1 skyrius
Aibės ir grafai

1.1 Skaičiosios aibės

Tarkime, turime dvi baigtines aibes A, B ir norime sužinoti, kurioje jų yra daugiau elementų. Galime tai atlikti suskaičiuojant elementus abiejose aibėse. Tarkime, pirmojoje aibėje jų m, o antrojoje $-$ n. Jei $m > n$, tai aibėje A elementų daugiau negu aibėje B. Jei $m < n$, tai elementų daugiau aibėje B, na, o jei $m = n$, tai abejose aibėse yra po vienodą skaičių elementų.

Galima tai atlikti ir kitu būdu. Paaiškinsime pavyzdžiu. Norime žinoti, ar pakanka vadovėlių studentams. Išdalijame vadovėlius (suprantama, studentas gauna tik po vieną vadovėlį) ir žiūrime, ar liko vadovėlių. Jei taip, tai vadovėlių daugiau negu studentų. Jei ne, ir liko studentų, neturinčių vadovėlių, tai studentų daugiau, o jei neliko vadovėlių ir visi studentai turi po vadovėlį, tai studentų ir vadovėlių vienodas skaičius. Šiuo atveju sakysime, kad tarp studentų ir vadovėlių aibių egzistuoja **abipusiai vienareikšmė atitiktis** (bijekcija). Antras dviejų aibių palyginimo būdas geresnis tuo, kad jį galima taikyti ir begalinėms aibėms (tuo atveju, kaip matysime vėliau, toks palyginimas nesutampa su baigtinėms aibėms atitinkančia sąvoka *vienodas skaičius elementų.*)

1.1 apibrėžimas. *Dvi aibės A, B vadinamos* **ekvivalenčiomis**, *jei egzistuoja tarp jų elementų abipusiai vienareikšmė atitiktis (žymėsime $A \sim B$).*

Keletas ekvivalenčių aibių savybių, išplaukiančių iš apibrėžimo:
1. $A \sim A$,
2. Jei $A \sim B$, tai $B \sim A$,
3. Jei $A \sim B$ ir $B \sim C$, tai $A \sim C$.

Raide R žymėsime realiųjų skaičių aibę, Q $-$ racionaliųjų, Z $-$ sveikųjų, $N = \{0, 1, 2, ...\}$ $-$ natūraliųjų bei $N_{-} = \{1, 2, 3, ...\}$ $-$ natūraliųjų skaičių aibę be 0.

1.2 apibrėžimas. *Aibė vadinama* **skaičiąja**, *jei ji ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei.*

Iš apibrėžimo išplaukia, kad skaičioji aibė yra begalinė.

Pavyzdys. Parodysime, kad sveikųjų skaičių aibė Z yra skaičioji.
Nurodysime abipusiai vienareikšmę atitiktį tarp aibių Z ir N elementų. Ją žymėsime $\updownarrow$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
0, & 1, & \text{-1}, & 2, & \text{-2}, & 3, & \text{-3}, & \dots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots
\end{array}
$$

Atitiktis gali būti užrašyta kuria nors funkcija ar taisykle. Norint įrodyti, kad kuri nors aibė A skaičioji, pakanka nurodyti taisyklę, pagal kurią būtų gaunama seka visų aibės A elementų (kiekvienas elementas joje sutinkamas tik po vieną kartą). Todėl, norint įrodyti, kad aibė Z skaičioji, pakanka parodyti, kad ją galima parašyti sekos pavidalu: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$ Iš tokio užrašymo matosi, kad sekoje bus sutinkami visi Z elemetai po vieną kartą ir galima apskaičiuoti kelintu kuris nors elementas bus sekoje.

1.3 apibrėžimas. *Aibė vadinama* **numeruojamąja**, *jei ji baigtinė arba skaičioji.*

1.1 teorema. *Kiekvienas skaičiosios aibės poaibis yra numeruojamoji aibė.*

Įrodymas. Duota kuri nors skaičioji aibė $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ ir $B \subset A$. Išbraukiame sekoje $a_0, a_1, a_2, ...$ visus tuos narius, kurie nepriklauso aibei B. Gausime seką, kuri bus begalinė, ir tuo pačiu skaičioji, arba baigtinė. Teorema įrodyta.

Išvada. *Jei $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ skaičioji aibė, tai $B = \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...\}$ $(i > 0)$ irgi skaičioji aibė.*

Taigi $N \sim N_-$. Jei A skaičioji, tai $A \sim N$. Iš 3 savybės išplaukia, kad A skaičioji tada ir tiktai tada, kai $A \sim N_-$. Dažniausiai sekos narių numeracija pradedama vienetu. Tai siejama su nario eiliškumu sekoje: pirmasis narys, antrasis narys ir t.t. Mes irgi kai kada skaičiosios aibės narius rašysime pradėdami indeksu 1: $a_1, a_2, a_3, ...$

Tarkime $A = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ skaičioji ir jos elementais yra skaičiosios aibės $A_i = \{a^i_0, a^i_1, a^i_2, ...\}$. Tuomet aibė $A_0 \cup A_1 \cup A_2 ...$ vadinama skaičiosios sistemos skaičiųjų aibių sąjunga.

1.2 teorema. *Skaičiosios sistemos skaičiųjų aibių sąjunga yra skaičioji aibė.*

Įrodymas. Tarkime $A = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ bei A_i $(i = 0, 1, 2, ...)$ yra skaičiosios aibės. $A_i = \{a^i_0, a^i_1, a^i_2, ...\}$. Nurodysime taisyklę, kaip galima parašyti visus aibės A elementus sekos pavidalu.

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_0^0 & \to & a_1^0 & a_2^0 & \to & a_3^0 & a_4^0 \to a_5^0 & \cdots \\
a_0^1 & & a_1^1 & a_2^1 & & a_3^1 & a_4^1 & \cdots \\
a_0^2 & & a_1^2 & a_2^2 & & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\
a_0^3 & & a_1^3 & a_2^3 & & a_3^3 & a_4^3 & \cdots \\
a_0^4 & & a_1^4 & a_2^4 & & a_3^4 & a_4^4 & \cdots \\
\ldots & & & & & & &
\end{array}
$$

Rodyklėmis nurodome tvarką, kuria rašomi elementai: $a_0^0, a_1^0, a_0^1, a_0^2, ...$ Tik prieš rašydami kurį nors elementą a_j^i, tikriname ar nėra jam lygaus jau gautoje sekoje. Jei taip, tai a_j^i praleidžiame. Teorema įrodyta.

1.3 teorema. *Dviejų skaičiųjų aibių Dekarto sandauga yra skaičioji aibė.*

Įrodymas. Tarkime duotos dvi skaičiosios aibės $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ ir $B = \{b_0, b_1, b_2, ...\}$. Pažymėkime raide C_i $(i = 0, 1, 2, ...)$ aibę $\{(a_i, b_0), (a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots\}$. Tuomet $A \times B$ lygi sąjungai skaičiųjų aibių $C_0, C_1, C_2, ...$ Sutinkamai su 1.2 teorema $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup ...$ yra skaičioji, o tuo pačiu ir $A \times B$ yra skaičioji aibė. Teorema įrodyta.

Išvada. *Baigtinio skaičiaus skaičiųjų aibių Dekarto sandauga yra skaičioji aibė.*

1.4 teorema. *Racionaliųjų skaičių aibė Q yra skaičioji aibė.*

Įrodymas. Racionaliuosius skaičius galime parašyti trupmenomis $\frac{m}{n}$ (čia $m \in Z, n \in N_-$), o jas poromis (m, n). Kadangi Z bei N_- skaičiosios aibės, tai ir visų porų (m, n) aibė bus skaičioji, nes, pagal 1.3 teoremą $Z \times N_-$ yra skaičioji aibė. Kai kuriomis poromis nusakome vieną ir tą patį racionalųjį skaičių, pavyzdžiui, $(2, 4)$ ir $(1, 2)$. Todėl $Q \subset Z \times N_-$. Begalinė racionaliųjų skaičių aibė Q yra skaičiosios aibės poaibis ir todėl, pagal 1.1 teoremą, ji pati yra irgi skaičioji aibė. Teorema įrodyta.

1.4 apibrėžimas. *Tarkime, duota kuri nors aibė A.*
1. *Bet kuris aibės A elementas vadinamas žodžiu aibėje A. Jo ilgis lygus 1.*
2. *Jei u, v − žodžiai aibėje A, kurių ilgiai atitinkamai m ir n, tai ir uv irgi žodis aibėje A, o jo ilgis $m + n$.*

Pavyzdys. $A = \{a, b, c\}$. Tuomet *a*, *bba*, *cabbaccac* yra žodžiai aibėje A. Jų ilgiai atitinkamai lygūs 1,3,9.

Kai kalbama apie žodžius kurioje nors aibėje, tai A dar vadinama **abėcėle**, o jos elementai − raidėmis. Žodyje gali būti sutinkama ne kartą viena ir ta pati raidė. Pavyzdžiui, žodyje *cabbaccac* sutinkame tris kartus raidę *a*, du kartus *b* ir keturis kartus *c*.

1.5 apibrėžimas. *Raidės x* **įeitimi** *žodyje u vadinsime porą (x, i). i − natūralusis* *skaičius* $(i \geq 1)$*, nurodantis kelintą kartą (perbėgant žodį u iš kairės į dešinę) sutinkama raidė x.*

Pavyzdžiui, paryškintos raidės c įeitimi žodyje *cabbac***c***ac* bus $(c, 3)$. (x, i) perskaitoma: *i-toji x įeitis žodyje u.* Raidės įeitis apibendrinama ir žodžių atvejui t.y. kalbama apie žodžių įeitis duotajame žodyje. Pavyzdžiui, žodyje *cabbaabab* yra trys žodžio *ab* įeitys.

1.6 apibrėžimas. *Žodis u vadinamas žodžio uv pradžia, o* v − *jo pabaiga.*

Tarkime, kad abėcėlė A − baigtinė aibė. A^* žymėsime visų galimų abėcėlėje A žodžių aibę. Pavyzdžiui, jei $A = \{a\}$, tai $A^* = \{a, aa, aaa, ...\}$.

1.5 teorema. *Baigtinės abėcėlės* $A = \{a_1, ..., a_m\}$ *visų žodžių aibė* A^* *yra skaičioji.*

Įrodymas. Fiksuojame kurią nors visišką tvarką abėcėlėje A. Priskiriame kiekvienai raidei po vieną skirtingą skaičių nuo 1 iki m. Tarkime, tai sutampa su raidės indeksu: $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$. Nurodysime taisyklę, kuria remiantis parašysime seka visus aibės A^* elementus. Visų pirma parašome visus žodžius vienetinio ilgio prisilaikant įvestos tvarkos. Po to visus skirtingus žodžius, kurių ilgis lygus 2, dar po to visus skirtingus žodžius, kurių ilgis lygus 3 ir t.t. Jei du žodžiai $b = a_{i_1}, ..., a_{i_n}$ ir $c = a_{j_1}, ..., a_{j_n}$ vienodo ilgio ir $i_1 < j_1$, tai b sutinkamas sekoje anksčiau negu c, o jei $i_1 < j_1$, tai c anksčiau. Jei $a_{i_1} = a_{j_1}$,...,$a_{i_s} = a_{j_s}$, $a_{i_{s+1}} \neq a_{j_{s+1}}$ ir $i_{s+1} < j_{s+1}$, tai b sutinkamas sekoje anksčiau negu c, o jei $i_{s+1} > j_{s+1}$, tai c.
Seka atrodo šitaip:

$$a_1, ..., a_m, a_1a_1, ..., a_1a_m, a_2a_1, a_2a_2, ..., a_2a_m, ..., a_ma_1, a_ma_2, ..., a_ma_m,$$
$$a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, ..., a_1a_1a_m, ...$$

Toks žodžių išdėstymas vadinamas dar **leksikografine tvarka**. Teorema įrodyta.

1.6 teorema. *Atvirojo intervalo (0,1) visų realiųjų skaičių aibė nėra skaičioji.*

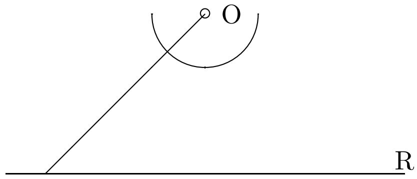
Įrodymas. Tarkime, kad aibė skaičioji. Tuomet jos elementus galima parašyti sekos pavidalu:

$$\begin{array}{c} 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 ... \\ 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 ... \\ 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 ... \\ \cdots \end{array}$$

$0 \leq a_j^i \leq 9$ $(i, j \geq 1)$ − skaitmenys. i-tajam skaičiui sekoje (iš viršaus į apačią) priskiriame natūralųjį i.

Nagrinėjame skaičių $0, b_1 b_2 b_3 ...$, kuriame skaitmuo b_i tenkina sąlygas: a) $0 < b_i < 9$, b) $b_i \neq a_i^i$. Skaičius priklauso intervalui $(0, 1)$, bet jo nėra aprašytoje sekoje. Taigi, neegzistuoja abipusiai vienareikšmės atitikties tarp natūraliųjų skaičių aibės ir atvirojo intervalo $(0, 1)$ visų realiųjų skaičių aibės. Teorema įrodyta.

Atvirojo intervalo $(0, 1)$ visų realiųjų skaičių aibė ekvivalenti realiųjų skaičių aibei. Abipusiai vienareikšmę atitiktį gauname transformavę atkarpą į pusapskritimį:



1.7 apibrėžimas. *Aibė ekvivalenti realiųjų skaičių aibei vadinama* **kontinumo galios aibe.**

Tarkime, duota kuri nors aibė A. Aibę, kurios elementai yra visi galimi A poaibiai, vadinsime aibės A poaibių aibe ir žymėsime $P(A)$.

Pavyzdžiai.
1. $A = \{2, 3\}$. Tuomet $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.
2. $A = \emptyset$. Tuomet $P(A) = \{\emptyset\}$.

Jei baigtinėje aibėje yra n elementų, tai aibėje $P(A)$ bus 2^n elementų t.y. joje daugiau elementų negu aibėje A. Įdomu, kad analogiškas tvirtinimas teisingas ir begalinėms aibėms. $P(A)$ yra gausesnė už aibę A.

1.7 teorema. *Bet kurios aibės A poaibių aibė P(A) nėra ekvivalenti jokiai* $A_0 \subset A$.

Įrodymas. Tai akivaizdu baigtinėms aibėms. Tarkime, A kuri nors begalinė aibė ir atsiras toks A poaibis A_0, kad $P(A) \sim A_0$. Taigi, tarp aibės A_0 elementų ir *P(A)* elementų (A poaibių) egzistuoja abipusiai vienareikšmė atitiktis. Formuojame aibę B tokiu būdu: elementas a iš A_0 priklauso aibei B tada ir tiktai tada, kai jis nėra jam atitinkančios (pagal duotąją abipusiai vienareikšmę atitiktį) aibės iš *P(A)* elementas.

B tenkina sąlygą $B \subset A_0 \subset A$ ir todėl $B \in P(A)$. Sutinkamai su prielaida, atsiras aibėje A_0 jam atitinkantis elementas (pažymėkime jį raide b). Klausiama, ar $b \in B$? Pagal aibės B konstravimą, $b \in B$ tada ir tiktai tada, kai $b \notin B$. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.

Dvi aibės lygios, jei jos susideda iš vienų ir tų pačių elementų. Kai kada mums svarbus ir vienodų elementų skaičius. Norime, pavyzdžiui, laikyti aibes $A = \{a, b\}$ ir $B = \{a, a, b\}$ skirtingomis. Tuo atveju jas vadinsime **multiaibėmis**.

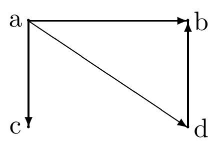
2.2 Pagrindinės grafų sąvokos

Grafu vadinsime aibių porą (V, L). V kuri nors netuščia aibė, vadinama *viršūnių* aibe, o L – multiaibė, kurios elementais yra poros (v, u) $(v, u \in V)$. L vadinama grafo *lankų* aibe. Jei aibės V, L baigtinės, tai ir grafas vadinamas baigtiniu. Priešingu atveju, jis begalinis.

Sakysime, kad lankas $l = (v, u)$ jungia viršūnes v, u. Viršūnė v vadinama lanko *pradžia*, o u – *pabaiga*. Jos vadinamos *gretimomis*. Sakoma, kad viršūnė v ir lankas l, o taip pat u ir l yra *incidentiniai*. Kadangi L multiaibė, tai joje gali būti ne viena pora (u, v). Tuomet lankas l vadinamas *kartotiniu*. Jei $v \in V$ ir aibėje L nėra lanko pavidalo (u, v) ar (v, u), tai viršūnė v vadinama *izoliuota*. Lankas pavidalo (v, v) vadinamas *kilpa*.

Grafo realizacija plokštumoje vadinsime kurią nors geometrinę schemą (brėžinį), kuriame viršūnės pažymėtos taškais (vienintelis reikalavimas, kad skirtingoms viršūnėms atitiktų skirtingi taškai). Lankas (v, u) žymimas kuria nors kreive, jungiančia viršūnes v, u. Lankas negali eiti per kitas viršūnes. Kad galėtumėm brėžinyje atskirti, kuri viršūnė yra grafo pradžia, o kuri pabaiga, būtina nurodyti kryptį. Nagrinėjamieji grafai vadinami *orientuotais grafais.* Grafas turi daug skirtingų realizacijų. Jei schemos yra to paties grafo realizacijos, tai jos vadinamos *izomorfinėmis.*

Pavyzdys.
$V = \{a, b, c, d\}$. $L = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)\}$.



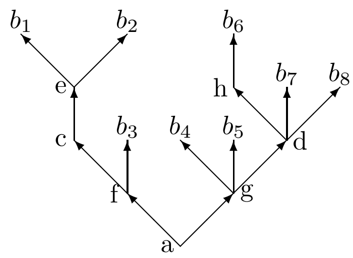
Keliu iš viršūnės v_{i_1} į v_{i_n} vadinsime baigtinę lankų seką

$$(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), ..., (v_{i_{n-2}}, v_{i_{n-1}}), (v_{i_{n-1}}, v_{i_n})$$

Jei $v_{i_1} = v_{i_n}$, tai toks kelias vadinamas *ciklu.* Kelias gali būti nurodomas ir viršūnių seka $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}$. Jis gali būti ir begalinis.

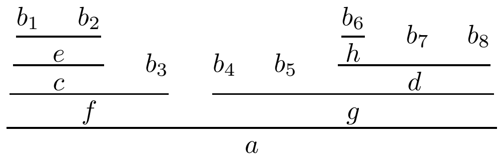
Grafas, kuriame nėra ciklų, vadinamas *medžiu* arba *medžio pavidalo grafu.*

Medžio pavyzdys.



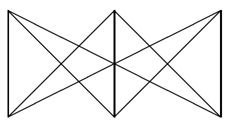
Viršūnė a vadinama *šaknimi*, o viršūnės $b_1, ..., b_8$ *galinėmis viršūnėmis* arba *lapais.*

Vėliau vadovėlyje nagrinėsime medžius, kurių viršūnės bus žymimos sudėtingesniais reiškiniais – formulėmis. Tuomet patogiau lanką žymėti horizontaliu brūkšniu. Aukščiau aprašytasis medis atrodys šitaip (kai grafas orientuotas, kryptis – iš apačios į viršų):



Nagrinėsime ir neorientuotus grafus $G = (V, B)$. Nenurodysime lanko krypties. Toks lankas be krypties vadinamas *briauna.* Taigi, neorientuotas grafas yra dviejų aibių, viršūnių ir briaunų, pora. Jei $(u, v) \in B$, tai galime kaip iš viršūnės u patekti į v, taip ir iš v į u.

Jei galima rasti tokią grafo realizaciją dvimatėje erdvėje (plokštumoje), kurioje briaunos (lankai) neturi bendrų taškų, išskyrus viršūnes, tai grafas vadinamas *plokščiuoju.*
Neplokščio grafo (jis vadinamas $K_{3.3}$) pavyzdys:



2.3 Pratimai

1. Rasti visų galimų aibės poaibių aibę:

a) $A = \{a, b, c\}$,

b) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Ar $A \times B = B \times A$?

3. Įrodyti, kad aibės $(A \cup B) \cap A$, $(A \cap B) \cup A$ lygios.

4. Įrodyti, kad jei A – baigtinė, B – skaičioji, tai $A \cup B$ – skaičioji.

5. Įrodyti, kad pirminių skaičių aibė skaičioji.

6. Įrodyti, kad visų sveikųjų dvejetainių skaičių aibė skaičioji.

7. Įrodyti, kad binarinio medžio visų baigtinių kelių, prasidedančių šaknyje, aibė skaičioji.