu, kad ir XX amžiuje matematikai grįžo prie be galo mažų dydžių sąvokos patikslinimo. 1960 m. amerikiečių matematikas A.Robinson pasiūlė kitą būdą, kaip galima griežtai pagrįsti XVII ir XVIII amžių matematinę analizę. Jis pasiūlė žiūrėti į be galo mažus dydžius ne kaip į kintamuosius, o kaip į pastovius dydžius. Taip juk buvo ir tada, kai kūrėsi matematinė analizė. Matyt, ir Leibnitz, įvesdamas simbolius *dx, dy*, laikė juos pastoviais ypatingos rūšies dydžiais. Taigi, A.Robinson įvedė be galo mažų ir be galo didelių skaičių sąvokas. Remiantis šiomis sąvokomis galima kurti kitokią matematinę analizę (tiksliau, ją pagrįsti kitu būdu). Ji vadinama nestandartine analize.

Trečioji matematikos pagrindų krizė prasidėjo 1897 metais, kai spaudoje pasirodė italų matematiko Burali-Forti atrasta aibių teorijos antinomija. Kai kalbama apie kurią nors teorijos antinomiją, suprantama, kad toje teorijoje įrodomi du vienas kitam prieštaraujantys teiginiai, nors teorijos aksiomos bei išvedimo taisyklės atrodo teisingos.

Pateiksime porą antinomijų pavyzdžių.
Vienas žmogus pasakė: *viskas, ką aš kalbu – melas.* Vadinasi, melas ir šitas jo posakis. O tai reiškia, kad ne viskas, ką pasako tas žmogus, yra melas. Betgi tai prieštarauja pirmajam teiginiui.

Tarkime, a yra mažiausias teigiamas skaičius kuriam apibrėžti reikia daugiau kaip 15 lietuviškų žodžių. Kadangi pastarąjį sakinį sudaro mažiau kaip 15 žodžių, tai a nėra taip apibrėžtas skaičius. Taigi, tas sakinys prieštaringas.

Deja, panašių paradoksų, pasirodo galima rasti ir, griežtoje, tikslioje matematikoje (žiūrėk skyrelį *aksiominė aibių teorija*). Taigi, aibių teorijoje buvo aptikta paradoksų, o tai reiškia, kad aibių teorijoje ne viskas gerai. Kadangi aibių teorija remiasi ir kitos matematikos šakos, tai susvyravo matematikos pagrindai. Daugelis tyrinėtojų laikė, kad paradoksų priežastis slypi logikoje. Buvo reikalinga visapusiška logikos pagrindų analizė.

Logika nagrinėja žmogaus mąstymą, tiksliau – mąstymo formą. Žodis *logika* kilęs iš senosios graikų kalbos žodžio *logos*, reiškiančio *žodis, kalba, protas, samprotavimas.* Logika atsirado ir vystėsi kaip filosofijos mokslo šaka. VI-IV a. prieš Kristų ji buvo savarankiškai kuriama Graikijoje, Kinijoje ir Indijoje. Žymiausiu tų laikų logiku buvo graikų filosofas *Aristotelēs* (384-322 m. prieš Kristų), kurio sukurta teorija (žiūrėk skyrelį *Aristotelio logika*) suvaidino ypatingą vaidmenį logikoje. Po Aristotelio sistemos sukurimo sekė stagnacijos periodas, kurio trukmė daugiau kaip du tūkstančiai metų.

Matematinė logika, naudodama matematiką, pirmiausia tiria matematinius samprotavimus. Matematinės logikos pradininkais vieni autoriai vadina vokiečių matematiką G.Leibnitz (1646-1716), kiti airių matematiką D.Boole (1646-1716) ar vokietį G.Frege (1848-1925). Didelę įtaką ir vieniems , ir kitiems turėjo Aristoteles.

Matematikas A.de Morgan iš Londono (1806-1878) kai kurias algebroje galiojančias savybes perkėlė logikos dėsniams. D.Boole stengėsi įgyvendinti idėją, kad logika taptų tiksliuoju mokslu. Vokiečių matematikas E.Schräder (1841-1902) bei Kazanės universiteto (Rusija) profesorius P.S.Poreckij (1846-1907) padėjo pagrindus teiginių ir predikatų logikai, dažniausiai siedami ją su algebra. Per šimtmečius susikaupė daug atrastų logikos dėsnių. Pavyzdžiui, vienas jų $((p\&q) \to r)\&(p\&\neg r)) \to \neg q$. Loginių operacijų ženklų dar nebuvo. Dėsnis buvo užrašytas taip:

Jei pirmasis ir antrasis, tai trečiasis. Dabar nėra trečiojo, bet yra pirmasis. Vadinasi, nėra antrojo.

Kaip gi jie būdavo atrandami? Dažniausiai būdavo iškeliama hipotezė apie dėsnį ir stengiamasi jį paneigti t.y. rasti pavyzdį, su kuriuo jis būtų klaidingas. Jei tai nepavyksta, tai jis pripažįstamas dėsniu. Įrodymo (matematine prasme) nebūdavo. Logikos dėsnių aibę pirmasis susistemino vokiečių matematikas Gottlob Frege. Jis 1879 metais pirmasis sukūrė formaliąją teoriją $-$ teiginių skaičiavimą ir parodė, kad visi žinomi, bei daugelis naujų, išvedami jame (paprastumo dėlei aksiomos parašytos šių laikų formalioje kalboje):

(1) $A \to (B \to A)$
(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(3) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
(4) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
(5) $\neg\neg A \to A$
(6) $A \to \neg\neg A$

Skaičiavime yra formulių keitimo lygiavertčiomis ir *modus ponens* taisyklės. Vėliau buvo įrodyta, kad (3) aksioma nereikalinga. Ji išvedama iš likusiųjų. Įdomu tai, kad G.Frege aprašė skaičiavimą anksčiau, negu kad buvo pastebėta, kad logikos dėsnius galima nustatyti ir naudojantis teisingumo lentelėmis. Tik praėjus šešeriems metams, 1885 metais Charles Sanders Peirce (amerikiečių matematikas ir filosofas) sukūrė teisingumo lentelių metodą.

Pagrindiniai vadovėlyje aprašyti rezultatai ir prasideda G.Frege skaičiavimu bei vėlesniais logikų darbais.

Logika palaipsniui tampa tiksliuoju mokslu, kurio rezultatų supratimui jau reikalingas matematinis išsilavinimas, o pats mokslas pradėtas vadinti tai *simboline logika*, tai *formaliaja* ar *matematine logika.* Galutinai kaip savarankiška matematikos šaka su savo problematika ir metodais logika susiformavo praeito šimtmečio ketvirtajame dešimtmetyje. Ypač prie to prisidėjo austrų logiko *K.Gödel* (1906-1977) darbai. Netgi susiformavus matematinei logikai, daugelyje universitetų dar ilgai logikos pavadinimu buvo dėstoma tik Aristotelio sistema. 1945 metais Bertrand Russell knygoje *History of western philosophy* apie tai rašė:

Netgi dabar visi filosofijos katalikų bei daugelis kitų dėstytojų vis dar neigia šiuolaikinės logikos atradimus ir su keistu užsispyrimu prisilaiko aiškiai pasenusios, kaip kad Ptolomėjaus sistema astronomijoje, Aristotelio logikos.

Matematika, skirtingai negu kiti mokslai, pagrindiniu tyrinėjimo metodu laiko įrodymą, o ne eksperimentą. Pavyzdžiui, išmatavus daugelio trikampių vidaus kampų sumas, galima prieiti išvados, kad trikampio vidaus kampų suma lygi 180 laipsnių. Bet matematikas tai pripažins matematikos dėsniu (teorema) tik tada, kai bus įrodyta, pagrįsta logiškai.

Pažvelgę į bet kurios teoremos įrodymą, pamatysime, kad įrodymas susideda iš formulių sekos, kur tarp formulių įterpti samprotavimai, paaiškinantys, iš kur gauname prieš ar po einančią formulę. Formulės turi vieną reikšmę, o samprotavimai dažnai būna įvairių netikslumų šaltinis. Ar galima rasti tokias samprotavimų (logikos) taisykles, užrašomas formulėmis, kuriomis naudojasi matematikas, įrodinėdamas teoremas? Jei pasisektų tai padaryti, teoremos įrodymas taptų seka formulių, tarp kurių stovi skaičiai, nurodantys pagal kurią taisyklę ir iš kokių jau turimų formulių gauta sekančioji. Tuomet, turint samprotavimų grandinę, galima patikrinti, ar tai įrodymas. Dar Leibnitz buvo iškėlęs idėją sukurti universalią kalbą visai matematikai ir tos kalbos pagalba formalizuoti matematinius įrodymus. Ginčus dėl vieno ar kito tvirtinimo teisingumo reikėtų suvesti į paskaičiavimus. Paėmę pieštuką bei popieriaus ir atlikę matematinius apskaičiavimus, galėtume nustatyti kas teisus. Formalizavimo entuziazmą kiek prislopino rezultatai apie formaliąją aritmetiką (žiūrėk skyrelį *aritmetikos nepilnumas*). Bet tai truko neilgai. Atsiradus kompiuteriams atsivėrė labai didelės logikos taikymų perspektyvos.

Pirmasis vadovėlis *Principia Mathematika*, skirtas matematinei logikai ir jos taikymui matematikoje, pasirodė 1910 metais. Jo autoriais buvo B.Russel ir A.Whitehead. Jame yra ir toks sakinys: *tas faktas, jog visa matematika yra ne kas kita kaip simbolinė logika – didžiausias mūsų amžiaus atradimas.* Su knygos pasirodymu siejamas naujas matematinės logikos vystymosi etapas. Kito vadovėlio teko laukti pakankamai ilgai. D.Hilbert ir P.Bernays knygos *Grundlagen der Mathematik* pasirodymas 1939 metais užbaigė logikos, kaipo matematinės disciplinos, formavimosi etapą. Atsiradus kompiuteriams ir informatikos mokslui, palaipsniui *matematinė logika* tampa jau *informatikos mokslo* šaka.

Lietuvoje *matematinė logika* pradėta dėstyti Vilniaus universitete 1960 metais. Tų metų pavasario bei rudens semestruose J.Kubilius skaitė *matematinės logikos* specialųjį kursą matematikos specialybės studentams. 1962 metais V.Kabaila skaitė skaičiavimo matematikos specializacijos trečiakursiams *Loginio konstravimo pagrindų* speckursą. Nuo 1964 metų Vilniaus universitete reguliariai pradedama matematinė logika skaityti kaipo privaloma disciplina. Iš pradžių ji skaitoma matematikos specialybės, o vėliau, informatikos bei programų sistemų specialybių studentams. Matematinės logikos tyrimų Lietuvoje pradžia siejama su pirmaja 1963 metais Viliaus Matulio apginta daktaro (tuo metu vadinosi fizikos-matematikos mokslų kandidato) disertacija tema *Apie kai kurios klasikinio predikatų skaičiavimo su vieninteliu išvedimo medžiu sekvencinius variantus.* Po to, 1967 metais Regimantas Pliuškevičius apgynė daktaro disertaciją tema *Konstruktyviosios logikos be struktūrinių taisyklių variantai bei sekvencijų su normalinėmis formulėmis išvedimai*, o 2002 metais ir habilituoto daktaro disertaciją tema *Prisotinimo metodas tiesinei laiko logikai.* Pamažu formavosi ir Lietuvoje matematinės logikos mokykla. Matematikos institute (dabar Matematikos ir informatikos institutas) 1964 metais buvo įkurtas *Matematinės logikos ir programavimo* sektorius (1967 metais jis pervardintas į *Matematinės logikos ir algoritmų teorijos*, o 1993 metais į *Matematinės logikos* skyrių).

Vadovėlis skirtas vyresniųjų kursų studentams. Knygoje sąmoningai praleistas skyrius apie Turing mašinas (su jomis supažindinama diskrečiosios matematikos kurse). Kadangi studentai, rašydami kursinius, bakalaurinius bei magistrinius darbus, naudojasi, kaip taisyklė, straipsniais anglų kalba, tai vadovėlio pabaigoje pateikiamas kai kurių matematinės logikos terminų lietuvių-anglų kalbų žodynas.

Leidinys skirtas informatikos, programų sistemų bei matematikos specialybių studentams.